ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Στατιστικής

ΠΣ.1 Τυχαίες μεταβλητές

Σε ένα εισαγωγικό μάθημα Οικονομετρίας θα συναντήσουμε τυχαίες μεταβλητές οι οποίες θα είναι είτε διακριτές είτε συνεχείς, με τις διακριτές να λαμβάνουν αριθμήσιμο πλήθος τιμών ή (το πολύ) μετρήσιμα άπειρες τιμές, ενώ οι συνεχείς μπορεί να λαμβάνουν άπειρες τιμές μέσα σε κάποιο κλειστό ή ανοιχτό διάστημα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών ή στο διάστημα $\left(-\infty,+\infty\right)$. Παρά το ότι θα εργαστούμε κυρίως με συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, μία σύντομη συζήτηση για τις διακριτές θα μας εισάγει στις απαραίτητες στατιστικές έννοιες.

Μία τυχαία μεταβλητή, έστω X, λαμβάνει τιμές με βάση κάποια συνάρτηση που καθορίζει την πιθανότητα εμφάνισης κάθε τιμής (αποτελέσματος) ή την πιθανότητα η μεταβλητή να λαμβάνει τιμές σε κάποιο συγκεκριμένο διάστημα και υπονοεί την ύπαρξη μίας κατανομής. Μία διακριτή τυχαία μεταβλητή X με πιθανές τιμές $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ακολουθεί κάποια κατανομή που καθορίζεται από την πιθανότητα η $X = x_i$ η οποία συμβολίζεται ως $p(x_i)$ ή $P(X = x_i)$ και **ικανοποιεί** τις συνθήκες $0 \le p(x_i) \le 1$ και $\sum_i p(x_i) = 1$. Η συνάρτηση $p(x_i)$ ονομάζεται και **συνάρτηση μάζας πιθανότητας** (*probability mass function*) ή διακριτή **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας**.

Παράδειγμα. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που αντιστοιχεί «*στο αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού*». Το σύνολο των πιθανών τιμών της X είναι το $\left\{1,2,3,4,5,6\right\}$. Δηλαδή η X μπορεί να λάβει τις τιμές $x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_6 = 6$. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις πιθανές τιμές της X και τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής

	x_i	$p(x_i)$
i=1	1	1/6
i=2	2	1/6
i=3	3	1/6
i=4	4	1/6
i=5	5	1/6
i=6	6	1/6

Είναι εμφανές ότι η $0 \le p(x_i) \le 1$ ικανοποιείται και ότι $\sum_{i=1}^{6} p(x_i) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{6} = 1$.

Σε αντίθεση, οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, έστω η X, μπορούν να λάβουν ένα μη-μετρήσιμο αριθμό τιμών x. Συνήθως, για τις ανάγκες της οικονομετρίας, οι τιμές ορίζονται σε κάποιο κλειστό ή ανοιχτό διάστημα της γραμμής των πραγματικών αριθμών, π.χ $x \in [a,b]$ ή $x \in (-\infty, +\infty)$. Ο τρόπος που κατανέμεται η μάζα πιθανότητας σε διαστήματα των προαναφερθέντων τιμών χαρακτηρίζεται από τη **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, σ.π.π**, *(probability density function*) $f(x) \ge 0$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ **και έχει την ιδιότητα**

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = P\left(a \le X \le b\right) = P\left(a < X < b\right)$$

Η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής, α.σ.κ**, (*cumulative distribution function*) μίας τυχαίας μεταβλητής συμβολίζεται συνήθως ως $F(x)$ και ορίζεται ως

$$F(x) = P\left(X \le x\right) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$$

Η $F(x)$ είναι μία αθροιστική συνάρτηση κατανομής αν και μόνο αν

(α) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

(β) η $F(x)$ είναι αύξουσα ως προς x

(γ) η $F(x)$ είναι συνεχής από δεξιά.

Για συνεχείς κατανομές ισχύει ότι $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ σε κάθε σημείο που η $F\left(x\right)$ είναι συνεχής άρα

$$P\left(a \leq X \leq b\right) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Παράδειγμα. Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι κατανέμεται κανονικά (σύμφωνα με την κανονική κατανομή, *normally distributed*) όταν λαμβάνει τιμές στο διάστημα $x \in (-\infty, +\infty)$ και η σ.π.π δίνεται από την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

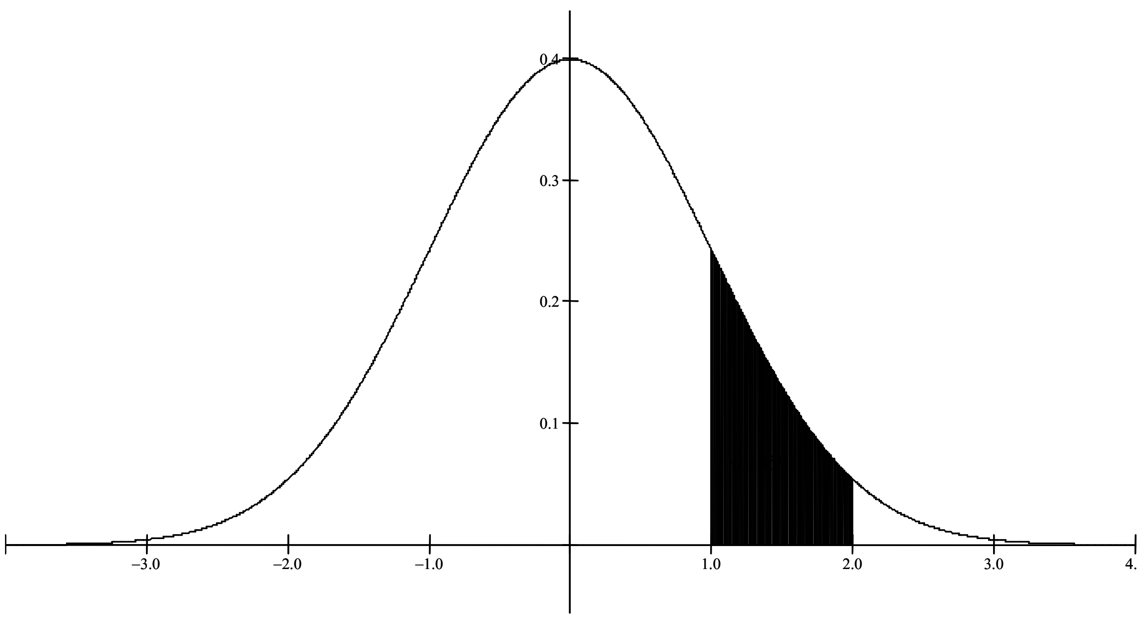
όπου μ και $\sigma^2 > 0$ είναι παράμετροι της κατανομής οι οποίες θα εξηγηθούν σύντομα (η παράμετρος μ αντιστοιχεί στον μέσο της κατανομής ή αλλιώς στην αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής X και η σ^2 στη αντιστοιχεί στην διακύμανση). Άρα, σύμφωνα με τα παραπάνω, η α.σ.κ δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$P\left(X \leq x\right) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} dz \qquad (\Pi.1)$$

