Παραβίαση των Βασικών Υποθέσεων

Πολυσυγγραμμικότητα

Ετεροσκεδαστικότητα

Αυτοσυσχέτιση

Πολυσυγγραμμικότητα

Το πρόβλημα

Μία από τις ανεξάρτητες μεταβλητές μπορεί να εκφραστεί ως γραμμική συνάρτηση μιας ή περισσοτέρων εκ των υπολοίπων ανεξάρτητων μεταβλητών.

Παραβιάζεται η σχετική υπόθεση

Στην περίπτωση αυτή – **Τέλεια Πολυσυγγραμμικότητα**

ο όρος $\left[\mathbf{X}'\mathbf{X}\right]^{-1}$ του $\hat{\beta} = \left[\mathbf{X}'\mathbf{X}\right]^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$

είναι αδύνατο να υπολογιστεί αφού η ορίζουσα του $\left[\mathbf{X}'\mathbf{X}\right]$ είναι μηδενική

- Πρόβλημα δημιουργεί όχι μόνο η ***τέλεια*** αλλά και η ***υψηλή*** πολυσυγραμμικότητα.
  Όταν δηλαδή μεταξύ μιας ανεξάρτητης μεταβλητής και ενός γραμμικού μετασχηματισμού των υπολοίπων υπάρχει ***υψηλός βαθμός συσχέτισης***.

- Η Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων δεν μπορεί να διακρίνει με ακρίβεια τον ιδιαίτερο ρόλο των μεταβλητών που συσχετίζονται.

- Πρόκειται για ένα φαινόμενο που έχει να κάνει με το συγκεκριμένο δείγμα και πολύ λιγότερο με την θεωρητική σχέση των μεταβλητών.

Συνέπειες πολυσυγγραμμικότητας

- Όλες οι ***επιθυμητές ιδιότητες*** των εκτιμητριών (αμεροληψία, αποτελεσματικότητα, συνέπεια κ.λ.π.) ***παραμένουν***. Επίσης όλοι οι ***στατιστικοί έλεγχοι ισχύουν***.

- Οι προβλέψεις δεν επηρεάζονται από την ύπαρξη υψηλής πολυσυγγραμμικότητας.

- Αυξάνει το μέγεθος των ***τυπικών σφαλμάτων*** των εκτιμητριών και κατά συνέπεια μειώνει τις τιμές της στατιστικής t στους ελέγχους.

Στην περίπτωση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών

$$S_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\frac{\sum \hat{u}_i^2 / (n-3)}{\sum \left(X_{1i} - \bar{X}_1\right)^2 \left(1 - r_{12}^2\right)}}$$

Τα διαστήματα εμπιστοσύνης έχουν μεγάλο εύρος $\Rightarrow$ Πιο συχνά δεχόμαστε την μηδενική υπόθεση.

Μειώνεται η πιθανότητα οι εκτιμήσεις των συντελεστών να είναι **στατιστικά σημαντικοί**

Αυξάνεται η πιθανότητα οι εκτιμήσεις των συντελεστών να έχουν **μη αναμενόμενα πρόσημα**

Μπορεί να οδηγήσει σε σφάλμα εξειδικεύσεως.

Παρόλα αυτά το R^2 μπορεί να παραμένει υψηλό.

- Οι εκτιμήσεις δείχνουν μεγάλη ευαισθησία σε διαφορετικές εξειδικεύσεις (προσθήκη ή αφαίρεση μεταβλητών)

- Η συνδιακύμανση των εκτιμητριών δύο μεταβλητών με υψηλό συντελεστή συσχέτισης είναι μεγάλη και δυσκολεύει την διάκριση των ιδιαίτερων ρόλων των δύο μεταβλητών.

