ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Άλγεβρας Μητρών (Πινάκων)

ΠΜ1. Ορισμοί και ορολογία

Οι **μήτρες ή πίνακες** αποτελούν ορθογώνιες διατάξεις αριθμών ή στοιχείων

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

όπου η σημειογραφία a_{ij} υποδηλώνει τη θέση του **στοιχείου** μέσα στη μήτρα και σημαίνει πάντα **«i-οστή γραμμή, j-οστή στήλη».** Δηλαδή ο πρώτος υποδείκτης υποδηλώνει γραμμή και ο δεύτερος στήλη. Στην ανάλυση που ακολουθεί – και όταν δεν είναι άμεσα εμφανές - υποθέτουμε ότι όλα τα στοιχεία των μητρών είναι πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Η μήτρα (ή εναλλακτικά ο πίνακας) A λέμε ότι είναι διαστάσεων ή τάξεως ή μεγέθους n επί k - και γράφουμε $n \times k$ - όταν έχει n γραμμές και k στήλες.

Τα στοιχεία μίας μήτρας μπορεί να συμβολίζονται για ευκολία και ως $(A)_{ij}$. Σε μία $n \times n$ μήτρα A τα στοιχεία $(A)_{ii}$ για $i = 1,...,n$ βρίσκονται στη διαγώνιο της μήτρας την οποία ονομάζουμε **κύρια διαγώνιο**. Για παράδειγμα στην παρακάτω 3×3 μήτρα τα στοιχεία σε έντονη γραφή βρίσκονται επί της κύριας διαγωνίου,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 5 \\ -1 & \mathbf{8} & -6 \\ 7 & 7 & \mathbf{3} \end{bmatrix}.$$

Συχνά θα δούμε μήτρες να γράφονται σε όρους των στηλών τους. Για παράδειγμα, η μήτρα $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}$ θα μπορούσε να γραφεί και ως

$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \end{bmatrix}$ όπου $x_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}$.

Μία μήτρα με ένα μόνο στοιχείο, δηλαδή μία 1×1 μήτρα, ονομάζεται και **μήτρα στοιχείο** και ουσιαστικά αντιστοιχεί σε έναν αριθμό. Όταν πολλαπλασιάζουμε μία μήτρα στοιχείο ή ένα βαθμωτό (αριθμό) με μία $n \times k$ μήτρα με τουλάχιστον μία διάσταση μεγαλύτερη του 1, τότε πολλαπλασιάζουμε όλα τα στοιχεία της μήτρας με τον αριθμό. Για παράδειγμα,

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ a & 5 & -c \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & 9\lambda \\ a\lambda & 5\lambda & -c\lambda \\ 0 & -2\lambda & 3\lambda \end{bmatrix}$$

$$z \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 3z \end{bmatrix}$$

$$8 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ a & b & c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 0 & 40 \\ 8a & 8b & 8c & 8d \end{bmatrix}$$

ΠΜ.1.1 Τετραγωνικές μήτρες

Μία μήτρα με ίσο αριθμό γραμμών και στηλών ονομάζεται τετραγωνική. Για παράδειγμα οι μήτρες $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & x & e \\ 4 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ είναι τετραγωνικές.

ΠΜ.1.2 Συμμετρική (αντισυμμετρική) μήτρα

Μία μήτρα με στοιχεία που ικανοποιούν $a_{ij} = a_{ji}$ για όλα τα i, j ονομάζεται συμμετρική. Για παράδειγμα δείχνουμε μία 2×2 συμμετρική μήτρα $\begin{bmatrix} a & 4 \\ 4 & b \end{bmatrix}$ και δύο 3×3 συμμετρικές μήτρες, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{bmatrix}$.

Σε αντίθεση, μία μήτρα με $a_{ij} = -a_{ji}$ για όλα τα i, j ονομάζεται αντισυμμετρική. Για παράδειγμα, οι μήτρες $\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 & -8 & 1 \\ 8 & 0 & f \\ -1 & -f & 0 \end{bmatrix}$ είναι αντισυμμετρικές.

Στις αντισυμμετρικές μήτρες τα στοιχεία που βρίσκονται συμμετρικά τις διαγωνίου είναι αντίθετα ενώ όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με το μηδέν αφού μόνο τότε ικανοποιείται η ισότητα $a_{ij} = -a_{ji}$ ($a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$).

ΠΜ.1.3 Μηδενικές μήτρες

Μία μήτρα με όλα της τα στοιχεία ίσα με το μηδέν ονομάζεται μηδενική. Για παράδειγμα οι μήτρες $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι μηδενικές. Συχνά μπορεί να παρατηρήσουμε υποδείκτες που υποδηλώνουν τη διάσταση της μηδενικής μήτρας όταν αυτή δεν είναι άμεσα κατανοητή, π.χ $\mathbf{0}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

ΠΜ.1.4 Διαγώνιες μήτρες

Μία τετραγωνική μήτρα με μηδενικά στοιχεία πλην αυτών της κύριας διαγωνίου ονομάζεται διαγώνια. Για παράδειγμα η $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$ είναι μία διαγώνια 4×4 μήτρα.

Μία διαγώνια μήτρα με όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου να ισούνται με τη μονάδα ονομάζεται **μοναδιαία μήτρα** και συμβολίζεται με I_n όπου ο υποδείκτης δηλώνει την τάξη της μήτρας. Για παράδειγμα, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Αν τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι όλα ίσα μεταξύ τους τότε η μήτρα ονομάζεται **βαθμωτή** αφού μπορεί να γραφεί ως ένα βαθμωτό επί τη μοναδιαία μήτρα. Για παράδειγμα $\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 I_3$.

ΠΜ.1.5 Τριγωνικές μήτρες

Μία τετραγωνική μήτρα με μηδενικά στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο ονομάζεται **τριγωνική κάτω**, π.χ $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ f & e & c \end{bmatrix}$, ενώ με μηδενικά στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο ονομάζεται **τριγωνική άνω**, π.χ $\begin{bmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$.

ΠΜ.1.6 Toeplitz μήτρα

Οι μήτρες Toeplitz είναι μήτρες οι οποίες έχουν σε κάθε διαγώνιο ίδια στοιχεία. Για παράδειγμα η $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & a & b & c \\ f & e & a & b \\ g & f & e & a \end{pmatrix}$. Επιπλέον οι συμμετρικές μήτρες Toeplitz έχουν την ιδιότητα της συμμετρίας, για παράδειγμα $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$.

