1.6 Αντιστρέψιμοι πίνακες

Η έννοια των αντιστρέψιμων πινάκων είναι κεντρική στη μελέτη μας.

Ορισμός 1.6.1. *Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{k})$ λέγεται* **αντιστρέψιμος** *(invertible) πίνακας αν υπάρχει ο πίνακας B έτσι ώστε*

$$AB = I_n = BA\ .$$

Ο πίνακας B λέγεται **αντίστροφος** *(inverse) πίνακας του A, συμβολίζεται με A^{-1}.*

Ο ορισμός λέει ότι για να είναι ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{k})$ αντιστρέψιμος θα πρέπει να υπάρχει ένας πίνακας B που να ικανοποιεί ταυτόχρονα δύο συνθήκες: $AB = I_n$ και $BA = I_n$. Θα δούμε αργότερα ότι η ισχύς της μίας από τις δύο ισότητες συνεπάγεται την ισχύ της άλλης. Έτσι για να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A (αν υπάρχει) αρκεί να βρεθεί πίνακας B που να πολλαπλασιάζεται από τα αριστερά ή από τα δεξιά με τον A και να δίνει τον μοναδιαίο πίνακα.

Παραδείγματα 1.6.2.

- Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ έχει αντίστροφο τον $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Πράγματι,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ δεν έχει αντίστροφο. Πράγματι για τον πίνακα A η ύπαρξη αντίστροφου σημαίνει ότι υπάρχει ένας πίνακας B έτσι ώστε

$$AB = I_n.$$

  Όμως στο γινόμενο AB η τελευταία γραμμή είναι μηδέν και άρα αυτή η ισότητα είναι αδύνατη.

- Το ίδιο όπως παραπάνω θα ισχύει για έναν πίνακα A με μία μηδενική γραμμή. Η αντίστοιχη γραμμή του γινομένου AB για κάθε πίνακα B θα είναι μηδέν και $AB \neq I_n$. Αντίστοιχα αν ο A έχει μία μηδενική στήλη, τότε η αντίστοιχη στήλη του γινομένου BA για κάθε πίνακα B θα είναι μηδέν και $BA \neq I_n$. Άρα ένας πίνακας με μία μηδενική γραμμή ή στήλη δεν είναι αντιστρέψιμος. Συγκεκριμένα και ο μηδενικός πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος.

- Αφού $I_n I_n = I_n$, έπεται ότι ${I_n}^{-1} = I_n$.

- Έστω
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
και $ad - bc \neq 0$. Τότε αν
$$B = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$
είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί ότι $B = A^{-1}$. Ο αριθμός $ad - bc$ λέγεται ορίζουσα του $A \in M_2(\Bbbk)$ και συμβολίζεται με $\det(A)$.

- Αν A είναι αντιστρέψιμος και $B = A^{-1}$ τότε B είναι αντιστρέψιμος και $A = B^{-1}$.

- Αν A είναι αντιστρέψιμος τότε $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$. Ορίζουμε τον πίνακα $A^{-n} := (A^{-1})^n$.

Πρόταση 1.6.3. *Αν οι πίνακες $A, B \in M_n(\Bbbk)$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε και το γινόμενό τους είναι αντιστρέψιμος πίνακας και*
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$
Γενικότερα, αν οι πίνακες $A_1, A_2, \ldots, A_s$ του $M_n(\Bbbk)$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε
$$(A_1A_2\cdots A_s)^{-1} = A_s^{-1}A_{s-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του αντίστροφου πίνακα προκύπτει ότι
$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = [A(BB^{-1})]A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$
Όμοια $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$. Άρα $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Η απόδειξη αυτή εύκολα γενικεύεται σε παραπάνω από δύο πίνακες.

Θα ορίσουμε τώρα τους στοιχειώδεις πίνακες που θα μας χρησιμέψουν στην μελέτη μας.