Δυστυχώς το ολοκλήρωμα (Π.1) δεν έχει αναλυτική λύση άρα δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αναλυτικά τη συναρτησιακή μορφή $F(x)$ της α.σ.κ της κανονικής κατανομής. Αν ερωτούμασταν ποια η πιθανότητα η X να βρίσκεται μεταξύ των αριθμών 1 και 2 τότε θα έπρεπε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$P\left(1 \leq X \leq 2\right) = \int_{1}^{2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} dz = F(2) - F(1)$$

Για παράδειγμα, όταν οι παράμετροι μ, σ^2 λαμβάνουν τις τιμές $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$ (**τυποποιημένη κανονική κατανομή**) τότε υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $P\left(1 \leq X \leq 2\right) = \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ το οποίο εκφράζει το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $f(x)$ όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα, ($P\left(1 \leq X \leq 2\right) = 0.13591$)



Ευτυχώς, συγκεκριμένα ολοκληρώματα της παραπάνω μορφής έχουν υπολογιστεί (προσεγγιστικά) και βρίσκονται συνήθως σε μορφή πίνακα σε όλα τα παραρτήματα στατιστικών και οικονομετρικών εγχειριδίων ώστε να μην χρειάζεται να προβαίνουμε σε επίπονους υπολογισμούς. Επίσης όλα τα εξειδικευμένα οικονομετρικά ή στατιστικά πακέτα λογισμικών προβαίνουν σε παρόμοιους υπολογισμούς.

Από την θεωρία γνωρίζουμε, χωρίς να χρειάζεται να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

ενώ επίσης αποδεικνύεται ότι (δεν χρειάζεται να προβείτε σε απόδειξη!)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$$

δύο τύποι οι οποίοι θα γίνουν κατανοητοί στη συνέχεια.

Παράδειγμα. Μία τυχαία μεταβλητή X κατανέμεται **ομοιόμορφα** (uniformly distributed), ή σύμφωνα με την ομοιόμορφη κατανομή, στο διάστημα $[a,b]$, με $b > a$ και γράφουμε $X \sim U[a,b]$ όταν η σ.π.π δίνεται από την $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$, $a \le x \le b$.

1. Βεβαιώστε ότι η $f(x)$ είναι όντως μία σ.π.π.
2. Υπολογίστε την α.σ.κ και τις πιθανότητες $P(X \le b)$, $P(X \le a)$ και $P\left(X \le \frac{1}{2}(b-a)+a\right)$.

Οι απαντήσεις δίνονται ως εξής. Καταρχάς, βεβαιώνουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι μία σ.π.π. Όντως έχουμε $f(x)=\frac{1}{b-a}>0$ αφού $b>a$ και

$$\int_a^b \frac{1}{b-a}dx=\frac{b}{b-a}-\frac{a}{b-a}=\frac{b-a}{b-a}=1$$

Η α.σ.κ $F(x)$ δίνεται από το ολοκλήρωμα της $f(x)$ με κάτω όριο το κάτω όριο του διαστήματος στο οποίο λαμβάνει τιμές η X και πάνω όριο το σημείο x, δηλαδή

$$F(x)=P\left(X\le x\right)=\int_a^x \frac{1}{b-a}dz=\frac{x}{b-a}-\frac{a}{b-a}=\frac{x-a}{b-a}$$

Η πιθανότητα να παρατηρήσουμε τιμές της X μικρότερες από b ή a ή $\frac{1}{2}\left(b-a\right)+a$ δίνονται αντικαθιστώντας τις αντίστοιχες τιμές στην α.σ.κ, δηλαδή

$$P\left(X\le b\right)=F(b)=\frac{b-a}{b-a}=1$$

$$P\left(X\le a\right)=F(a)=\frac{a-a}{b-a}=0$$

$$P\left(X\le \frac{1}{2}\left(b-a\right)+a\right)=F(\frac{1}{2}\left(b-a\right)+a)=\frac{\frac{1}{2}\left(b-a\right)+a-a}{b-a}=\frac{1}{2}$$

Στην στατιστική επαγωγή είναι συχνοί οι «μετασχηματισμοί» τυχαίων μεταβλητών. Η εύρεση των α.σ.κ και σ.π.π μετασχηματισμένων μεταβλητών αποτελεί χρήσιμο θεωρητικό εργαλείο. Έστω ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή X κατανέμεται σύμφωνα με την α.σ.κ $F_X(x)$ με σ.π.π $f_X(x)$. Θέλουμε να υπολογίσουμε την α.σ.κ και σ.π.π της τυχαίας μεταβλητής $Y = g(X)$ όπου $g(.)$ είναι μία παραγωγίσιμη μονότονη συνάρτηση.

Υπολογίζουμε την αντίστροφη συνάρτηση $X = g^{-1}(Y) = h(Y)$ και

$F_Y(y) = F_X(h(y))$ όταν η $g(X)$ είναι μονότονα αύξουσα

$F_Y(y) = 1 - F_X(h(y))$ όταν η $g(X)$ είναι μονότονα φθίνουσα

Επιπλέον αν υποθέσουμε ότι $\frac{dh(y)}{dy} \neq 0$ τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής Y δίνεται από τον τύπο

$$f_Y(y) = f_X(h(y))\left|\frac{dh(y)}{dy}\right| \tag{Π.2}$$

ΠΣ.2 Αναμενόμενη τιμή (μαθηματική ελπίδα) και ροπές

Τα βασικά χαρακτηριστικά των κατανομών τυχαίων μεταβλητών περιγράφονται από στατιστικά μέτρα που ονομάζονται ροπές. Για παράδειγμα ο πληθυσμιακός μέσος της X (ή μαθηματική ελπίδα της X ή προσδοκώμενη τιμή της X ή αναμενόμενη τιμή της X) περιγράφει τη συγκέντρωση της κατανομής γύρω από κάποια τιμή (το μέσο μ) και δίνεται από τους τύπους

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i) \text{ ή } E(X) = \mu = \int x f(x) dx$$

για διακριτές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές αντίστοιχα. Ο μέσος συχνά αναφέρεται και ως παράμετρος θέσης για ευνόητους λόγους[1].