Παράδειγμα

Έστω η ακόλουθη μήτρα παρατηρήσεων των Χ:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0 & -5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} 41 & 25 \\ 25 & 50 \end{bmatrix} \quad \rho_{12} = 0.55$$

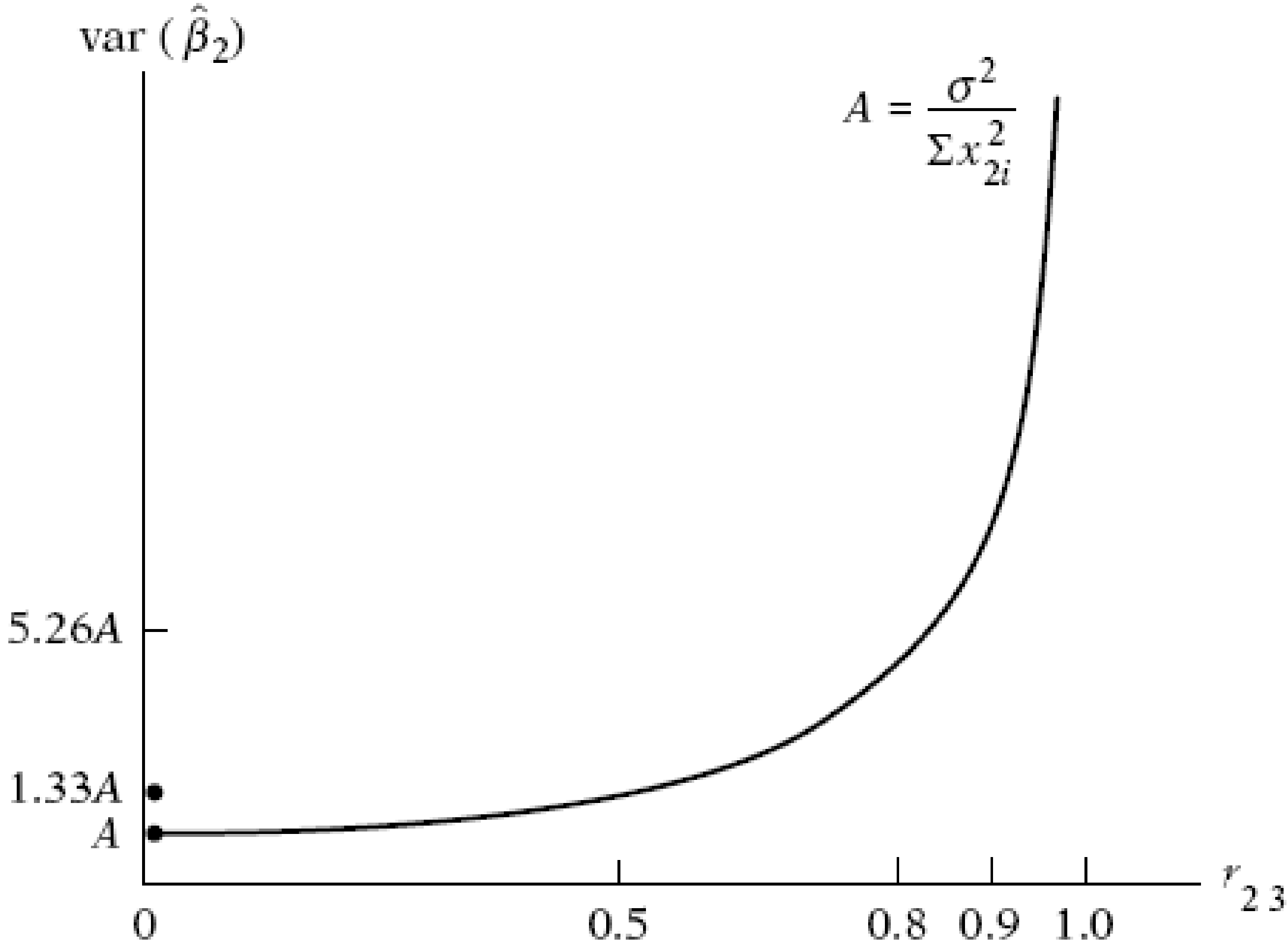
$$V\left(\hat{b}\right) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 0.035 & -0.017 \\ -0.017 & 0.028 \end{bmatrix}$$

Έστω τώρα ότι η μήτρα των Χ μεταβάλλεται σε:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 0 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} 41 & 45 \\ 45 & 50 \end{bmatrix} \quad \rho_{12} = 0.998$$

$$V\left(\hat{b}\right) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 2 & -1.8 \\ -1.8 & 1.64 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα



var ($\hat{\beta}_2$)
$A = \dfrac{\sigma^2}{\Sigma x_{2i}^2}$
5.26A
1.33A
A
0
0.5
0.8
0.9
1.0
r_{23}