Ορισμός 1.6.4. **Στοιχειώδεις** *(elementaries)* **πίνακες** *είναι οι επόμενοι πίνακες.*

- *$E_{i+a\cdot j}$ ο πίνακας που προκύπτει από τον I_n αν αντικαταστήσουμε την i-γραμμή, Γ_i, του I_n με την $\Gamma_i + a\Gamma_j$, όπου $i \neq j$, $a \in \Bbbk$, δηλ. $I_n \xrightarrow[\Gamma_i \to \Gamma_i + a\Gamma_j]{} E_{i+a\cdot j}$.*

- *$E_{i\leftrightarrow j}$ ο πίνακας που προκύπτει από τον I_n αν αντιμεταθέσουμε την i με την j γραμμή, δηλ. $I_n \xrightarrow[\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j]{} E_{i\leftrightarrow j}$.*

- $E_{b\cdot i}$ *ο πίνακας που προκύπτει από τον* I_n *αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της* i *γραμμής με ένα στοιχείο* $b \in \mathbb{k}$, *δηλ.* $I_n \xrightarrow[\Gamma_i \to b\Gamma_i]{} E_{b\cdot i}$.

Παραδείγματα 1.6.5.

- Στον $M_2(\mathbb{R})$ οι στοιχειώδεις πίνακες είναι οι εξής:

$$E_{1+a\cdot 2} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_{2+a\cdot 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix},\ E_{1\leftrightarrow 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{b\cdot 1} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_{b\cdot 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

- Στον $M_3(\mathbb{R})$ έχουμε

$$E_{1+a\cdot 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_{2\leftrightarrow 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_{b\cdot 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

- Οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι. Ο αναγνώστης καλείται να βρει τον αντίστροφο για τους τρεις τύπους στοιχειωδών πινάκων. (Υπόδειξη: η επόμενη πρόταση θα κάνει την εύρεση του αντιστρόφου ενός στοιχειώδου πίνακα ιδιαίτερα απλή.)

Ο πολλαπλασιασμός ενός πίνακα A από τα αριστερά με έναν στοιχειώδη πίνακα δίνει τον πίνακα που προκύπτει από τον A μετά από την αντίστοιχη στοιχειώδη πράξεις γραμμών όπως εύκολα μπορεί να επιβεβαιώσει κανείς.

Πρόταση 1.6.6. *Αν* $A = (\alpha_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{k})$, *τότε*

1. *Ο πίνακας* $E_{i+a\cdot j}\, A$ *προκύπτει από τον* A *αν αντικαταστήσουμε την* i*-γραμμή,* Γ_i*, με την* $\Gamma_i + a\Gamma_j$*, δηλ.*

$$A \xrightarrow[\Gamma_i \to \Gamma_i + a\Gamma_j]{} E_{i+a\cdot j}\, A.$$

2. *Ο πίνακας* $E_{i\leftrightarrow j}\, A$ *προκύπτει από τον* A *αν αντιμεταθέσουμε την* i*-γραμμή με την* j*-γραμμή, δηλ.*

$$A \xrightarrow[\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j]{} E_{i\leftrightarrow j}\, A.$$

3. *Ο πίνακας* $E_{b\cdot i}\, A$ *προκύπτει από τον* A *αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της* i *γραμμής επί* $b \in K$*, δηλ.*

$$A \xrightarrow[\Gamma_i \to b\Gamma_i]{} E_{b\cdot i}\, A.$$

Παραδείγματα 1.6.7.

1. Έστω
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Αφού $A \xrightarrow[\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2]{} B$ έπεται ότι $B = E_{1\leftrightarrow 2}\, A$.

2. Θα φέρουμε τον πίνακα A του προηγούμενου παραδείγματος σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} .$$

   Τότε
$$A \xrightarrow[\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2]{} B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \to \frac{1}{2}\Gamma_1]{} C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to \frac{1}{3}\Gamma_2]{}$$
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2]{} I_2.$$

   Έπεται ότι
$$B = E_{1\leftrightarrow 2}\, A,\ C = E_{1/2\cdot 1}\, B,\ D = E_{1/3\cdot 2}\, C,\ I_2 = E_{1-2\cdot 2}\, D\ .$$

   Συνδυάζοντας αυτές τις ισότητες βρίσκουμε ότι
$$E_{1/3\cdot 2}\, E_{1/2\cdot 1}\, E_{1\leftrightarrow 2}\, A = I_2\ .$$

Σημειώνουμε ως πρόταση τη παρακάτω παρατήρηση για την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή ενός πίνακα R. Η απόδειξή της προκύπτει όπως και στο τελευταίο παράδειγμα.