Στην οικονομετρία απαντώνται συχνά τέτοιου είδους μήτρες. Για παράδειγμα η μήτρα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων μίας χρονοσειράς $\{u_t\}_1^n$ η οποία συμπυκνώνεται σε ένα διάνυσμα $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ δίνεται από την μήτρα

$$Var(u) = E(uu') - E(u)E(u)'$$

$$= \begin{pmatrix} Var(u_1) & Cov(u_1,u_2) & \cdots & Cov(u_1,u_n) \\ Cov(u_2,u_1) & Var(u_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Cov(u_{n-1},u_n) \\ Cov(u_n,u_1) & \cdots & Cov(u_n,u_{n-1}) & Var(u_n) \end{pmatrix}$$

όπου $Var(u_i) = E\left(u_i - E(u_i)\right)^2$ και $Cov(u_i,u_j) = E\left[\left(u_i - E(u_i)\right)\left(u_j - E(u_j)\right)\right]$. Η παραπάνω μήτρα είναι Toeplitz όταν προβούμε στην υπόθεση ότι η χρονοσειρά $\{u_t\}$ είναι στάσιμη, δηλαδή η συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης εξαρτάται μόνο από την (απόλυτη τιμή) χρονική απόσταση των στοιχείων της χρονοσειράς, $Cov(u_i,u_j) = f\left(|i-j|\right)$, ενώ ισχύει ότι $Cov(u_i,u_j) = Cov(u_j,u_i)$.

ΠΜ.1.7 Διανύσματα

Μία μήτρα που περιέχει μία μόνο στήλη είναι γνωστή και ως **διάνυσμα στήλη** ή αν περιέχει μόνο μία γραμμή είναι ένα **διάνυσμα γραμμή**. Συνήθως αναφέρουμε απλά τον όρο «διάνυσμα» αφού είναι γνωστό από τα συμφραζόμενα αν το διάνυσμα είναι στήλη ή γραμμή. Επιπλέον, συνηθίζεται τα στοιχεία ενός διανύσματος να έχουν τον ίδιο συμβολισμό με αυτόν του διανύσματος μόνο που καταγράφονται με βάση έναν υποδείκτη. Για παράδειγμα ένα 4×1 διάνυσμα y και ένα $1\times n$ διάνυσμα u γράφονται αναλυτικά ως,

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} & u_n \end{bmatrix}$$

Διανύσματα με όλα τους τα στοιχεία ίσα με τη μονάδα συμβολίζονται με $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

ΠΜ.1.8 Σύνθετες μήτρες

Συχνά στις οικονομετρικές εφαρμογές εμφανίζονται αλγεβρικές δυσκολίες όταν οι μήτρες είναι αρκετά μεγάλου μεγέθους. Στις περιπτώσεις αυτές, η αλγεβρική μελέτη διευκολύνεται σημαντικά αν διαμερισθούν οι μήτρες «κατάλληλα» σε μικρότερα τμήματα ή **υπο-μήτρες**. Έτσι μία μήτρα A ονομάζεται **σύνθετη** αν τα επιμέρους στοιχεία της είναι μήτρες μικρότερου μεγέθους από την A.

Για παράδειγμα η μήτρα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & 3 \\ 0 & b & 9 \end{pmatrix}$ μπορεί να διαμερισθεί ως εξής:

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ με $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & b \end{pmatrix}$, $A_{22} = \begin{pmatrix} 9 \end{pmatrix}$0.

Εναλλακτικά και ανάλογα με το ζητούμενο αποτέλεσμα, η μήτρα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & 3 \\ 0 & b & 9 \end{pmatrix}$ μπορεί να διαμερισθεί ως $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ με $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & b & 9 \end{pmatrix}$.

Προσοχή, η διαμέριση γίνεται έτσι ώστε οι υπο-μήτρες που βρίσκονται στην ίδια γραμμή να έχουν όλες τον ίδιο αριθμό γραμμών και οι υπο-μήτρες που βρίσκονται στην ίδια στήλη να έχουν τον ίδιο αριθμό στηλών.

ΠΜ.2 Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός

Οι πράξεις της πρόσθεσης και αφαίρεσης ορίζονται μόνο για μήτρες που έχουν ακριβώς τις ίδιες διαστάσεις και λειτουργούν μέσω πρόσθεσης και αφαίρεσης των αντίστοιχων στοιχείων τους. Σε κάθε άλλη περίπτωση οι μήτρες είναι ασυμβίβαστες ως προς την πρόσθεση ή την αφαίρεση. Για παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ w & 4 & 5 \\ 1 & -4 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ w+b & 6 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Δύο μήτρες A, B ίδιων διαστάσεων είναι ίσες μόνο όταν κάθε στοιχείο τους είναι ίσο ή όταν $A - B = \mathbf{0}$. Άρα δύο μήτρες διαφορετικών διαστάσεων δεν μπορεί να είναι ίσες.
Ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες,

Αντιμεταθετική: $A + B = B + A$

Προσεταιριστική: $(A + B) + C = A + (B + C)$

Ουδέτερου στοιχείου: $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$

Ο πολλαπλασιασμός μητρών είναι πιο πολύπλοκος. Για να μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε δύο μήτρες AB πρέπει ο αριθμός των στηλών της A να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών της B και η παραγόμενη μήτρα έχει αριθμό γραμμών ίσο με αυτόν της A και στηλών ίσο με αυτόν της B. Άρα αν η A είναι $n \times k$ και η B είναι $k \times m$ τότε $AB = C$ είναι $n \times m$. Η πράξη του πολλαπλασιασμού ορίζεται ως το εσωτερικό γινόμενο κάθε γραμμής της A με κάθε στήλη της B δηλαδή

$$\sum_{p=1}^{k} (A)_{ip} (B)_{pj} = (C)_{ij} \text{ για } i = 1, \ldots, n \text{ και } j = 1, \ldots, m$$

Για παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = x_1 y_2 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 = \sum_{i=1}^{4} x_i y_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(1)+(2)(6)+(3)(1) & (1)(7)+(2)(0)+(3)(-5) \\ (3)(1)+(2)(6)+(a)(1) & (3)(7)+(2)(0)+(a)(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -8 \\ 15+a & 21-5a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & g \\ h & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bh & ag+bk \\ ce+dh & cg+dk \end{bmatrix}$$