Για παράδειγμα αν επιστρέψουμε στη διακριτή τυχαία μεταβλητή X: αποτέλεσμα ρίψης ζαριού, ο πληθυσμιακός μέσος είναι

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i) = \left(1 \times \frac{1}{6}\right) + \left(2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(3 \times \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(6 \times \frac{1}{6}\right) = 3.5$$

ενώ μία συνεχής τυχαία μεταβλητή X που **κατανέμεται κανονικά** έχει μέσο $E(X) = \mu$ αφού όπως είδαμε $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu$.

Η μαθηματική ελπίδα των συναρτήσεων X^k ονομάζεται ροπή $k-$τάξεως ενώ για $k > 1$ ορίζονται οι κεντρικές ροπές $k-$τάξεως

$$E\left(X - \mu\right)^k = \sum_i \left(x_i - \mu\right)^k p\left(x_i\right) \text{ και } E\left(X - \mu\right)^k = \int \left(x - \mu\right)^k f(x) dx$$

[1] Υπάρχουν και άλλες παράμετροι θέσης, όπως η διάμεσος (*median*) m που ικανοποιεί τη σχέση $P\left(X \le m\right) = \frac{1}{2}$ ή η κορυφή (*mode*) που για συνεχείς σ.π.π ορίζει το σημείο στο οποίο η σ.π.π $f(x)$ μεγιστοποιείται.

Γενικά για *Borel* μετρήσιμες[2] πραγματικές συναρτήσεις $g(x)$ ορίζουμε την αναμενόμενη τιμή $E\left[g(X)\right]$ ως $E\left[g(X)\right]=\int g(x)f(x)dx<\infty$. Η προηγούμενη ανισότητα ισχύει όταν

$$E\left|g(X)\right|=\int\left|g(x)\right|f(x)dx<\infty \qquad (\Pi.3)$$

Αν η (Π.3) δεν ικανοποιείται τότε υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα

$$I_1=\int_{g(x)>0}g(x)f(x)dx \text{ και } I_2=-\int_{g(x)<0}g(x)f(x)dx$$

Όταν $I_1=\infty$ και $I_2<\infty$ τότε $E\left[g(X)\right]=\infty$. Όταν $I_1<\infty$ και $I_2=\infty$ τότε $E\left[g(X)\right]=-\infty$. Όταν $I_1=\infty$ και $I_2=\infty$ τότε η αναμενόμενη τιμή $E\left[g(X)\right]$ δεν ορίζεται. Η συνθήκη (Π.3) ονομάζεται **συνθήκη ολοκληρωσιμότητας**. Άρα γενικά η ροπή $k-$τάξης υπάρχει (ορίζεται) όταν $E\left|X\right|^k<+\infty$. Επιπλέον, όταν $E\left|X\right|^k<+\infty$ τότε ορίζονται (υπάρχουν) όλες οι ροπές με τάξη μικρότερη του k, δηλαδή $E\left|X\right|^j<+\infty$ για $0<j<k$.

Από τις ροπές με $k>1$, ως σημαντικότερη στην οικονομετρία θεωρείται η μέση τετραγωνική απόκλιση από τον πληθυσμιακό μέσο που ονομάζεται **διακύμανση** (παράμετρος κλίμακας ή διασποράς) όπου $k=2$ και συνήθως συμβολίζεται με σ^2 ή $Var(X)$. Για παράδειγμα, μία τυχαία μεταβλητή X που **κατανέμεται κανονικά** έχει διακύμανση σ^2 αφού (όπως είδαμε παραπάνω)

---

[2] Μία συνάρτηση $g(x)$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών επίσης το $\mathbb{R}$ - γράφουμε $g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - είναι *Borel* μετρήσιμη αν η $g\left(X\right)$ είναι τυχαία μεταβλητή όταν η X είναι τυχαία μεταβλητή. Για ευκολία αναφέρουμε ότι όλες οι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις είναι *Borel* μετρήσιμες καθώς και συναρτήσεις του τύπου (για ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών) $\max_i X_i$, $\min_i X_i$, $\sup_i X_i$, $\inf_i X_i$.

$$Var(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\mu\right)^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\mu\right)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma^2$$

Αναλυτικά ισχύουν οι παρακάτω ισότητες

$$\sigma^2=Var(X)=E\Big(X-E\big(X\big)\Big)^2=E\Big(X^2\Big)-\Big[E\big(X\big)\Big]^2$$

ή

$$\sigma^2=Var(X)=E\Big(X-E\big(X\big)\Big)^2=E\big(X-\mu\big)^2=E\Big(X^2\Big)-\mu^2$$

Οι ροπές της κανονικής κατανομής εξαρτώνται άμεσα από τις δύο πρώτες ροπές της, δηλαδή το μέσο και τη διακύμανση αφού

$$E\big(X-\mu\big)^k=\begin{cases}\dfrac{\sigma^k k!}{2^{k/2}\big(k/2\big)!} & ,\quad \text{αν } k \text{ άρτιος}\\ 0 & ,\quad \text{αν } k \text{ περιττός}\end{cases}$$

Για παράδειγμα, $E\big(X-\mu\big)^3=0$, $E\big(X-\mu\big)^7=0$, ενώ $E\big(X-\mu\big)^4=3\sigma^4=3\big(\sigma^2\big)^2$ και $E\big(X-\mu\big)^6=15\sigma^6=15\big(\sigma^2\big)^3$. Η διαίρεση της τέταρτης κεντρικής ροπής με το τετράγωνο της διακύμανσης $\dfrac{E\big(X-\mu\big)^4}{\Big[E\big(X-\mu\big)^2\Big]^2}=\dfrac{E\big(X-\mu\big)^4}{\big(\sigma^2\big)^2}$ δίνει ένα στατιστικό μέτρο που ονομάζεται **κύρτωση.**

Στη στατιστική αλλά και στη σύγχρονη χρηματοοικονομική οικονομετρία σημασία αποκτούν και ανώτερης τάξης κεντρικές ροπές όπως η τρίτης τάξης κεντρική ροπή $E\big(X-\mu\big)^3$ που εκφράζει συμμετρία[3] γύρω από τον μέσο αλλά

[3] Συμμετρικές κατανομές δίνουν $E\big(X-\mu\big)^3=0$. Η $E\big(X-\mu\big)^3>0$ εκφράζει θετική ασυμμετρία, δηλαδή η κατανομή συγκεντρώνεται δεξιά του μέσου και έχει «μακριά» δεξιά κατάληξη ενώ $E\big(X-\mu\big)^3<0$ εκφράζει αρνητική ασυμμετρία με την κατανομή να συγκεντρώνεται αριστερά του μέσου και εμφανίζει «μακριά» αριστερή κατάληξη.