Παράδειγμα

$$Consumption = b_0 + b_1 Income + b_2 Wealth + u$$

Τιμή του r_{12}	95% διάστημα εμπιστοσύνης για το b_1
0.00	$\hat{b}_1 \pm 1.96\sqrt{\sigma^2/\sum x_{1i}^2}$
0.50	$\hat{b}_1 \pm 1.96\sqrt{1.33}\sqrt{\sigma^2/\sum x_{1i}^2}$
0.95	$\hat{b}_1 \pm 1.96\sqrt{10.26}\sqrt{\sigma^2/\sum x_{1i}^2}$
0.995	$\hat{b}_1 \pm 1.96\sqrt{100}\sqrt{\sigma^2/\sum x_{1i}^2}$
0.999	$\hat{b}_1 \pm 1.96\sqrt{500}\sqrt{\sigma^2/\sum x_{1i}^2}$

Παράδειγμα

Y	X2	X3
1	2	4
2	0	2
3	4	12
4	6	0
5	8	16

Y	X2	X3
1	2	4
2	0	2
3	4	0
4	6	12
5	8	16

$$\hat{Y} = 1.1939 + 0.4463X_2 + 0.003X_3$$
$$(0.773) \quad (0.1848) \quad (0.0851)$$
$$t = (1.543) \quad (2.415) \quad (0.035)$$
$$R^2 = 0.81$$
$$r_{23} = 0.552$$

$$\hat{Y} = 1.2108 + 0.4014X_2 + 0.027X_3$$
$$(0.748) \quad (0.272) \quad (0.125)$$
$$t = (1.618) \quad (1.475) \quad (0.216)$$
$$R^2 = 0.81$$
$$r_{23} = 0.828$$

Ανίχνευση πολυσυγραμμικότητας

Είναι πρακτικά απίθανος ο μηδενικός βαθμός συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών.

Σκόπος είναι η ανίχνευση του βαθμού πολυσυγγραμμικότητας και όχι η ύπαρξή της

Ενδείξεις

- Πολλοι συντελεστές οι οποίοι δεν διαφέρουν στατιστικά από το μηδέν (χαμηλή τιμή της στατιστικής t) αλλά συγχρόνως υψηλό R^2
- Υψηλοί συντελεστές συσχέτισης μεταξύ ανεξάρτητων μεταβλητών (ικανή αλλά όχι αναγκαία προϋπόθεση)
- Οι εκτιμήσεις των συντελεστών μεταβάλλονται δραστικά όταν ανεξάρτητες μεταβλητές προσθέτονται ή αφαιρούνται.

Έχουν διατυπωθεί σοβαρές αντιρρήσεις για τους στατιστικούς ελέγχους πολυσυγγραμμικότητας που έχουν αναπτυχθεί.
Δεν υπάρχει ομοφωνία για το αν είναι δυνατό να ύπαρξουν τέτοιοι έλεγχοι.

Συντελεστής Διογκώσεως της Διακυμάνσεως (VIF)

Έστω $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i}$

Βήμα 1ο

Εκτίμηση των συναρτήσεων

$$X_{1i} = a_1 + a_2 X_{2i} + a_3 X_{3i}$$

$$X_{2i} = a_2 + a_1 X_{1i} + a_3 X_{3i}$$

$$X_{3i} = a_3 + a_1 X_{1i} + a_2 X_{2i}$$

Υπολογισμός των

R_1^2

R_2^2

R_3^2

Βήμα 2ο

Υπολογισμός των

$$VIF\left(\hat{\beta}_1\right)=\frac{1}{1-R_1^2}$$

$$VIF\left(\hat{\beta}_2\right)=\frac{1}{1-R_2^2}$$

$$VIF\left(\hat{\beta}_3\right)=\frac{1}{1-R_3^2}$$

Δείχνει την ταχύτητα με την οποία αυξάνεται η διακύμανση ενός εκτιμητή όταν υπάρχει πολυσυγγραμικότητα.

$$V\left(\hat{\beta}_1\right)=\frac{\sigma^2}{\Sigma x_j^2}VIF_j$$

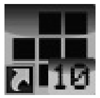
Όσο μεγαλύτερη η τιμή των VIF τόσο πιο σοβαρό το πρόβλημα (πρακτικά $VIF>10$ ή $R_j^2>0,90$).