Σχηματικά,

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} \bullet & b_{1j} & \bullet \\ \bullet & \vdots & \bullet \\ \bullet & b_{kj} & \bullet \end{pmatrix}}^{B} = \overbrace{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj} & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}}^{AB}$$

Ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες,

Προσεταιριστική: $(AB)C = A(BC)$

Επιμεριστική: $(A+B)C = AC + BC$

$A(B+C) = AB + AC$

Προσοχή όμως γιατί **δεν ισχύει** πάντα η αντιμεταθετική ιδιότητα $AB = BA$. Μάλιστα εκτός «εξαιρέσεων» ισχύει ότι $AB \neq BA$ ενώ συχνά οι διαστάσεις των μητρών είναι τέτοιες που δεν επιτρέπουν πολλαπλασιασμό μίας μήτρας από αριστερά και από δεξιά. Γι’αυτό και κατά τον πολλαπλασιασμό μητρών (όταν είναι συμβιβαστός) αναφέρουμε τη φορά της πράξης π.χ «πολλαπλασιάζουμε από αριστερά τη μήτρα A με τη μήτρα B, δηλαδή BA» ή «πολλαπλασιάζουμε από δεξιά τη μήτρα A με τη μήτρα B, δηλαδή AB».

Οι τετραγωνικές μήτρες μπορούν να υψωθούν σε ακέραιες δυνάμεις ως

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ φορές}}$$

ενώ $A^0 = I$ και $A^1 = A$. **Προσοχή** διότι η δύναμη υπονοεί πολλαπλασιασμό και όχι ύψωση κάθε στοιχείου στον εκάστοτε εκθέτη. Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ τότε $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$ **και όχι** $A^2 \neq \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$.

ΠΜ.3 Ανάστροφη μήτρα

Η ανάστροφη μίας $n \times k$ μήτρας A συμβολίζεται με A' και είναι μία $k \times n$ μήτρα της οποίας οι γραμμές αντιστοιχούν στις στήλες της A. Για παράδειγμα αν $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ τότε $A' = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$.

Ισχύουν οι ιδιότητες, $(A')' = A$, $(A+B)' = A' + B'$, $(AB)' = B'A'$. Για **συμμετρικές μήτρες** ισχύει η ιδιότητα $A = A'$ ενώ για **αντισυμμετρικές** μήτρες ισχύει η ιδιότητα $A = -A'$. Σχετικά με τα δύο τελευταία είδη μητρών μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι αν A είναι τετραγωνική μήτρα τότε $A + A'$ είναι συμμετρική ενώ η $A - A'$ είναι αντισυμμετρική. Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ τότε

$$A + A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}$$

και

$$A-A'=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & b-c \\ -(b-c) & 0 \end{pmatrix}$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων y,x με διάσταση $n\times 1$ ορίζεται ως

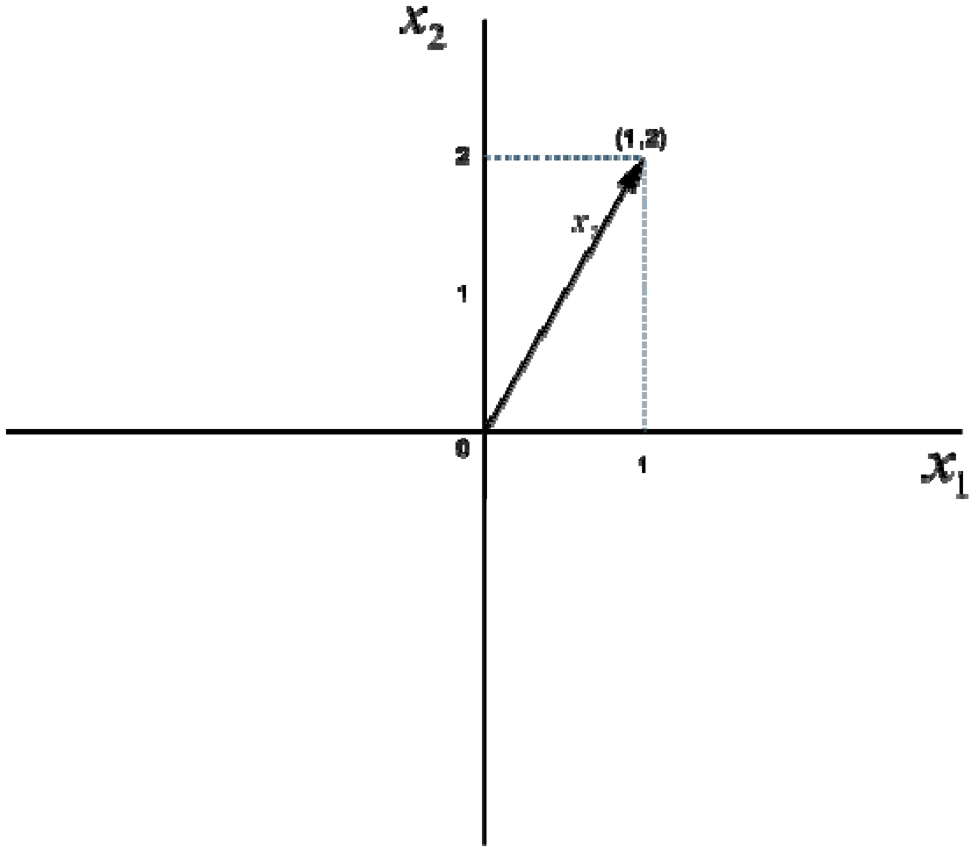
$$y'x = y_1x_1 + y_2x_2 + \ldots + y_nx_n = \sum_{i=1}^{n} y_ix_i \quad (\text{ή } x'y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\ )$$

ενώ το εξωτερικό τους γινόμενο δίνει μία $n\times n$ μήτρα

$$yx' = \begin{bmatrix} y_1x_1 & y_1x_2 & \cdots & y_1x_n \\ y_2x_1 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_nx_1 & y_nx_2 & \cdots & y_nx_n \end{bmatrix}$$

Όταν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι μηδέν, $x'y=0$, τότε λέμε ότι τα διανύσματα είναι **ορθογώνια** και γράφουμε $x\perp y$. Παρομοίως, όταν ο πολλαπλασιασμός δύο μητρών δώσει τη μηδενική μήτρα, $AB=\mathbf{0}$ λέμε ότι οι μήτρες είναι ορθογώνιες.