και η τέταρτης τάξης κεντρική ροπή $E(X-\mu)^4$ που εκφράζει τη μορφή ή κύρτωση[4] της κατανομής.
Για παράδειγμα αν X : *«αποτέλεσμα ρίψης ζαριού»* τότε έχουμε

$$\begin{aligned} Var(X) = E(X-\mu)^2 &= \sum_i (x_i-\mu)^2\ p(x_i) \\ &= (1-3.5)^2 \times \frac{1}{6} + (2-3.5)^2 \times \frac{1}{6} + \ldots + (6-3.5)^2 \times \frac{1}{6} \\ &= 2.9166 \end{aligned}$$

$$E(X\text{ - }\mu)^3 = \sum_i (x_i-\mu)^3\ p(x_i) = 0$$

$$E(X\text{ - }\mu)^4 = \sum_i (x_i-\mu)^4\ p(x_i) = 14.7291$$

Παρατηρείστε ότι ενώ ο πληθυσμιακός μέσος διατηρεί τις μονάδες μέτρησης της εκάστοτε τυχαίας μεταβλητής αυτό δεν συμβαίνει με τη διακύμανση που εκφράζει τετραγωνικές αποκλίσεις. Για το λόγο αυτό συχνά μελετούμε την **τυπική απόκλιση**

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

η οποία εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τη μεταβλητή X και χρησιμοποιείται ευρύτατα στην τυποποίηση στατιστικών μέτρων.
Μερικές σημαντικές ιδιότητες της **αναμενόμενης τιμής** είναι,

- αν a είναι σταθερός αριθμός τότε $E(a)=a$

[4] Η κύρτωση αναφέρεται στην μορφή των κατανομών και μετρά τη σχέση της κορυφής και των καταλήξεων της κατανομής. «Μεγαλύτερη» κύρτωση (λεπτόκυρτη κατανομή) υποδηλώνει μακρύτερες καταλήξεις της κατανομής και συμπίεση της κατανομής γύρω από την κορυφή. «Μικρότερη» κύρτωση (πλατύκυρτη κατανομή) υποδηλώνει πλατύτερη κορυφή της κατανομής και μικρότερες καταλήξεις. Συχνά ως μέτρο σύγκρισης θεωρούμε την κύρτωση της κανονικής κατανομής η οποία είναι ίση με 3.

- Η αναμενόμενη τιμή είναι γραμμικός μετασχηματισμός. Αν X και Y τυχαίες μεταβλητές και a,b σταθερές τότε
  $E(aX+bY)=E(aX)+E(bY)=aE(X)+bE(Y)$
- Αν $f(X)$ είναι κοίλη συνάρτηση (*concave*) τότε $E(f(X))\leq f(E(X))$
- Αν $f(X)$ είναι κυρτή συνάρτηση (*convex*) τότε
  $E(f(X))\geq f(E(X))$ "ανισότητα Jensen"

Η τελευταία ανισότητα ονομάζεται ανισότητα *Jense*n και έχει τουλάχιστον δύο χρήσιμες εφαρμογές

$$|E(X)|\leq E|X| \text{ και } \left[E(X)\right]^2\leq E\left(X^2\right)$$

Από τις παραπάνω δύο ανισότητες η πρώτη αριστερά είναι η ανισότητα της απόλυτης τιμής (*modulus inequality*) η οποία αποτελεί και έκφραση της συνθήκης ολοκληρωσιμότητας, $E|X|<+\infty \Rightarrow E(X)<+\infty$, ενώ η δεύτερη βεβαιώνει τη θετικότητα της διακύμανσης.
Τέλος, ορίζεται η ποσότητα

$$\|X\|_p=\left(E|X|^p\right)^{1/p} \quad , \; p\geq 1$$

η οποία ονομάζεται L^p νόρμα της τυχαίας μεταβλητής X με βάση την οποία παρουσιάζουμε έναν χρήσιμο αριθμό ανισοτήτων. Έστω ότι X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές. Τότε

* Η ανισότητα *Liapunov* δηλώνει ότι
  $\|X\|_p\leq \|X\|_q \quad , \; 0<p\leq q$

* Η ανισότητα *Minkowski* δηλώνει ότι

  $\|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p \quad , \; p \geq 1$

* Η ανισότητα *Cauchy-Schwarz* δηλώνει ότι

  $E|XY| \leq= \left(E|X|^2\right)^{1/2} \; \left(E|Y|^2\right)^{1/2}$

* η ανισότητα *Holder* για $p > 1$ και $q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ δηλώνει ότι

  $\|XY\|_1 \leq \|X\|_p \|Y\|_q$

Τέλος, σε σχέση με τη διακύμανση αποδεικνύεται ότι αν a και b είναι σταθεροί αριθμοί

$$Var(a) = 0 \quad \text{και} \quad Var(a + bX) = b^2 Var(X)$$

ΠΣ.3 Διμεταβλητές (από κοινού) κατανομές

Το μέχρι τώρα πλαίσιο ανάλυσης περιλάμβανε μόνο μία τυχαία μεταβλητή. Στην οικονομετρία βέβαια σημασία έχει η μελέτη της σχέσης περισσότερων από μία τυχαίων μεταβλητών. Ορίζουμε λοιπόν την **από-κοινού α.σ.κ** ως την πιθανότητα να παρατηρήσουμε $X \leq x$ και («ταυτοχρόνως» ή στο ίδιο πείραμα) $Y \leq y$ ως,

$$F(x, y) = P\left(X \leq x, Y \leq y\right)$$

Όταν η F είναι συνεχής τότε η **από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (κ.σ.π.π) δίνεται από την

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

ενώ για κάθε *Borel* μετρήσιμη συνάρτηση $g(x, y)$ ισχύει ότι

$$E\left[g\left(x, y\right)\right] = \iint f(x, y) dx dy$$

Οι οριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών Y, X μπορούν να εξαχθούν από την $f(x, y)$,

$$f_Y(y) = \frac{dF}{dy} = \int f(x, y) dx \quad \text{και} \quad f_X(x) = \frac{dF}{dx} = \int f(x, y) dy$$

Μία σημαντική έννοια είναι αυτή της «ανεξαρτησίας» των τυχαίων μεταβλητών Y, X. *Οι μεταβλητές* Y, X *λέγονται ανεξάρτητες όταν η κ.σ.π.π μπορεί να παραγοντοποιηθεί στο γινόμενο των οριακών σ.π.π δηλαδή όταν*