Πρόταση 1.6.8. *Έστω R η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή ενός πίνακα A. Υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, \ldots, E_n$ έτσι ώστε*
$$R = E_n \cdots E_1\, A$$

Η Πρόταση 1.6.8 θα μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην εύρεση αντιστρόφων. Έστω ότι A είναι κάποιος συγκεκριμένος πίνακας του $M_n(\Bbbk)$ και ότι θέλουμε να βρούμε τον αντίστροφο του A εάν αυτός βέβαια υπάρχει. Δηλαδή θέλουμε να βρούμε έναν πίνακα B έτσι ώστε να ισχύει $AB = I_n$ και $BA = I_n$. Ας ξεκινήσουμε με την ισότητα-εξίσωση πινάκων $AB = I_n$. Ενώ γνωρίζουμε τα στοιχεία του A, τα n^2 στοιχεία του $B = (b_{ij})$ είναι αγνώστα. Στην πραγματικότητα η ισότητα $AB = I_n$ αντιστοιχεί σε n^2 εξισώσεις μία για κάθε ένα από τα στοιχεία του τετραγωνικού πίνακα AB. Μπορούμε να οργανώσουμε αυτές τις εξισώσεις σε n γραμμικά συστήματα (με n εξισώσεις και n αγνώστους) αν εξετάσουμε τις ισότητες που προκύπτουν εξισώνοντας τις στήλες του AB και του πίνακα I_n. Ο πίνακας των συντελεστών σε αυτά τα συστήματα είναι ο πίνακας A. Μπορεί λοιπόν κανείς να επιλύσει τα συστήματα αυτά ταυτόχρονα και να φέρει τον πίνακα $[A|\ I_n]$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις για την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του πίνακα $[A|\ I_n]$ ανάλογα με την βαθμίδα του πίνακας A. Αν $\mathrm{rank}(A) = n$ τότε όλα τα γραμμικά συστήματα που προσπαθούμε να επιλύσουμε είναι συμβατά και οι λύσεις προκύπτουν από την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του πίνακα $[\ A \mid I_n\ ]$:

$$[\ A \mid I_n\ ] \to \cdots \to [\ I_n \mid B\ ]\ .$$

Αν $\mathrm{rank}(A) < n$, τότε

$$[\ A \mid I_n\ ] \to \cdots \to [\ R \mid C\ ] \tag{1.1}$$

όπου R είναι η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A. Αφού $R \neq I_n$, η τελευταία γραμμή του R είναι μηδέν. Θα δούμε ότι η τελευταία γραμμή του C δεν είναι μηδέν και άρα τουλάχιστον ένα από τα συστήματα που προκύπτουν από την ισότητα $AB = I_n$ είναι μη συμβατό. Έτσι όταν $\mathrm{rank}(A) < n$ ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι σύμφωνα με την Πρόταση 1.6.8 έχουμε ότι

$$E_\kappa \cdots E_2\ E_1\ A = R \tag{1.2}$$

για κάποιους στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_\kappa$. Εφαρμόζουμε τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών που χρειάστηκαν για να φέρουμε τον πίνακα A στην κλιμακωτή μορφή R σε ολόκληρο τον πίνακα $[A|\ I_n]$. Παρατηρούμε ότι

$$[\ A \mid I_n\ ] \longrightarrow \cdots \longrightarrow [\ R \mid E_\kappa \cdots E_2 E_1\ ].$$

Δηλαδή ο πίνακας C της σχέσης 1.1 είναι το γινόμενο $E_\kappa \cdots E_2 E_1$. Αφού C είναι γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων είναι και ο ίδιος αντιστρέψιμος πίνακας. Αποκλείεται λοιπόν να έχει μηδενική γραμμή, βλ. Παράδειγμα 1.6.2. Έτσι αν $R \neq I_n$ (δηλ. $\mathrm{rank}(A) < n$) τότε κάποιο από τα συστήματα $AB = I_n$ δεν είναι συμβατό και ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος. Προκύπτει όμως και κάτι άλλο σύμφωνα με την ανάλυση που κάναμε. Έστω ότι ο πίνακας A έχει βαθμίδα ίση με n. Στη περίπτωση αυτή

$$E_\kappa \cdots E_1 A = I_n \tag{1.3}$$

για κάποιους στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_\kappa$. Όπως παρατηρήσαμε όμως

$$[\ A \mid I_n\ ] \longrightarrow \cdots \longrightarrow [\ I_n \mid E_\kappa \cdots E_1\ ].$$