Το **Ευκλείδειο μέτρο ή μήκος ή νόρμα** ενός $n\times 1$ διανύσματος x συμβολίζεται ως $\|x\|_2$ και δίνεται από την απόλυτη τιμή της τετραγωνικής ρίζας του εσωτερικού του γινομένου, $\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}=\sqrt{x'x}$. Το Ευκλείδειο μέτρο αποτελεί έναν από τους βασικούς τρόπους υπολογισμού του «μεγέθους» ενός διανύσματος. Η λέξη «μέγεθος» γράφτηκε με εισαγωγικά αφού δεν έχουμε εισάγει την γεωμετρική θεώρηση των διανυσμάτων. Εν συντομία, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα διάνυσμα με πραγματικά στοιχεία «προδίδει» τις συντεταγμένες ενός σημείου στο γνωστό καρτεσιανό σύστημα αξόνων. Για παράδειγμα το 2x1 διάνυσμα $x=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ δίνεται οπτικά στο παρακάτω γράφημα με τη μορφή βέλους και το Ευκλείδειο μέτρο του ίσο με $\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ δίνει την απόσταση του σημείου $(1,2)$ από την αρχή των αξόνων $(0,0)$.



Το Ευκλείδειο μέτρο μπορεί να «οπτικοποιηθεί» και στη περίπτωση ενός διανύσματος 3×1 το οποίο παριστάνει τη θέση ενός σημείου στον τρισδιάστατο χώρο. Για παράδειγμα το Ευκλείδειο μέτρο του $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ είναι $\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$.

Το Ευκλείδειο μέτρο γενικεύεται σε $\|x\|_k = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^k \right)^{1/k}$ για θετικούς ακέραιους

$k \geq 1$ ενώ για $k = +\infty$ έχουμε το μέτρο $\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq n}(|x_i|)$. Για παράδειγμα αν

$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ τότε $\|x\|_1 = 6$, $\|x\|_2 = \sqrt{14}$, $\|x\|_{\infty} = 3$.

Όλες οι παραπάνω νόρμες αποτελούν διαφορετικούς τρόπους υπολογισμού του «μεγέθους» ενός διανύσματος.

ΠΜ.4 Ίχνος μήτρας

Το ίχνος μίας τετραγωνικής $n \times n$ μήτρας A δίνεται από το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου της και συμβολίζεται με $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Το ίχνος μήτρας έχει τις ακόλουθες ιδιότητες, $tr(AB) = tr(BA)$, $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$, $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$, $tr(A) = tr(A')$. Το ίχνος της μοναδιαίας μήτρας δίνεται από τη διάστασή της, $tr(I_n) = n$.

ΠΜ5. Ορίζουσα μήτρας

Η ορίζουσα ορίζεται μόνο για τετραγωνικές μήτρες και συμβολίζεται με $|A|$ ή $det(A)$. Για μήτρες 1×1 η ορίζουσα είναι απλώς $|A| = |a_{11}| = a_{11}$. Για 2×2 μήτρες η ορίζουσα δίνεται από τον τύπο $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Γενικά για $n \times n$ ισχύει ότι

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A(i \mid j))$$

ή

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(-1\right)^{i+j} |A(i \mid j)|$$

όπου $A(i \mid j)$ είναι η μήτρα που ορίζεται διαγράφοντας την i-οστή γραμμή και την j-οστή στήλη της A. Η $\det\left(A(i \mid j)\right)$ - $\left|A\left(i \mid j\right)\right|$ - ονομάζεται **ελάσσωνα ορίζουσα** του i, j στοιχείου ενώ ο όρος $\left(-1\right)^{i+j} |A(i \mid j)|$ ονομάζεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα** του i, j στοιχείου.

Ο παραπάνω τύπος ονομάζεται και **ανάπτυγμα** της $|A|$ ως προς την i-οστή γραμμή. Διαπιστώνουμε ότι δεν έχει σημασία ποια γραμμή θα επιλέξουμε αρκεί να προσέξουμε τα πρόσημα $\left(-1\right)^{i+j}$ (επίσης μπορούμε να αναπτύξουμε ως προς τις στήλες). Για παράδειγμα, η ορίζουσα της $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ δίνεται από,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = +\left(1\right)\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - \left(-2\right)\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \left(-4\right)\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \left(12 - 45\right) + 2\left(-3 - 9\right) - 4\left(-5 - 4\right) = -33 - 24 + 36 = -21$$

Εναλλακτικά το ανάπτυγμα ως προς τη δεύτερη ή την τρίτη γραμμή θα δώσει

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -\left(-1\right)\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \left(4\right)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \left(9\right)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -21$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = +\left(1\right)\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - (5)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} + \left(3\right)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -21$$

Συνήθως επιλέγουμε τη γραμμή που έχει τα περισσότερα μηδενικά στοιχεία αφού αυτό διευκολύνει σημαντικά τις πράξεις μας. Για παράδειγμα αν $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -4\\ 5 & 0 & 0\\ 1 & 6 & 7\end{bmatrix}$ τότε επιλέγουμε το ανάπτυγμα ως προς την δεύτερη γραμμή και

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 3 & -4\\ 5 & 0 & 0\\ 1 & 6 & 7\end{vmatrix}=-(5)\begin{vmatrix}3 & -4\\ 6 & 7\end{vmatrix}+(0)\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}-(0)\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}=-5(21+24)=-225$$

Μερικές ιδιότητες της ορίζουσας είναι, $|A|=|A'|$, $|\lambda A|=\lambda^n|A|$, $|AB|=|A||B|$.

Είναι εμφανές ότι η ορίζουσα μίας διαγώνιας μήτρας δίνεται από

$$\begin{vmatrix}a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & a_n\end{vmatrix}=a_1a_2...a_n=\prod_{i=1}^{n}a_n$$

ενώ για σύνθετες μήτρες,

$$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=\begin{cases}|A-BD^{-1}C||D| & \text{όταν η } D \text{ είναι αντιστρέψιμη}\\ |D-CA^{-1}B||A| & \text{όταν η } A \text{ είναι αντιστρέψιμη}\end{cases}$$

Η έννοια **της αντιστρέψιμης μήτρας** αναλύεται αμέσως παρακάτω.