$f(x,y) = f_Y(y) f_X(x)$. Η ιδιότητα της ανεξαρτησίας είναι σημαντική αφού όταν ισχύει τότε για δύο οποιεσδήποτε *Bore*l μετρήσιμες συναρτήσεις $h(Y)$ και $w(X)$ έχουμε ότι $E\left[h(Y)w(X)\right] = E\left[h(Y)\right]E\left[w(X)\right]$. Όταν η συνάρτηση $g(Y,X)$ δίνεται από το γινόμενο των αποκλίσεων των μεταβλητών από τον πληθυσμιακό μέσο, $g(Y,X) = (Y - E(Y))(X - E(X))$, τότε ορίζουμε την κοινή ροπή της **«συνδιακύμανσης»**

$$
\begin{aligned}
Cov(Y,X) &= E\left[(Y - E(Y))(X - E(X))\right] \\
&= E(YX) - E(Y)E(X) = E(YX) - \mu_Y \mu_X
\end{aligned}
$$

όπου $E(Y) = \mu_Y$ και $E(X) = \mu_X$. Η συνδιακύμανση είναι μηδέν όταν οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες ή όταν είναι γραμμικά μη-συσχετιζόμενες (με το δεύτερο να μην συνεπάγεται το πρώτο). Παρατηρείστε ότι η ανεξαρτησία συνεπάγεται ότι $E\left[h(Y)w(X)\right] = E\left[h(Y)\right]E\left[w(X)\right]$ άρα όταν οι Y,X είναι ανεξάρτητες ισχύει $E(YX) = E(Y)E(X)$ οπότε $Cov(Y,X) = E(YX) - E(Y)E(X) = 0$. Προσοχή διότι το αντίστροφο δεν ισχύει[5] δηλαδή $Cov(Y,X) = 0 \not\Rightarrow$ (δεν συνεπάγεται) ότι οι Y,X είναι ανεξάρτητες.

Η συνδιακύμανση επηρεάζεται από τις μονάδες μέτρησης των μεταβλητών και ως εκ τούτου δεν μπορεί να αποτελέσει μέτρο σύγκρισης της «έντασης» της σχέσης των υπο-εξέταση μεταβλητών. Για το λόγο αυτό τυποποιούμε διαιρώντας με τις αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις και λαμβάνουμε το συντελεστή συσχέτισης

$$
\rho(Y,X) = \frac{Cov(Y,X)}{\sqrt{Var(Y)Var(X)}}
$$

[5] **Προσοχή.** Μόνο για την κανονική κατανομή ισχύει ότι όταν $Cov(Y,X) = 0$ **και** οι μεταβλητές Y,X **κατανέμονται κανονικά** τότε οι Y,X είναι ανεξάρτητες. Το συμπέρασμα έπεται από το γεγονός ότι η κανονική κατανομή χαρακτηρίζεται πλήρως από τις πρώτες δύο ροπές της.

Αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής $\rho(Y,X)$ λαμβάνει τιμές $-1 \le \rho(Y,X) \le 1$ με τιμές κοντά στο 1 να σηματοδοτούν «ισχυρή (γραμμική) θετική συσχέτιση», κοντά στο -1 «ισχυρή (γραμμική) αρνητική συσχέτιση» και κοντά στο μηδέν γραμμικά ασυσχέτιστες μεταβλητές.
Σχετικά με τη διακύμανση αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών έχουμε ότι

$$Var\left(aX \pm bY\right) = a^2 Var\left(X\right) + b^2 Var\left(Y\right) \pm 2abCov\left(X,Y\right)$$

Άρα αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες ή μη-συσχετιζόμενες γραμμικά τότε

$$Var\left(aX \pm bY\right) = a^2 Var\left(X\right) + b^2 Var\left(Y\right)$$

Γενικότερα, για μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\left\{X_i\right\}_{i=1}^{n}$ έχουμε ότι

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var\left(X_i\right) + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} Cov\left(X_i, X_{i-j}\right)$$

ΠΣ.4 Υπο-συνθήκη κατανομές και υπο-συνθήκη προσδοκίες

Η υπό συνθήκη ή δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y ως προς την X δίνεται από τον τύπο

$$f(y \mid x) = \frac{f(y,x)}{f(x)}$$

και περιγράφει την πιθανότητα η μεταβλητή Y να λάβει την τιμή y όταν η X έχει λάβει την τιμή x. Αντίστοιχα ισχύει

$$f(x|y)=\frac{f(y,x)}{f(y)}$$

Είναι εμφανές ότι όταν οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες τότε $f(y|x)=f_Y(y)$ και $f(x|y)=f_X(x)$ δηλαδή η πληροφόρηση που έχουμε σχετικά με την μεταβλητή X δεν επηρεάζει την πιθανότητα εμφάνισης της τιμής y για την Y και αντίστοιχα για τη μεταβλητή X.

Οι **υπο συνθήκη ή δεσμευμένες ροπές** ορίζονται κατά τρόπο ανάλογο με αυτό των μη υπο-συνθήκη ροπών.

Έτσι, ο δεσμευμένος μέσος για δεδομένη τιμή της X ορίζεται ως

$$E\left(Y|X=x\right)=E\left(Y|x\right)=\int yf(y|x)dy$$

και η δεσμευμένη διακύμανση ως

$$Var\left(Y|X=x\right)=Var\left(Y|x\right)=\int\left(y-E\left(Y|X=x\right)\right)^2 f(y|x)dy$$

Γενικά αντικαθιστώντας X όπου x, οι δεσμευμένες ροπές αντιστοιχούν σε τυχαίες μεταβλητές και γράφουμε $E\left(Y|X\right)$ ή $Var\left(Y|X\right)$ κ.ο.κ. Η δεσμευμένη ροπή $E\left(Y|x\right)$ αντιστοιχεί στη περίπτωση αυτή σε μία πραγματοποίηση (*realization*) της τυχαίας μεταβλητής $E\left(Y|X\right)$. Για παράδειγμα αν ο δεσμευμένος μέσος είναι γραμμική συνάρτηση του τύπου $E\left(Y|X=x\right)=a+\beta x$ τότε μπορούμε να γράψουμε $E\left(Y|X\right)=a+\beta X$. Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $E\left(Y|X\right)=a+\beta X$ δίνεται από $E\left(E\left(Y|X\right)\right)=a+\beta E\left(X\right)$ ενώ η διακύμανση από $Var\left(E\left(Y|X\right)\right)=\beta^2 Var\left(X\right)$.

Μία σημαντική ιδιότητα των δεσμευμένων ροπών μεταφράζεται στο **νόμο των επαναλαμβανόμενων προσδοκιών, ν.ε.π,** σύμφωνα με τον οποίο

$$E\left(E\left(Y \mid X\right)\right)=E\left(Y\right)$$

ενώ συχνά στα εγχειρίδια οικονομετρίας αναφέρεται και ο συμβολισμός $E_X\left(E\left(Y \mid X\right)\right)=E\left(Y\right)$ που σημαίνει ότι ο πρώτος τελεστής προσδοκιών έχει ως αναφορά την κατανομή της X.