και $B = E_\kappa \cdots E_2 E_1$. Δηλαδή όχι μόνο $AB = I_n$ αλλά ισχύει επίσης και $BA = I_n$, βλ. σχέση 1.3. Άρα

$$A^{-1} = E_\kappa \cdots E_2 E_1\ .$$

Σημειώνουμε αυτό που αποδείξαμε προσθέτοντας μία ακόμα παρατήρηση:

Θεώρημα 1.6.9. *Αν $A, B \in M_n(K)$ και $AB = I_n$, τότε οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι και $B = A^{-1}$. Αντίστροφα αν $BA = I_n$ τότε οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι και $B = A^{-1}$.*

Για να μπορούμε εύκολα να ακολουθήσουμε αυτή τη διαδικασία δίνουμε τον παρακάτω αλγόριθμο:

Αλγόριθμος εύρεσης αντιστρόφου του $A \in M_n(\Bbbk)$.

- Παραθέτουμε δεξιά του πίνακα A τον I_n και σχηματίζουμε τον πίνακα
$$[\ A \mid I_n\ ].$$
- Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του Gauss και φέρνουμε τον $[\ A \mid I_n\ ]$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών $[\ R \mid B\ ]$.
- Αν $R = I_n$ τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και $B = A^{-1}$. Αν $R \neq I_n$ ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Παραδείγματα 1.6.10.

- Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο του πίνακα
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\ .$$
Έχουμε:
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Επομένως

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

□

- Έστω ότι $A \in M_n(K)$ και $A^4 + 3A^2 + A - 4I_n = 0$. Τότε

$$A^4 + 3A^2 + A = 4I_n \;\Rightarrow\; A[1/4(A^3 + 3A + I_n)] = I_n.$$

Άρα ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = 1/4(A^3 + 3A + I_n)$.

Ο πίνακας που προκύπτει από έναν πίνακα A αν κάνουμε τις γραμμές του στήλες και τις στήλες γραμμές λέγεται **ανάστροφος** (transpose) του A και συμβολίζεται A^T. Έτσι αν

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad A^T = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \cdots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}.$$

Έπεται ότι αν $A = (\alpha_{ij})$ και $A^T = (\beta_{ij})$, τότε $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, και βέβαια $A \in M_{n\times m}(K)$, ενώ $A^T \in M_{m\times n}(K)$.

Παράδειγμα 1.6.11. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, τότε $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

□

Πρόταση 1.6.12. *Έστω $A, B \in M_n(K)$.*
i) $(AB)^T = B^T A^T$.
ii) $(A^T)^T = A$.
iii) $(\kappa A)^T = \kappa A^T,\ \kappa \in K$.
iv) *Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο πίνακας A^T είναι αντιστρέψιμος και $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Απόδειξη. Οι σχέσεις i), ii), iii), v) και vi) αποδεικνύονται εκτελώντας τις πράξεις που σημειώνονται.

iv) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$A\,A^{-1} = I_n = A^{-1}A \Leftrightarrow (A\,A^{-1})^T = I_n^T = (A^{-1}A)^T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A^{-1})^T A^T = I_n = A^T (A^{-1})^T.$$

Άρα

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Σημειώνουμε και κάποιους άλλους ορισμούς. Ο πίνακας $A \in M_n(K)$ λέγεται **συμμετρικός** (symmetric) αν ικανοποιεί τη σχέση $A = A^T$, δηλ. $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$. Ενώ λέγεται **αντισυμμετρικός** (antisymmetric) αν ικανοποιεί τη σχέση $A = -A^T$, δηλ. $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$. Ο πίνακας A λέγεται **διαγώνιος** (diagonal) αν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται πάνω και κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλ. $\alpha_{ij} = 0$, για $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Ο A λέγεται **άνω τριγωνικός** (upper triangular) αν όλα τα στοιχεία του κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλ. $\alpha_{ij} = 0$, για $i > j$, $1 \leq i, j \leq n$. Ο A λέγεται **κάτω τριγωνικός** (lower triangular) αν όλα τα στοιχεία του πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλ. $\alpha_{ij} = 0$, για $i < j$, $1 \leq i, j \leq n$.