ΠΜ.6 Αντίστροφη μήτρα

Η αντίστροφη μήτρα μίας τετραγωνικής $n \times n$ μήτρας A συμβολίζεται με A^{-1} και όταν υπάρχει ικανοποιεί τη σχέση $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Το i,j στοιχείο της αντίστροφης μήτρας A^{-1} δίνεται από

$$\left(A^{-1}\right)_{ij} = \frac{\left(-1\right)^{i+j} \det\left(A_{ji}\right)}{\det\left(A\right)}$$

Είναι εμφανές ότι η αντίστροφη μήτρα υπάρχει όταν $|A| \neq 0$. Επίσης, όταν υπάρχει, η αντίστροφη μήτρα είναι μοναδική.

Για μία 2×2 μήτρα $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ με μη-μηδενική ορίζουσα $\det\left(A\right) = ad - cb \neq 0$, η αντίστροφη δίνεται από τον τύπο,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-cb} & \dfrac{-b}{ad-cb} \\ \dfrac{-c}{ad-cb} & \dfrac{a}{ad-cb} \end{pmatrix}$$

Π.χ αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ τότε $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\dfrac{1}{3} \\ -1 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$

Γενικά για μία $n \times n$ μήτρα A δημιουργούμε τη **συμπαράγουσα** μήτρα (cofactor matrix) C η οποία αποτελείται από τα αλγεβρικά συμπληρώματα όλων των στοιχείων της A και στην συνέχεια την αναστρέφουμε ώστε να φτιάξουμε την **προσαρτημένη** μήτρα (adjoint matrix) $Adj\left(A\right) = C'$. Η αντίστροφη της A δίνεται από την $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\left(A\right)$.

Για παράδειγμα, η αντίστροφη της 3x3 μήτρας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ δίνεται από,

$$\text{Συμπαράγουσα: } C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -35 & 24 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 15 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\text{Προσαρτημένη (ανάστροφη συμπαράγουσας): } Adj(A) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -35 & -5 & 15 \\ 24 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ορίζουσα: } |A| = 20$$

άρα

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -35 & -5 & 15 \\ 24 & 2 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 0 \\ -7/4 & -1/4 & 3/4 \\ 3/2 & 1/10 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Βεβαιωθείτε ότι $A^{-1}A = AA^{-1} = I_3$.

Μερικές ιδιότητες της αντίστροφης μήτρας και της αντιστροφής μητρών είναι οι εξής,

$$\left(A^{-1}\right)' = \left(A'\right)^{-1}$$
$$\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$\left(A+B\right)^{-1} = A^{-1}\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1} B^{-1}$$
$$\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$$

όπου όλες οι αντίστροφες μήτρες πρέπει να υπάρχουν. Οι μήτρες των οποίων υπάρχει η αντίστροφη ονομάζονται **αντιστρέψιμες** ή **μη-ιδιάζουσες,** ενώ μήτρες που δεν έχουν αντίστροφη ονομάζονται **μη-αντιστρέψιμες** ή **ιδιάζουσες**.

Είναι εμφανές, ότι η αντίστροφη μίας διαγώνιας μήτρας δίνεται από

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$$

Για την «κατάλληλα» **διαμερισμένη** μήτρα $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ με τις A_{11} και A_{22} αντιστρέψιμες ισχύουν οι παρακάτω τύποι,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}F_2A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}F_2 \\ -F_2A_{21}A_{11}^{-1} & F_2 \end{pmatrix}$$ όπου $F_2 = \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1}$ όταν υπάρχει η αντίστροφη της $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$

ή

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} F_1 & -F_1A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}F_1 & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}F_1A_{12}A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$ όπου $F_1 = \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1}$ όταν υπάρχει η αντίστροφη της $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$

Οι παραπάνω τύποι «μειώνονται» σημαντικά όταν η A_{12} και/ή η A_{21} είναι μηδενικές. Για παράδειγμα, η αντίστροφη της $B=\begin{pmatrix} B_{11} & \mathbf{0} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ δίνεται από $B^{-1}=\begin{pmatrix} B_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ -B_{22\,2}^{-1}B_{21}B_{11}^{-1} & B_{22}^{-1} \end{pmatrix}$.

Επιπλέον, αν η $n\times n$ μήτρα A είναι αντιστρέψιμη με u και v να είναι $n\times 1$ διανύσματα τότε $\left(A+uv'\right)^{-1}=A^{-1}+\dfrac{A^{-1}uv'A^{-1}}{1+v'A^{-1}u}$.

Τέλος, ακόμα και όταν δεν υπάρχει η αντίστροφη μήτρα ορίζεται η **Moore-Penrose γενικευμένη αντίστροφη** A^{+} η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες $AA^{+}A=A$, $A^{+}AA^{+}=A^{+}$ ενώ οι $A^{+}AA^{+}$ και $A^{+}AA^{+}$ είναι συμμετρικές. Η Moore-Penrose γενικευμένη αντίστροφη A^{+} ορίζεται και είναι μοναδική για κάθε μήτρα.

ΠΜ.7 Γραμμική εξάρτηση και βαθμός μήτρας

Ένα σύνολο διανυσμάτων $x_1,..,x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο όταν $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=\mathbf{0}$ υπονοεί ότι όλοι οι συντελεστές λ_i είναι μηδέν. Δηλαδή δεν υπάρχουν μη-μηδενικά λ_i τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=\mathbf{0}$. Σε αντίθετη περίπτωση τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Π.χ τα διανύσματα x_1,x_2,x_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα όταν $x_1-2x_2+5x_3=0$.

Έστω ότι A είναι μία $n\times k$ μήτρα. Ο στηλοβαθμός της μήτρας είναι ο μέγιστος αριθμός των γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών της (και μπορεί να είναι το πολύ k) ενώ ο γραμμοβαθμός της μήτρας είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών (και μπορεί να είναι το πολύ ίσος με n). Μπορούμε να δείξουμε ότι ο στηλοβαθμός είναι ίσος με το γραμμοβαθμό άρα μιλάμε μόνο για το βαθμό της μήτρας ο οποίος συμβολίζεται με $r\left(A\right)$ και ικανοποιεί

$r(A) \leq \min\{n,k\}$. Όταν $r(A) = \min\{n,k\}$ τότε η μήτρα A είναι **πλήρους βαθμού**. Ισχύει ότι $r(A) = r(A') = r(A'A) = r(AA')$ ενώ μία τετραγωνική $n \times n$ μήτρα με $r(A) = n$ ικανοποιεί $\det(A) \neq 0$ και το αντίστροφο. Άρα αν η $n \times k$ μήτρα X με $n > k$ δεν είναι πλήρους βαθμού, δηλαδή αν $r(X) < k$, τότε και $r(X'X) < k$ άρα $\det(X'X) = 0$ και η $X'X$ είναι μη-αντιστρέψιμη.