Ικανή αλλά όχι αναγκαία ένδειξη

Συντελεστής ανεκτικότητας (TOL)

$$TOL_j = 1 - R_1^2 = \frac{1}{VIF_j}$$

Εάν η μεταβλητή δεν συσχετίζεται με τις υπόλοιπες μεταβλητές, τότε $TOL_j=1$ ενώ αν υπάρχει τέλεια συσχέτιση ανάμεσα στην X_j και τις υπόλοιπες μεταβλητές τότε $TOL_j=0$.



Λύσεις

Δεν υπάρχουν συγκεκριμένες λύσεις. Η εφευρετικότητα συνήθως αναπτύσσεται με την εμπειρία.

Μερικές χρήσιμες συμβουλές

- Αγνοήστε το θέμα τελείως αν δεν δημιουργεί πρόβλημα. Κυρίως αν δεν επηρεάζει την σημαντικότητα των συντελεστών.
- Ο μεγάλος αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών (για να είστε "μέσα") δεν βοηθάει συνήθως. Μειώστε τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών, κυρίως αυτών με $t<1$. Ελέξτε όμως την επίδρασή τους.
- Αυξήστε αν είναι δυνατό το μέγεθος του δείγματος
- Αλλάξτε τη μορφή της συνάρτησης. Ελέγξτε όμως τις πιθανές επιπτώσεις.

Ετεροσκεδαστικότητα

Το πρόβλημα

Το πρόβλημα της ετεροσκεδαστικότητας εμφανίζεται όταν παραβιάζεται η υπόθεση της ***σταθερής διακύμανσης*** του όρου σφάλματος

Δηλαδή δεν ισχύει $\operatorname{var}\left(u_i \middle| \mathbf{X}_i\right) = E\left(u_i^2 \middle| \mathbf{X}_i\right) = \sigma^2$

αλλά $\operatorname{var}\left(u_i \middle| \mathbf{X}_i\right) = E\left(u_i^2 \middle| \mathbf{X}_i\right) = \sigma_i^2$

και επειδή $u_i = Y_i - \left(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1i}\right)$

$$\operatorname{var}\left(u_i \middle| \mathbf{X}_i\right) = \operatorname{var}\left(Y_i \middle| \mathbf{X}_i\right) = \sigma_i^2$$

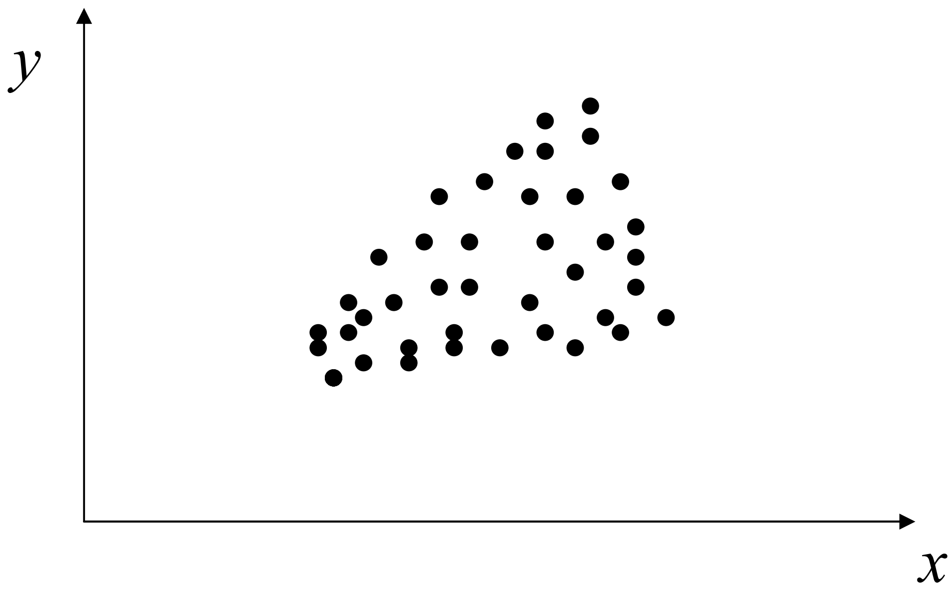
Δηλαδή, η δεσμευμένη διακύμανση της εξαρτημένης μεταβλητής ***δεν είναι σταθερή***.