Παραδείγματα 1.6.13.

α) Οι πίνακες $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ είναι συμμετρικοί.

β) Οι πίνακες $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & -2 \\ -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ είναι αντισυμμετρικοί.

γ) Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

δηλ. είναι το άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα. Ο αναγνώστης μπορεί να αποδείξει ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

Ασκήσεις

1. Να βρείτε τους αντιστρόφους των στοιχειωδών πινάκων.

2. **(*)** Να γραφεί ο πίνακας

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων. Να υπολογίσετε το γινόμενο

$$E \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix},$$

χωρίς την εκτέλεση των πράξεων του πολλαπλασιασμού πινάκων.

3. **(*)** Να υπολογίσετε τον αντίστροφο του γινομένου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

όπου $a, b, c \in K$ και $c \neq 0$, χρησιμοποιώντας τους στοιχειώδεις πίνακες.

4. **(*)** Να υπολογίσετε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων με τη μέθοδο του Παραδείγματος 1.6.10.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. **(*)** Αν $A^2 + 2A - I_n = \mathbf{O}$, να αποδείξετε ότι ο πίνακας $A \in M_n(K)$ είναι αντιστρέψιμος. Ομοίως για τον πίνακα $B \in M_n(K)$, αν $2B^3 + 4B^2 - 2B + 3I_n = \mathbf{O}$.

6. **(*)** Δίνεται ο πίνακας $A \in M_n(K)$. Να αποδείξετε ότι:

   i) ο πίνακας $A + A^T$ είναι συμμετρικός,

   ii) ο πίνακας $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός,

   iii) ο πίνακας $A\,A^T$ είναι συμμετρικός,

   iv) ο πίνακας A γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα,

   v) αν ο πίνακας A είναι αντισυμμετρικός, τότε όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι μηδέν.

1.7 Ορίζουσες πινάκων

Σε κάθε $n \times n$-πίνακα A του $M_n(\mathbb{k})$ αντιστοιχούμε ένα στοιχείο του $\mathbb{k}$ που λέγεται ορίζουσα (determinant) του πίνακα και συμβολίζεται με $\det A$ ή με $|A|$. Δηλαδή η ορίζουσα είναι μία συνάρτηση

$$\det : M_n(\mathbb{k}) \to \mathbb{k}, \quad A \mapsto \det A\ .$$

Η ορίζουσα ενός 1×1-πίνακα $[\alpha]$ είναι $\det[\alpha] = \alpha$. Επίσης

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Για $n \times n$ πίνακες με $n > 2$ θα δώσουμε έναν αναδρομικό ορισμό της ορίζουσας, δηλ. θα ορίσουμε την ορίζουσα ενός $n \times n$-πίνακα με τη βοήθεια οριζουσών $(n-1) \times (n-1)$-πινάκων που λέγονται **ελάσσονες** (minors) πίνακες του A και που συμβολίζουμε με A_{ij}. Ο πίνακας A_{ij} είναι ο $(n-1) \times (n-1)$-πίνακας που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i-γραμμή και την j-στήλη του.

Παραδείγματα 1.7.1.

- Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, τότε $A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$. □

- Ο ελάσσων πίνακας $(I_n)_{11}$ του μοναδιαίου $n \times n$ πίνακα είναι ο πίνακας I_{n-1}.

- Έστω A ένας άνω (κάτω) τριγωνικός πίνακας. Τότε ο πίνακας A_{11} είναι άνω (κάτω) τριγωνικός πίνακας.

Ορισμός 1.7.2. *Η* **ορίζουσα** *ενός $n \times n$-πίνακα $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(\Bbbk)$ ορίζεται από τον τύπο*

$$\det A = \alpha_{11} \det A_{11} - \alpha_{21} \det A_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}\alpha_{n1} \det A_{n1} . \tag{1.4}$$

Ο τύπος (1.4) εκφράζει τη **ανάπτυξη της ορίζουσας του πίνακα A κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης**. Σε λίγο θα δούμε ότι η ορίζουσα του A υπολογίζεται με κατάλληλη ανάπτυξη κατά τα στοιχεία μίας οποιασδήποτε στήλης ή και γραμμής.

Παραδείγματα 1.7.3.