Γενικά για *Borel* μετρήσιμες ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $g\left(X\right)$ ισχύει ότι

$$E\left(Yg(X) \mid X\right)=g(X)E\left(Y \mid X\right)$$

ενώ μία σημαντική ιδιότητα που απορρέει από το ν.ε.π είναι ότι αν $E\left(Y \mid X\right)=E\left(Y\right)$ τότε $Cov\left(Y,g(X)\right)=0$ για κάθε *Borel* μετρήσιμη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g\left(X\right)$. Για παράδειγμα όταν $g\left(X\right)=X$ έχουμε

$$\begin{aligned}
Cov\left(Y,X\right) &= E\left(YX\right)-E\left(Y\right)E\left(X\right) \\
&= E\left(E\left(YX \mid X\right)\right)-E\left(Y\right)E\left(X\right) \\
&= E\left(XE\left(Y \mid X\right)\right)-E\left(Y\right)E\left(X\right) \\
&= E\left(XE\left(Y\right)\right)-E\left(Y\right)E\left(X\right) \\
&= E\left(Y\right)E\left(X\right)-E\left(Y\right)E\left(X\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ΠΣ.5 Σύνολα πληροφόρησης

Έστω ότι $\ldots,Y_1,Y_2,Y_3,\ldots$ μία σειρά τυχαίων μεταβλητών. Κάθε στοιχείο της σειράς γράφεται γενικά ως Y_t (π.χ για $t=6$ έχουμε την μεταβλητή Y_6). Είδαμε ότι η δεσμευμένη προσδοκία της μεταβλητής Y_t με δεδομένη την X_t γράφεται ως $E\left(Y_t \mid X_t\right)$ υπονοώντας γνώση της X_t κατά τον υπολογισμό της αναμενόμενης τιμής της Y_t. Συχνά είναι λογικό να υποθέτουμε γνώση όχι μόνο της X_t αλλά όλης της σειράς $\dots, X_{t-2}, X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, X_{t+2}\dots$ άρα γενικεύουμε το υπο-συνθήκη σύνολο των μεταβλητών και ορίζουμε το σύνολο πληροφόρησης $\mathbb{X} = \{\dots, X_{t-2}, X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, X_{t+2}\dots\}$ και αντίστοιχα τη δεσμευμένη προσδοκία $E(Y_t \mid \mathbb{X})$. Ακόμα συχνότερα το σύνολο πληροφόρησης περιέχει όχι μόνο την σειρά της μεταβλητής X_t αλλά και αριθμό άλλων μεταβλητών. Συνηθίζουμε να συμβολίζουμε ένα τέτοιο σύνολο με Ω ή $\mathbb{I}$ (*information set*). Τέλος, όταν ο δείκτης t εκφράζει χρόνο ή διάταξη (δηλαδή το t-1 «προηγείται» του t κ.ο.κ) και το σύνολο πληροφόρησης περιέχει μόνο την «ιστορία» της Y_t, δηλαδή περιέχει τις $\{Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots\}$, γράφουμε $\mathbb{F}_{t-1}$ και αντίστοιχα $E(Y_t \mid \mathbb{F}_{t-1})$.

ΠΣ.6 Ο τελεστής υστέρησης και ο τελεστής πρώτων διαφορών

Έστω μία χρονοσειρά y_t. Ο τελεστής υστέρησης L έχει την ιδιότητα $L^j y_t = y_{t-j}$ για κάθε ακέραιο j ενώ για σταθερούς (μη εξαρτώμενους από το χρόνο) όρους a ισχύει ότι $L^j a = a$ επίσης για κάθε ακέραιο j.

Έστω ότι θέλουμε να γράψουμε συνοπτικά τη μεταβολή $y_t - y_{t-1}$. Έχουμε

$$y_t - y_{t-1} = y_t - Ly_t = (1-L)\, y_t$$

Έστω ότι θέλουμε να εκφράσουμε συνοπτικά τη διαφορά $y_t - y_{t-4}$. Έχουμε

$$y_t - y_{t-4} = y_t - L^4 y_t = (1-L^4)\, y_t$$

Έστω ότι εφαρμόζουμε τον τελεστή στη μεταβλητή t. Έχουμε $L^j t = t - j$.

Ο όρος $(1-L)$ συμβολίζεται συχνά από το γράμμα Δ το οποίο ονομάζεται και τελεστής πρώτων διαφορών αφού $\Delta y_t = \left(1-L\right) y_t = y_t - y_{t-1}$. Αντίστοιχα γράφουμε $\Delta^d = \left(1-L\right)^d$ (τελεστής d διαφορών) και $\Delta_d = 1-L^d$.

Παράδειγμα. Η μεταβολή Δy_{t+3} είναι ίση με $\Delta y_{t+3} = y_{t+3} - y_{t+2}$. Η $\Delta^2 y_t = \Delta\Delta y_t$ (δεύτερες διαφορές της y_t) είναι ίση με $\Delta^2 y_t = \left(1-L\right)^2 y_t = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}$ ενώ η $\Delta_2 y_t = y_t - y_{t-2}$.

Παράδειγμα. Έστω ότι $y_t = a + \beta t + \gamma x_t$. Βρείτε τις πρώτες και δεύτερες διαφορές. Έχουμε, $\Delta y_t = \Delta a + \beta \Delta t + \gamma \Delta x_t = \beta + \gamma \Delta x_t$ ενώ $\Delta^2 y_t = \gamma \Delta^2 x_t$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (α) Έστω ότι $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. Κάνοντας χρήση του τύπου (Π.2) δείξτε ότι

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N\left(0,1\right)$$

1. (β) Μία τυχαία μεταβλητή Y λέμε ότι ακολουθεί τη λογαριθμική-κανονική κατανομή όταν η $X = \ln(Y)$ κατανέμεται κανονικά. Έστω λοιπόν ότι $X = \ln\left(Y\right) \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. Κάνοντας χρήση του τύπου (Π.2) βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y δηλαδή την σ.π.π της λογαριθμικο-κανονικής (*log-normal*) κατανομής και δείξτε ότι η $m-$οστή ροπή της Y δίνεται από $E\left(Y^m\right) = e^{\mu m + m^2 \frac{\sigma^2}{2}}$. Άρα η Y έχει μέσο $E\left(Y\right) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$ και διακύμανση $Var\left(Y\right) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$. Επίσης δείξτε ότι η διάμεσος είναι ίση με e^{μ}. **Υπόδειξη:** η διάμεσος είναι η τιμή δ που για τυχαία μεταβλητή Z με απολύτως συνεχή κατανομή ικανοποιεί την σχέση $P\left(Z \le \delta\right) = \frac{1}{2}$.