Η φύση της ετεροσκεδαστικότητας

Ομοσκεδαστικότητα σημαίνει ότι η διασπορά των τιμών γύρω από τον μέσο δεν εξαρτάται από τις τιμές της ερμηνευτικής μεταβλητής Χ.

$$E\left(u_i^2\right) = \sigma^2$$

Δεν ισχύει όμως πάντα π.χ. η μεταβλητικότητα στην συμπεριφορά της αποταμιεύσεως περιμένουμε να είναι μεγαλύτερη στις οικογένειες με μεγάλο εισόδημα παρά στις οικογένειες με χαμηλό εισόδημα.



Οι συνέπειες της ετεροσκεδαστικότητας

- Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων εξακολουθεί να δίνει ***αμερόληπτες*** και ***συνεπείς*** εκτιμήτριες.
- Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων δεν δίνει πλέον τις πιο ***αποτελεσματικές*** εκτιμήτριες. Υπάρχουν άλλες αμερόληπτες εκτιμήτριες με μικρότερες διακυμάνσεις.
- Οι ***διακυμάνσεις*** των $\hat{\beta}$ είναι ***μεροληπτικές*** και ***ασυνεπείς***. Οι στατιστικοί έλεγχοι που βασίζονται στις διακυμάνσεις αυτές οδηγούν σε ***λάθος συμπεράσματα.***
- Οι ***προβλέψεις*** που βασίζονται στις εκτιμήτριες αυτές είναι ***αμερόληπτες*** αλλά μη ***αποτελεσματικές***.

Έλεγχος για την ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας

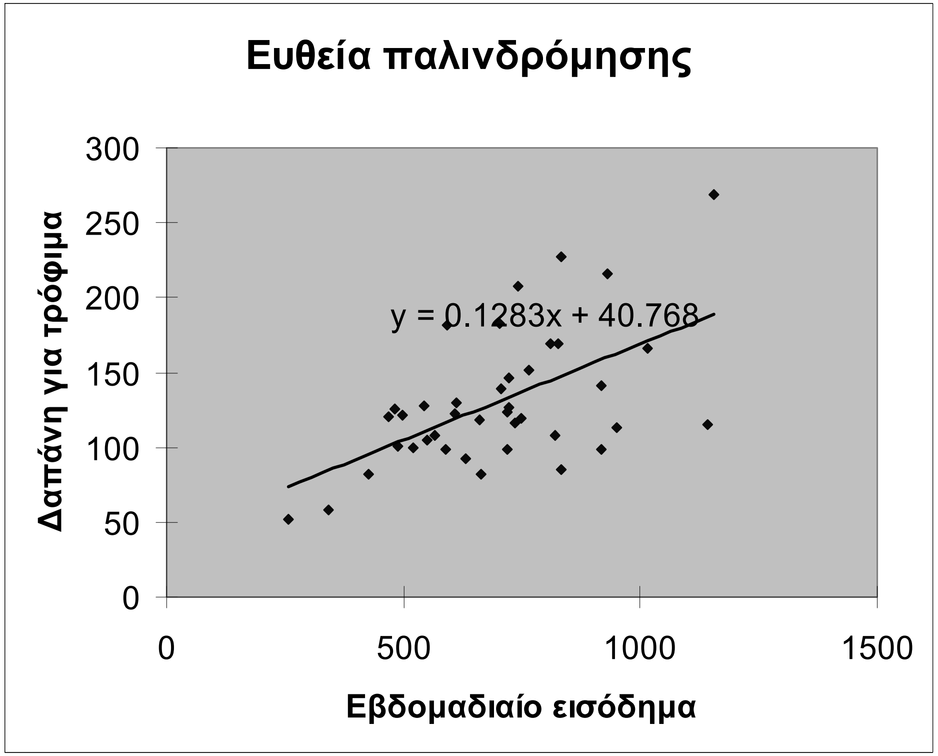
Επειδή πίσω από το πρόβλημα της ετεροσκεδαστικότητας υπάρχει πολλές φορές το πρόβλημα της ***εξειδίκευσης*** πρέπει πριν οποιοδήποτε έλεγχο να έχει αποφασιστεί η οριστική μορφή της συνάρτησης