Ο βαθμός αθροίσματος μητρών ικανοποιεί την $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$, ο βαθμός της διαφοράς $r(A-B) \geq |r(A) - r(B)|$, ενώ ο βαθμός του γινομένου δύο μητρών $r(AB) = \min\{r(A), r(B)\}$.

Αν μία $n \times n$ μήτρα A έχει βαθμό $r(A) < n$ τότε υπάρχουν δύο $n \times m$ μήτρες B,C με βαθμό $r(B) = r(C) = m$ τέτοιες ώστε $A = BC'$.

ΠΜ.8 Ταυτοδύναμες μήτρες

Μία μήτρα M με την ιδιότητα $MM = M^2 = M$ ονομάζεται ταυτοδύναμη ή εκθετικά αναλλοίωτη. Μία συμμετρική ταυτοδύναμη μήτρα έχει την επιπλέον ιδιότητα $MM' = M'M = M$.

Για παράδειγμα έστω ότι η μήτρα $M = \left(I_n - X(X'X)^{-1}X'\right)$ όπου X είναι μία $n \times k$ μήτρα τέτοια ώστε η $(X'X)^{-1}$ υπάρχει. Η μήτρα M είναι ταυτοδύναμη αφού

$$\begin{aligned}
MM &= \left(I_n - X(X'X)^{-1}X'\right)\left(I_n - X(X'X)^{-1}X'\right) \\
&= I_nI_n - 2X(X'X)^{-1}X' + X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X' \\
&= I_n - 2X(X'X)^{-1}X' + X(X'X)^{-1}X' \\
&= I_n - X(X'X)^{-1}X' \\
&= M
\end{aligned}$$

Παρομοίως μία μήτρα της μορφής $H = X(X'X)^{-1}X'$ είναι ταυτοδύναμη αφού

$$HH = X\left(X'X\right)^{-1}X'X\left(X'X\right)^{-1}X' = H$$

Τέλος μία ακόμη ταυτοδύναμη μήτρα που θα συναντήσουμε είναι η $N = I_n - \frac{1}{n}\mathbf{ii}'$ ή $N = I_n - \mathbf{i}\left(\mathbf{i}'\mathbf{i}\right)^{-1}\mathbf{i}'$. Παρατηρείστε ότι η συγκεκριμένη μήτρα με στοιχεία επί της διαγωνίου ίσα με $1-\frac{1}{n}$ και εκτός διαγωνίου ίσα με $-\frac{1}{n}$ αν πολλαπλασιαστεί με ένα διάνυσμα $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ τότε «αφαιρεί» από κάθε στοιχείο του διανύσματος τον αριθμητικό μέσο $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ δηλαδή $Ny = \begin{bmatrix} y_1 - \overline{y} \\ y_2 - \overline{y} \\ \vdots \\ y_n - \overline{y} \end{bmatrix}$.

Μία συμμετρική και ταυτοδύναμη μήτρα έχει βαθμό ίσο με το ίχνος της. Για παράδειγμα η $n \times n$ μήτρα $M = \left(I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)$ έχει βαθμό $r\left(M\right) = n-k$ αφού

$$\begin{aligned} tr\left(M\right) &= tr\left(I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right) \\ &= tr\left(I_n\right) - tr\left(X\left(X'X\right)^{-1}X'\right) \\ &= tr\left(I_n\right) - tr\left(\left(X'X\right)^{-1}X'X\right) \\ &= tr\left(I_n\right) - tr\left(I_k\right) \\ &= n-k \end{aligned}$$

Η μοναδική συμμετρική και ταυτοδύναμη μήτρα πλήρους βαθμού είναι η **μοναδιαία μήτρα** (όλες οι συμμετρικές και ταυτοδύναμες μήτρες εκτός της μοναδιαίας είναι ιδιάζουσες).

ΠΜ.9 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Για μία $n \times n$ τετραγωνική μήτρα A η επίλυση της παρακάτω εξίσωσης που ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση (**είναι μία εξίσωση n βαθμού**)**

$$|A - \lambda I| = 0$$

αποδίδει το πολύ n ρίζες οι οποίες συμβολίζονται με $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ και ονομάζονται **ιδιοτιμές ή χαρακτηριστικές τιμές ή χαρακτηριστικές ρίζες** της μήτρας A. Οι ρίζες μπορεί να είναι πραγματικές ή μιγαδικές και επίσης μπορεί να έχουμε πολλαπλές (μη-μοναδικές) ιδιοτιμές αφού μπορεί $\lambda_i = \lambda_j$ για κάποια i, j.

Για παράδειγμα οι ιδιοτιμές της μήτρας $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$ είναι μοναδικές αφού $\lambda_1 = a, \lambda_2 = \beta$ αφού

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 \\ 1 & \beta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a-\lambda)(\beta - \lambda) = 0$$

ενώ για την $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ είναι μοναδικές και μιγαδικές αφού η λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $(2-\lambda)(1-\lambda) + 24 = \lambda^2 - 3\lambda + 26 = 0$ δίνει $\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{95}$ - όπου $i = \sqrt{-1}$.

Για κάθε μία **ιδιοτιμή** υπάρχει ένα μη-μηδενικό - και πιθανόν μιγαδικό - διάνυσμα v_i που ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα ή χαρακτηριστικό διάνυσμα** τέτοιο ώστε $(A - \lambda_i I_n) v_i = 0$ ή αλλιώς $A v_i = \lambda_i v_i$.

Για παράδειγμα η μη-ιδιάζουσα μήτρα $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$ έχει

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}$$

$$Av_2 = \lambda_2 v_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix}$$

Λύνοντας το πρώτο σύστημα εξισώσεων για να υπολογίσουμε τα στοιχεία του v_1 καταλήγουμε ότι $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{matrix} av_{11} = av_{11} \\ v_{11} + \beta v_{12} = av_{12} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} v_{11} = v_{11} \\ v_{12} = \dfrac{v_{11}}{a-\beta} \end{matrix} \right\}$.