- Έστω $A = [2]$, τότε $\det A = 2$.
- Η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ είναι $\det A = 4$.
- Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Τότε

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 0 = -7.$$

- Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Τότε

$$\det A = 1 \cdot \det A_{11} - 0 \cdot \det A_{21} + 0 \cdot \det A_{31} - 3 \cdot \det A_{41} .$$

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει λόγος να υπολογίσουμε τους πίνακες A_{21}, A_{31} και τις ορίζουσές τους, αφού θα πολλαπλασιαστούν με το 0, ενώ ο πίνακας A_{41} είναι ο 3×3 πίνακας του προηγούμενου παραδείγματος, άρα $\det A_{41} = -7$. Μένει λοιπόν να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα A_{11}.

$$\det A_{11} = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$3\det\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} - 0\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = 0 - 0 + 0 = 0.$$

Άρα

$$\det A = -3\cdot(-7) = 21\ .$$

- Θα δούμε ότι $|I_n| = 1$. Πράγματι

  $$\det I_n = 1\cdot\det\ (I_n)_{11} + 0\cdot\det\ (I_n)_{21} - \cdots + (-1)^{n+1}0\cdot\det\ (I_n)_{n1}$$
  $$= \det\ (I_n)_{11}\ .$$

  Όμως $(I_n)_{11} = I_{n-1}$. Έτσι διαδοχικά έχουμε

  $$\det I_n = \det I_{n-1} = \cdots = \det[1] = 1\ .$$

  (Σημείωση: Η απόδειξη αυτή γίνεται πολύ πιο κομψή με τη χρήση της μαθηματικής επαγωγής.)

- Έστω A ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Τότε

  $$\det A = a_{11}\det A_{11} + 0\cdot\det A_{21} - \cdots + (-1)^{n+1}0\cdot\det A_{n1} = a_{11}\det A_{11}\ .$$

  Όμως A_{11} είναι άνω τριγωνικός πίνακας που τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου ταυτίζονται με αυτά του A από τη θέση 22 και έπειτα. Έτσι διαδοχικά βρίσκουμε ότι

  $$\det A = a_{11}\det A_{11} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\ .$$

  (Σημείωση: Η απόδειξη αυτή γίνεται πολύ πιο κομψή με τη χρήση της μαθηματικής επαγωγής.)

Αναφέρουμε κάποιες από τις ιδιότητες των οριζουσών που αποδεικνύονται εύκολα από τον ορισμό.

Πρόταση 1.7.4. *Τα επόμενα ισχύουν:*

1. $\det E_{i+a\cdot j}A) = \det A$
2. $\det E_{i\leftrightarrow j}A = -\det A$
3. $\det(E_{b\cdot i}A = b\det A$

Γνωρίζουμε λοιπόν με ποιόν τρόπο οι στοιχειώδεις πράξεις επηρεάζουν την ορίζουσα του πίνακα. Από την άλλη οι υπολογισμοί είναι πολύ ευκολότεροι όταν υπάρχουν πολλά μηδενικά σε έναν πίνακα. Έτσι για να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα πρώτα φέρνουμε τον αρχικό πίνακα σε κλιμακωτή μορφή γραμμών και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τις ιδιότητες 1.7.4.

Παράδειγμα 1.7.5. Ας υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1]{} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_2]{}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{2}\Gamma_3]{} A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας A_3 είναι άνω τριγωνικός. Παρατηρούμε ότι η $\det A_3$ είναι το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του πίνακα A_3. Επομένως,

$$\det A_3 = 2, \qquad \det A_2 = 2\ \det A_3 = 4,$$
$$\det A_1 = -\det A_2 = -4, \qquad \det A = \det A_1 = -4.$$

Ασκήσεις

1. **(*)** Να υπολογιστούν οι παρακάτω ορίζουσες:

$$\begin{vmatrix} 3+2i & 1+i \\ 1-i & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & i & 2 \\ -3+i & 3 & i \\ 7 & 2i & 5 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ -4 & 7 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. **(*)** Να υπολογίσετε τις παρακάτω ορίζουσες:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 9 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 8 \\ 3 & 9 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. **(*)** Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$ και $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ ο συζυγής πίνακας του A, όπου $\overline{a_{ij}}$ είναι ο συζυγής μιγαδικός αριθμός του a_{ij}. Να αποδείξετε ότι $\det \overline{A} = \overline{\det A}$.