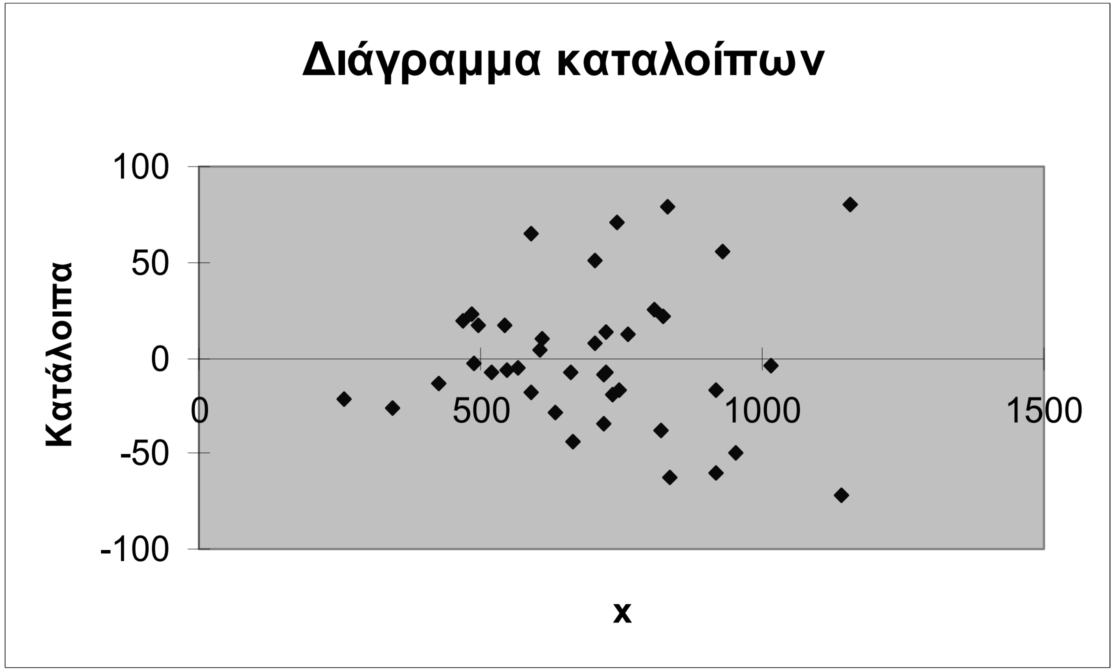
Διαγραμματικός έλεγχος

Η συνάρτηση εκτιμάται με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και υπολογίζονται τα $\hat{u}_i^2$ (εκτίμηση της διακύμανσης του u_i).

Κατασκευάζουμε ένα διάγραμμα διασποράς με τα $\hat{u}_i^2$ και την μεταβλητή που θεωρούμε ότι προκαλεί την ετεροσκεδαστικότητα ή με την $\hat{Y}_i$

Η μέθοδος αυτή λειτουργεί συμβουλευτικά μόνο.


Ευθεία παλινδρόμησης
y = 0.1283x + 40.768
Δαπάνη για τρόφιμα
Εβδομαδιαίο εισόδημα
0
50
100
150
200
250
300
0
500
1000
1500


Διάγραμμα καταλοίπων
Κατάλοιπα
x
100
50
0
-50
-100
0
500
1000
1500

Έλεγχος Goldfeld - Quant

Αν υπάρχει ομοσκεδαστικότητα τότε η διακύμανση του όρου σφάλματος για ένα υποσύνολο του δείγματος δεν θα πρέπει να διαφέρει στατιστικά από την διακύμανση ενός άλλου υποσυνόλου.

- Επιλέγεται η μεταβλητή η οποία θεωρείται ότι προκαλεί την ετεροσκαδαστικότητα και οι παρατηρήσεις κατατάσσονται κατά αύξουσα τάξη μεγέθους με βάση τις τιμές αυτής της μεταβλητής

- Από το σύνολο του δείγματος αφαιρούνται οι d παρατηρήσεις που βρίσκονται στο κέντρο της κατανομής. Η αρχική συνάρτηση εκτιμάται με βάση τα δύο υποσύνολα του δείγματος που απομένουν μεγέθους n_1 και n_2 $(n_1 = n_2)$.