Λύνοντας το δεύτερο σύστημα εξισώσεων για να υπολογίσουμε τα στοιχεία του v_2 καταλήγουμε ότι $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{matrix} av_{21} = \beta v_{21} \\ v_{21} + \beta v_{22} = \beta v_{22} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} v_{21} = 0 \\ v_{22} = v_{22} \end{matrix} \right\}$.

Βλέπουμε ότι δεν υπάρχει μία μοναδική λύση και θα χρειαστεί να βασιστούμε σε υποθέσεις (τυποποιήσεις) για ένα εκ των δύο στοιχείων σε κάθε διάνυσμα. Ορισμένα υπολογιστικά προγράμματα θέτουν $v_{11} = 1$ άρα $v_{12} = \dfrac{1}{a-\beta}$ και αντίστοιχα $v_{22} = 1$ και $v_{21} = 0$.

Στην οικονομετρική πρακτική συνηθίζεται να επιβάλουμε μοναδιαίο μήκος στα ιδιοδιανύσματα δηλαδή τα τυποποιούμε έτσι ώστε $v_i' v_i = 1$. Με αυτή την επιπλέον εξίσωση - $v_{11}^2 + v_{12}^2 = 1$ και $v_{21}^2 + v_{22}^2 = 1$ - καταλήγουμε στα ιδιοδιανύσματα $v_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{a-\beta}{\sqrt{(a-\beta)^2+1}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{(a-\beta)^2+1}} \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Στην περίπτωση που η μήτρα A είναι **συμμετρική** ισχύει επιπλέον ότι $v_i' v_j = 0$ άρα τοποθετώντας τα διανύσματα ως στήλες σε μία μήτρα $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ έχουμε ότι $V'V = I$ και $V^{-1} = V'$.

Επιπλέον τοποθετώντας τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο μίας μήτρας

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

έχουμε ότι $AV = V\Lambda$. Οπότε για συμμετρικές μήτρες $AV = V\Lambda \Leftrightarrow AVV' = V\Lambda V' \Leftrightarrow A = V\Lambda V'$.

Ο διαχωρισμός $A = V\Lambda V'$ ονομάζεται **φασματικός διαχωρισμός (spectral decomposition)** της συμμετρικής μήτρας A. Επιπλέον γράφοντας $B = V\Lambda^{1/2}$ έχουμε $A = BB'$.

Η **διαγωνοποίηση** της συμμετρικής μήτρας A δίνεται από $V'AV = \Lambda$.

Μία συμμετρική $n \times n$ μήτρα έχει $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ιδιοτιμές οι οποίες είναι πραγματικές και μοναδικές.

Η ορίζουσα μίας $n \times n$ τετραγωνικής μήτρας A δίνεται από το γινόμενο των ιδιοτιμών της $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ ενώ το ίχνος είναι ίσο με το άθροισμα των ιδιοτιμών $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Τέλος αν $A^k = \prod_{i=1}^{k} A = A \times A \times \dots \times A$ τότε $\lim_{k \to +\infty} A^k = \mathbf{0}_{n \times n}$ όταν όλες οι ιδιοτιμές βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή όταν $|\lambda_i| < 1 \ \forall i$.

ΠΜ.10 Βαθμός μήτρας (ξανά)

Οι εύρεση των ιδιοτιμών μπορεί να μας βοηθήσει εξαιρετικά στην εύρεση του βαθμού οποιασδήποτε $n \times k$ μήτρας A. Αναλυτικά, ο βαθμός μίας συμμετρικής μήτρας A δίνεται από το βαθμό της μήτρας ιδιοτιμών της δηλαδή $r(A) = r(\Lambda)$. Επειδή η Λ είναι διαγώνια, ο βαθμός της είναι ίσος με τον αριθμό των μη-μηδενικών στοιχείων της επί της διαγωνίου (δηλαδή τον αριθμό των μη-μηδενικών ιδιοτιμών). Επιπλέον, επειδή για οποιαδήποτε $n \times k$ μήτρα A, η μήτρα $A'A$ είναι συμμετρική με $r(A) = r(A'A)$, συνεπάγεται ότι ο βαθμός $r(A)$ της A είναι ίσος με τις μη-μηδενικές ιδιοτιμές της μήτρας $A'A$.

ΠΜ.11 Τετραγωνικές μορφές, θετικά ορισμένες μήτρες και σύγκριση μητρών

Εάν A είναι μία $n \times n$ μήτρα και $x \neq \mathbf{0}$ είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα τότε η έκφραση $x'Ax$ είναι γνωστή ως τετραγωνική μορφή. Συχνά είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε αν η τιμή $x'Ax$ είναι θετική, μη-αρνητική, αρνητική ή μη-θετική ασχέτως των τιμών των στοιχείων του $x \neq \mathbf{0}$.

*Όταν $x'Ax > 0$ για κάθε $x \neq \mathbf{0}$ τότε η μήτρα A λέγεται **θετικά ορισμένη**, ΘΟ.*
*Όταν $x'Ax \geq 0$ για κάθε $x \neq \mathbf{0}$ τότε η μήτρα A λέγεται **θετικά ημιορισμένη**, ΘΗΟ.*
*Όταν $x'Ax < 0$ για κάθε $x \neq 0$ τότε η μήτρα A λέγεται **αρνητικά ορισμένη**, ΑΟ.*
*Όταν $x'Ax \leq 0$ για κάθε $x \neq 0$ τότε η μήτρα A λέγεται **αρνητικά ημιορισμένη**, ΑΗΟ.*

Τα στοιχεία που βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο μίας ΘΟ μήτρας είναι **όλα** θετικά ενώ σε μία ΘΗΟ μήτρας είναι **όλα** μη-αρνητικά. Αντίστοιχα σε ΑΟ και ΑΗΟ μήτρες τα στοιχεία επί της διαγωνίου είναι είτε όλα αρνητικά είτε όλα μη-θετικά.

- **Συμμετρικές ΘΟ μήτρες έχουν μοναδικές, πραγματικές και θετικές ιδιοτιμές**
- Για οποιαδήποτε X μήτρα $n \times k$, η $X'X$ είναι ΘΗΟ ενώ είναι ΘΟ όταν $r(X) = k$, Επίσης, η XX' είναι ΘΗΟ και είναι ΘΟ όταν $r(X) = n$.
- Αν η A είναι μία ΘΟ $n \times n$ μήτρα τότε $r(A) = n$, $|A| \neq 0$, η A^{-1} υπάρχει και είναι ΘΟ.
- Αν $A = B + C$ με την B ΘΟ και την C ΘΗΟ τότε η A είναι ΘΟ ενώ η $B^{-1} - A^{-1}$ υπάρχει και είναι ΘΟ.