Απάντηση 1(β)

Απλή εφαρμογή του τύπου (Π.2) δίνει

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\ln y-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{y} \quad , \quad 0 < x < +\infty$$

Άρα η $m-$οστή ροπή της Y δίνεται από

$$
\begin{aligned}
E\left(Y^m\right) &= \int_0^{+\infty} y^m \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{y} dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{mt} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2-2\sigma^2 mt}{2\sigma^2}} dt \\
&= \left(e^{\frac{(\mu+m\sigma^2)^2-\mu^2}{2\sigma^2}} \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(t-\left[\mu+m\sigma^2\right]\right)^2}{2\sigma^2}} dt \right) \\
&= e^{\mu m+m^2\frac{\sigma^2}{2}}
\end{aligned}
$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την αλλαγή μεταβλητής[6] $t=\ln y$ ενώ η τέταρτη ισότητα λαμβάνεται μετά από ολοκλήρωση τετραγώνου, δηλαδή

$$
\begin{aligned}
t^2-2t\mu+\mu^2-2\sigma^2 mt &= t^2-2t\left(\mu+m\sigma^2\right)+\mu^2 \\
&= t^2-2t\left(\mu+m\sigma^2\right)+\left(\mu+m\sigma^2\right)^2-\left(\mu+m\sigma^2\right)^2+\mu^2 \\
&= \left(t-\left(\mu+m\sigma^2\right)\right)^2-\left(\mu+m\sigma^2\right)^2+\mu^2
\end{aligned}
$$

Οπότε η μέση τιμή της μεταβλητής Y δίνεται από $E(Y)=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ και η διακύμανση από

$$
Var(Y)=E\left(Y^2\right)-\left[E(Y)\right]^2=e^{2\mu+2\sigma^2}-e^{2\mu+\sigma^2}=e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)
$$

---

[6] Άρα $dt=\frac{1}{y}dy$ και τα όρια ολοκλήρωσης γίνονται $\lim_{y\to+\infty}(\ln y)=+\infty$, $\lim_{y\to 0}(\ln y)=-\infty$

Η διάμεσος μπορεί να βρεθεί εύκολα αφού γνωρίζουμε ότι η διάμεσος της κανονικής κατανομής συμπίπτει με το μέσο της δηλαδή $\delta = \mu$. Άρα

$$P\left(\ln\left(Y\right) \leq \mu\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow P\left(Y \leq e^{\mu}\right) = \frac{1}{2}$$

2. Μία τυχαία μεταβλητή X κατανέμεται ομοιόμορφα (*uniformly distributed*) στο διάστημα $[a,b]$, και γράφουμε $X \sim U(a,b)$ όταν η σ.π.π δίνεται από την

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad , \quad a \leq x \leq b$$

Υπολογίστε τη μαθηματική ελπίδα (προσδοκώμενη τιμή πληθυσμιακός μέσος) της X. Υπολογίστε τη διακύμανση της X. Υπολογίστε τις κεντρικές ροπές τρίτης και τετάρτης τάξεως $E\left(X-\mu\right)^3$ και $E\left(X-\mu\right)^4$ αντίστοιχα.

3. Έστω ότι X η τυχαία μεταβλητή: «αποτελέσματα ρίψης ζαριού». Υπολογίστε τις κεντρικές ροπές τρίτης και τέταρτης τάξης. Τα ευρήματά σας σχετικά με την κεντρική ροπή τρίτης τάξης πρέπει να είναι αναμενόμενα. Σχολιάστε.

4. Έστω ότι η μεταβλητή X κατανέμεται ομοιόμορφα (*uniformly distributed*) στο διάστημα $[a,b]$ και $a>0$. Βρείτε την α.σ.κ και την σ.π.π της τυχαίας μεταβλητής $Y = \ln X$

5. Έστω οι τυχαίες μεταβλητές X και Y. Με βάση τις παρακάτω ιδιότητες

$$E\left(aX+bY\right) = aE\left(X\right)+bE\left(Y\right)$$

$$Var\left(aX \pm bY\right) = a^2Var\left(X\right)+b^2Var\left(Y\right) \pm 2abCov\left(X,Y\right)$$

$$Cov\left(Y,X\right) = E\left[\left(Y-E(Y)\right)\left(X-E(X)\right)\right] = E\left(YX\right)-E(Y)E(X)$$

υπολογίστε τη διακύμανση $Var\left(X+Y+Z\right)$

6. Αποδείξτε ότι ο συντελεστής συσχέτισης ρ λαμβάνει τιμές μεταξύ του -1 και του 1, δηλαδή $|\rho| = \left|\frac{Cov\left(X,Y\right)}{\sqrt{Var\left(X\right)Var\left(Y\right)}}\right| \leq 1$

Απάντηση 6.

Έστω ότι οι X και Y είναι τυχαίες μεταβλητές με μηδενικό μέσο (αν και χωρίς γενίκευση μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι X και Y δίνονται σε αποκλίσεις από τους μέσους). Επειδή για κάθε σταθερά α ισχύει ότι

$$E\left(aX+Y\right)^2 = a^2E\left(X^2\right)+2aE\left(XY\right)+E\left(Y^2\right)\geq 0$$

επιλέγοντας $a = -\frac{E\left(XY\right)}{E\left(X^2\right)}$ έχουμε

$$\left(-\frac{E\left(XY\right)}{E\left(X^2\right)}\right)^2 E\left(X^2\right)+2\left(-\frac{E\left(XY\right)}{E\left(X^2\right)}\right)E\left(XY\right)+E\left(Y^2\right)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left[E\left(XY\right)\right]^2}{E\left(X^2\right)}-2\frac{\left[E\left(XY\right)\right]^2}{E\left(X^2\right)}+E\left(Y^2\right)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\left[E\left(XY\right)\right]^2}{E\left(X^2\right)}+E\left(Y^2\right)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\left[E\left(XY\right)\right]^2}{E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right)}\leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{E\left(XY\right)}{\sqrt{E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right)}}\right|\leq 1$$

7α. Δείξτε ότι αν $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ τότε η αναμενόμενη τιμή της X είναι ίση με μ δηλαδή $E\left(X\right)=\mu$.

7β. Δείξτε ότι για την κατανομή *Cauchy* ο μέσος $\mu=E\left(X\right)$ δεν ορίζεται. Η κατανομή έχει σ.π.π $f(x)=\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$, $x\in\mathbb{R}$

Απάντηση 7α.

Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
E\left(X\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\mu+\sigma z\right)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dx \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}}dx+\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dx \\
&= 0+\mu\times 1 \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την αλλαγή μεταβλητών $z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}\Leftrightarrow x=\mu+\sigma z$ άρα και $dx=\sigma dz$ ενώ η τέταρτη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η $h\left(z\right)=ze^{-\frac{z^2}{2}}$ είναι περιττή συνάρτηση άρα $h(-z)=-h\left(z\right)$.

Απάντηση 7β.

Η αναμενόμενη τιμή $E\left(X\right)$ ορίζεται όταν υπάρχει η $E\left|X\right|$ δηλαδή όταν $E\left|X\right|\neq\infty$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$
\begin{aligned}
E|X| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{\left(1+x^2\right)}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{z\to+\infty}\int_{0}^{z} \frac{2x}{\left(1+x^2\right)}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{z\to+\infty} \ln\left(1+z^2\right) \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από τη συμμετρία της συνάρτησης $|x|\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$.

8. Έστω οι τυχαίες μεταβλητές X και $Y = X^3$ όπου $E(X)=0$ και $E\left(X^3\right)=0$. Δείξτε ότι $Cov(X,Y)=0$ δηλαδή ότι οι μεταβλητές είναι ασυσχέτιστες (γραμμικά). **Υπόδειξη:** είναι εμφανές ότι οι μεταβλητές X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

9. Έστω ότι X μία τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένο μέσο και διακύμανση. Αν $Y = a + bX$ όπου $b > 0$ δείξτε ότι $\rho(X,Y)=1$. Αν $Y = a + bX$ με $b < 0$ δείξτε ότι $\rho(X,Y)=-1$. Για λόγους απλοποίησης υποθέστε ότι $E(X)=0$

10. Μία διακριτή τυχαία μεταβλητή κατανέμεται σύμφωνα με την κατανομή *Bernoulli* όταν

$$
P(X = x) = p^x (1\text{-}\, p)^x \quad , \quad x = 0,1 \quad , \quad 0 \le p \le 1
$$

Γεωμετρική (*Geometric*) όταν

$$P(X = x) = p(1 - p)^x \quad , \quad x = 1,2,3,\ldots \quad , \quad 0 \le p \le 1$$

Poisson όταν

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,3,\ldots \quad , \quad \lambda > 0$$

Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή $E(X)$ και τη διακύμανση $Var(X)$ σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις. Υπολογίστε την πιθανότητα η X να λάβει την τιμή 0 (δηλαδή $P(X = 0)$) και την πιθανότητα να λάβει την τιμή 2 όταν η X κατανέμεται σύμφωνα με την κατανομή *Poisson*. Επίσης υπολογίστε την πιθανότητα $P(1 \le X \le 3)$ όταν η παράμετρος $\lambda = 1$.

11. Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή κατανέμεται σύμφωνα με την εκθετική κατανομή όταν

$$f(x) = \frac{1}{\theta}e^{\frac{1}{\theta}x} \quad , \quad 0 \le x < +\infty \quad , \quad \theta > 0$$

Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή $E(X)$ και τη διακύμανση $Var(X)$.

Απάντηση 10-11.

Bernoulli: $E(X) = p$, $Var(X) = p(1 - p)$

Γεωμετρική: $E(X) = \frac{1}{p}$, $Var(X) = \frac{1 - p}{p^2}$

Poisson: $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$

Εκθετική: $E(X) = \theta$, $Var(X) = \theta^2$

12. Έστω ότι $Y_i = a + \beta X_i + u_i$ όπου X_i και u_i είναι $i.i.d$ τυχαίες μεταβλητές με $E\left(u_i\right) = 0$. Δείξτε ότι $Var\left(Y_i\right) = \beta^2 Var\left(X_i\right) + Var\left(u_i\right)$ και ότι $\beta = \dfrac{Cov\left(Y_i, X_i\right)}{Var\left(X_i\right)}$

13. Δείξτε ότι αν $Y_i = \beta X_i + u_i$ όπου X_i και u_i είναι $i.i.d$ τυχαίες μεταβλητές με $E\left(X_i\right) = 0, E\left(u_i\right) = 0$ η τιμή $\beta = \dfrac{Cov\left(Y_i, X_i\right)}{Var\left(X_i\right)}$ ελαχιστοποιεί τη διακύμανση των διαταρακτικών όρων $Var\left(u_i\right) = E\left(u_i^2\right)$.

14. Έστω ότι οι τυχαίες ανεξάρτητες μεταβλητές $\left\{\varepsilon_i\right\}_{i=1}^{n}$ κατανέμονται σύμφωνα με τη σ.π.π $f_\varepsilon(.)$ και $Y_i = a + \beta X_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$ όπου a και β είναι παράμετροι ενώ X_i είναι μία μη-στοχαστική μεταβλητή. Βρείτε την απο-κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $Y_n, Y_{n-1}, \ldots, Y_1$. Επίσης βρείτε τι αλλάζει στην απάντησή σας όταν $Y_i^\lambda = a + \beta X_i + \varepsilon_i$, $\lambda > 0$

Απάντηση 14.

Επειδή $\varepsilon_i = Y_i - a - \beta X_i$ έχουμε ότι

$$f_Y\left(Y_i\right) = f_\varepsilon\left(Y_i - a - \beta X_i\right)\left|\frac{d\left(Y_i - a - \beta X_i\right)}{dY_i}\right| = f_\varepsilon\left(Y_i - a - \beta X_i\right)$$

και η από-κοινού σ.π.π είναι η

$$f\left(Y_n, Y_{n-1}, \ldots, Y_1\right) = \prod_{i=1}^{n} f_\varepsilon\left(Y_i - a - \beta X_i\right)$$

λόγω ανεξαρτησίας των ε_i και συνεπώς των Y_i. Στην δεύτερη εξίσωση έχουμε

$$f_Y\left(Y_i\right) = f_\varepsilon\left(Y_i^\lambda - a - \beta X_i\right)\left|\frac{d\left(Y_i^\lambda - a - \beta X_i\right)}{dY_i}\right| = f_\varepsilon\left(Y_i^\lambda - a - \beta X_i\right)\lambda\left|Y_i^{\lambda-1}\right|$$

άρα η από-κοινού σ.π.π είναι η

$$f\left(Y_n, Y_{n-1}, \ldots, Y_1\right) = \prod_{i=1}^{n}\left[f_\varepsilon\left(Y_i^\lambda - a - \beta X_i\right)\lambda\left|Y_i^{\lambda-1}\right|\right] = \lambda^n\prod_{i=1}^{n}\left[f_\varepsilon\left(Y_i^\lambda - a - \beta X_i\right)\left|Y_i^{\lambda-1}\right|\right]$$