- Ο αριθμός d επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε να αντιπροσωπεύει ένα ποσοστό μεταξύ του 1/3 και 1/6 των παρατηρήσεων και να αφήνει στην κάθε πλευρά του ικανό αριθμό παρατηρήσεων (n_1, n_2) για να εκτιμηθεί η αρχική συνάρτηση.

- Από τις εκτιμήσεις των δύο συναρτήσεων υπολογίζονται τα $\hat{\sigma}_1^2$ και $\hat{\sigma}_2^2$ και η στατιστική F.

$$F = \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2} = \frac{ESS_2/(n_2 - k)}{ESS_1/(n_1 - k)}$$

(Στον αριθμητή η μεγαλύτερη διακύμανση)

Αν $F > F(\pi\iota\nu\acute{\alpha}\kappa\omega\nu)$ απορρίπτεται η υπόθεση ομοσκεδαστικότητας

Παράδειγμα

Ταξινομούμε με βάση το X.

Αφαιρούμε 6 κεντρικές παρατηρήσεις (1/4)

Έτος	Αποταμίευση Y	Διαθέσιμο εισόδημα X
1958	9.8	105.5
1959	6.9	107.5
1960	9.1	111.9
1961	12.2	124.7
1962	16.0	130.1
1963	14.3	142.1
1964	22.2	155.3
1965	25.2	171.5
1966	26.2	182.4
1967	26.6	192.9
1968	24.0	204.2
1969	30.9	221.9
1970	34.7	240.5
1971	50.6	267.8
1972	57.1	289.4
1973	68.2	318.5
1974	44.6	296.5
1975	40.3	306.7
1976	42.7	324.1
1977	51.7	347.6
1978	61.6	373.6
1979	70.9	390.8

Παράδειγμα

Αποταμίευση Y	Διαθέσιμο εισόδημα X
9.8	105.5
6.9	107.5
9.1	111.9
12.2	124.7
16.0	130.1
14.3	142.1
22.2	155.3
25.2	171.5

Αποταμίευση Y	Διαθέσιμο εισόδημα X
57.1	289.4
68.2	318.5
44.6	296.5
40.3	306.7
42.7	324.1
51.7	347.6
61.6	373.6
70.9	390.8

$$\hat{Y}_1 = -19,71 + 0,26X \qquad \mathrm{R}^2 = 0,927$$
$$(3,95) \quad (0,029) \qquad \sum \hat{u}_1 = 21,01$$

$$\hat{Y}_2 = -6,22 + 0,18X \qquad \mathrm{R}^2 = 0,330$$
$$(35,5) \quad (0,10) \qquad \sum \hat{u}_2 = 643,05$$

$$F = \frac{\sum \hat{u}_2 / (n_2 - k)}{\sum \hat{u}_1 / (n_1 - k)} = \frac{643,05}{21,01} = 30,6$$

$$F = 30,6 > F_{(0.05),(6),(6)} = 4,28$$

Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση ομοσκεδαστικότητας άρα ο διαταρακτικός όρος χαρακτηρίζεται από ετεροσκεδαστικότητα.

Έλεγχος Park

Εκτίμηση της

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1i} + u_i$$

και υπολογισμός του

$$\hat{u}_i = Y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \ldots + \hat{\beta}_{k-1} X_{k-1i}\right)$$

εκτίμηση της $$\ln\left(\hat{u}_i^2\right) = a_0 + a_1 \ln\left(Z_{1i}\right) + v_i$$

Πιθανή αιτία ετεροσκεδαστικότητας

Αν α_1 στατιστικά διάφορο του 0 η υπόθεση της ομοσκεδαστικότητας απορρίπτεται, άρα έχουμε ετεροσκεδαστικότητα.