Στην οικονομετρία συχνά χρειάζεται να «συγκρίνουμε» δύο μήτρες, δηλαδή να αποφανθούμε αν η μήτρα A είναι «μεγαλύτερη» της B. Αρχικά οι μήτρες θα πρέπει να έχουν την ίδια διάσταση. Τότε βασιζόμαστε στην ποσότητα $x'Ax - x'Bx = x'(A-B)x$ για $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ και στο κατά πόσο αυτή είναι θετική, μη-αρνητική κτλ για να συγκρίνουμε τις μήτρες. Για παράδειγμα, όταν $A - B$ είναι ΘΟ μήτρα γράφουμε $A - B > 0$ ή $A > B$ και θεωρούμε την A μεγαλύτερη από την B.

Τέλος να σημειώσουμε την ιδιότητα $A > B \Rightarrow B^{-1} > A^{-1}$.

ΠΜ.12 Διαφορικός λογισμός μητρών (δεν έχει ολοκληρωθεί)

Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε σύντομα μερικούς κανόνες της παραγώγισης γραμμικών $a'x$ και τετραγωνικών μορφών $x'Ax$ ως προς το $n \times 1$ διάνυσμα x όπου a είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα ενώ A μία τετραγωνική $n \times n$ μήτρα. Η γραμμική μορφή $a'x$ είναι μία γραμμική πολυμεταβλητή συνάρτηση $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n = a'x$ ενώ η μορφή $x'Ax$ είναι μία πολυμεταβλητή πολυωνυμική συνάρτηση $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ με μεγαλύτερη τάξη ίση με 2. Για παράδειγμα,

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = a_{11}x_1^2 + a_{21}x_2x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x'Ax$$

Τέλος, αν A είναι μία $m \times n$ μήτρα τότε Ax συμβολίζει ένα $m-$διάστατο σύστημα πολυμεταβλητών συναρτήσεων.

Ισχύουν οι παρακάτω κανόνες,

$$\frac{\partial a'x}{\partial x} = \frac{\partial x'a}{\partial x} = a$$

$$\frac{\partial Ax}{\partial x} = A' \ , \ \frac{\partial Ax}{\partial x'} = A$$

$$\frac{\partial x'Ax}{\partial x} = Ax + A'x$$

$$\frac{\partial^2 x'Ax}{\partial x \partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'}\left(Ax + A'x\right) = A + A'$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (δεν έχει ολοκληρωθεί)

1. Προβείτε στις ακόλουθες πράξεις (όπου $\pm$ σημαίνει να προβείτε σε πρόσθεση και αφαίρεση)

[

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 3 & y \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x & 10 \\ y & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 8 & 9 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 0 & -7 & 8 \\ 2 & 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad a\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Αν $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ βρείτε την A' και υπολογίστε τις $A'A$ και AA'. Είναι συμμετρικές;

Αν βρείτε την και υπολογίστε τις και . Είναι συμμετρικές;

Έστω

2. μέτρα.

3. Υπολογίστε τις ορίζουσες,

(α) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 6 & 7 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

(β) $\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, $\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$

(γ) της $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. Βρείτε (αν υπάρχει) την αντίστροφη μήτρα των

(α) $A=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 7 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0.5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 6\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(β) $\Omega=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{pmatrix}$, $\Omega=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2^2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3^2\end{pmatrix}$ $\Omega=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2\end{pmatrix}$

(γ) για ποιές τιμές του a υπάρχει η αντίστροφη μήτρα της $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ a & 3 & a\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

Βρείτε την αντίστροφη A^{-1}.

#. Ιδιοτιμές

#. Βαθμός

#. σύγκριση,

#. Έστω η ταυτοδύναμη μήτρα $M_X = I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'$ όπου X είναι $n\times k$ μήτρα βαθμού k. Υπολογίστε το ίχνος της.

Απάντηση.

Με βάση τις ιδιότητες $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$ και $tr(AB)=tr(BA)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
tr(M_X) &= tr\left(I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)\\
&= tr(I_n) - tr\left(X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)\\
&= tr(I_n) - tr\left(\left(X'X\right)^{-1}X'X\right)\\
&= tr(I_n) - tr(I_k)\\
&= n-k
\end{aligned}$$

#. Έστω ότι $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ είναι ένα $n \times 1$ τυχαίο διάνυσμα. Η διακύμανση του είναι μία μήτρα η οποία ονομάζεται (ορθότερα) μήτρα διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων αφού τα στοιχεία της διαγωνίου της μήτρας αντιστοιχούν στις διακυμάνσεις των u_i , $i = 1, 2, ..., n$ ενώ τα στοιχεία εκτός της διαγωνίου αντιστοιχούν στις συνδιακυμάνσεις $Cov\left(u_i, u_j\right)$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., n$. Έχουμε ότι

$$Var(u) = E(uu') - E(u)E(u)'$$

$$= E\left[\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix} E(u_1) \\ \vdots \\ E(u_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E(u_1) & \cdots & E(u_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E(u_1^2) & E(u_1u_2) & \cdots & E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2^2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & E(u_{n-1}u_n) \\ E(u_nu_1) & \cdots & E(u_nu_{n-1}) & E(u_n^2) \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} E(u_1)^2 & E(u_1)E(u_2) & \cdots & E(u_1)E(u_n) \\ E(u_2)E(u_1) & E(u_2)^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & E(u_{n-1})E(u_n) \\ E(u_n)E(u_1) & \cdots & E(u_n)E(u_{n-1}) & E(u_n)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E(u_1^2) - E(u_1)^2 & E(u_1u_2) - E(u_1)E(u_2) & \cdots & \\ \vdots & & & \\ & & \ddots & \\ & & & E(u_n^2) - E(u_n)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Var(u_1) & Cov(u_1,u_2) & \cdots & Cov(u_1,u_n) \\ Cov(u_2,u_1) & Var(u_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & Cov(u_{n-1},u_n) \\ Cov(u_n,u_1) & \cdots & Cov(u_n,u_{n-1}) & Var(u_n) \end{pmatrix}$$