

2η ομάδα ασκήσεων (1-11-2011)

1. Να δείξετε ότι:

$$\frac{d}{dt}\langle x^2 \rangle = \frac{1}{m} [\langle xp_x \rangle + \langle p_x x \rangle]$$

2. Ο τελεστής του Hamilton που αντιστοιχεί στην κίνηση ενός σωματιδίου σ' ένα μονοδιάστατο δυναμικό $V(x)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x), \quad \hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

Έστω $E_n^{(0)}$ και $\psi_n^{(0)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ είναι οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του \hat{H}_0 και

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \frac{\hat{p}}{m}$$

έναν νέο τελεστής του Hamilton, όπου λ μια παράμετρος. Ναδειχθεί ότι οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του \hat{H} είναι:

$$E_n = E_n^{(0)} - \frac{\lambda^2}{2m}, \quad \text{και} \quad \psi_n = \psi_n^{(0)} e^{-i\frac{\lambda^2}{2m}t}$$

3. Οι τελεστές \hat{A} και \hat{B} αντιστοιχούν στα παρατηρήσιμα φυσικά μεγέθη A και B . Οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις των \hat{A} και \hat{B} είναι αντίστοιχα $\alpha_1, \alpha_2, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ και $\beta_1, \beta_2, |\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle$. Οι ιδιοκαταστάσεις των \hat{A} και \hat{B} συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{5}(3|\varphi_1\rangle + 4|\varphi_2\rangle), \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{5}(4|\varphi_1\rangle - 3|\varphi_2\rangle)$$

α) Αν κατά τη μέτρηση του μεγέθους A πάρουμε ως αποτέλεσμα την τιμή α_1 , ποια είναι η κατάσταση του συστήματος αμέσως μετά τη μέτρηση;

β) Αν στη συνέχεια γίνει μια μέτρηση του μεγέθους B ποιες είναι οι δυνατές τιμές που θα πάρουμε και με ποια πιθανότητα;

γ) Αμέσως μετά τη μέτρηση του B μετράμε το μέγεθος A ξανά. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε ως αποτέλεσμα την τιμή α_1 ;