Οι μέθοδοι Goldfeld – Quant και Park αποδίδουν την ετεροσκεδαστικότητα σε μια μεταβλητή

Όμως η ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας ισοδυναμεί με απόρριψη της

$$H_0 : Var\left(u \middle| X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}\right) = \sigma^2$$

ή της $$H_0 : E\left(u^2 \middle| X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}\right) = E\left(u^2\right) = \sigma^2$$

Έλεγχος της H_0 $\Rightarrow$ Έλεγχος της σχέσης του u με τις $X_1 \ldots\ldots X_{k-1}$

Αν διαπιστωθεί σχέση μεταξύ u και έστω ενός X η H_0 απορρίπτεται

Έλεγχος Breusch-Pagan

Εκτίμηση της $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + ... + \beta_{k-1} X_{k-1i} + u_i$

και υπολογισμός $\hat{u}_i = Y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + ... + \hat{\beta}_{k-1} X_{k-1i}\right)$

Εκτίμηση της $\hat{u}_i^2 = \delta_0 + \delta_1 X_{1i} + \delta_2 X_{2i} + ... + \delta_{k-1} X_{k-1i} + v_i$

Έλεγχος της $H_0 : \delta_1 = \delta_2 = ... = \delta_{k-1} = 0$

υπολογισμός του $nR^2_{\hat{u}^2}$

Η H_0 απορρίπτεται αν

$$nR^2_{\hat{u}^2} > \chi^2_{a,k-1}$$

Σε αυτή την περίπτωση δεν δεχόμαστε την υπόθεση για την ύπαρξη ομοσκεδαστικότητας.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι με την κλασική μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα από 100 παρατηρήσεις:

$$\hat{Y} = 6,12 + 0,16X_1 + 1,07X_2 \qquad \mathrm{R}^2 = 0,46$$
$$(2,62) \ (0,034) \ (0,378)$$

Όπου Y οι οικογενειακές δαπάνες για τρόφιμα, X_1 το οικογενειακό εισόδημα και X_2 ο αριθμός ατόμων της οικογένειας.

Αν υποθέσουμε ότι η ετεροσκεδαστικότητα σχετίζεται και με τις δύο ερμηνευτικές μεταβλητές, εκτιμάμε τη βοηθητική παλινδρόμηση: $\hat{u}^2 = -28,6 + 0,36X_1 + 5,36X_2 \qquad \mathrm{R}^2_{\hat{u}^2} = 0,22$

$$nR^2_{\hat{u}^2} = 100 \cdot 0,22 = 22 \qquad \Rightarrow 22 > \chi^2{}_{0.05,2} = 5,991$$

Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση ότι οι συντελεστές στην βοηθητική παλινδρόμηση είναι ίσοι με το μηδέν, άρα δεν γίνεται δεκτή η υπόθεση ομοσκεδαστικότητας.

Έλεγχος Glesjer

Εκτίμηση της $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1i} + u_i$

και υπολογισμός $\hat{u}_i = Y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \ldots + \hat{\beta}_{k-1} X_{k-1i}\right)$

Εκτίμηση της $\hat{u}_i = \delta_0 + \delta_1 X_{1i} + \delta_2 X_{2i} + \ldots + \delta_{k-1} X_{k-1i} + v_i$

Έλεγχος της $H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_{k-1} = 0$

υπολογισμός του $nR_{\hat{u}}^2$

Η H_0 απορρίπτεται αν

$$nR^2_{\hat{u}} > \chi^2_{a,k-1}$$

Σε αυτή την περίπτωση δεν δεχόμαστε την υπόθεση για την ύπαρξη ομοσκεδαστικότητας.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι με την κλασική μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα από 100 παρατηρήσεις:

$$\underset{(2,62)}{\hat{Y} = 6,12} + \underset{(0,034)}{0,16X_1} + \underset{(0,378)}{1,07X_2} \qquad R^2 = 0,46$$

Όπου Y οι οικογενειακές δαπάνες για τρόφιμα, X_1 το οικογενειακό εισόδημα και X_2 ο αριθμός ατόμων της οικογένειας.

Αν υποθέσουμε ότι η ετεροσκεδαστικότητα σχετίζεται και με τις δύο ερμηνευτικές μεταβλητές, εκτιμάμε τη βοηθητική παλινδρόμηση: $\hat{u} = -14,5 + 0,22X_1 + 7,24X_2 \qquad R^2_{\hat{u}} = 0,31$

$$nR^2_{\hat{u}} = 100 \cdot 0,31 = 31 \qquad \Rightarrow 31 > \chi^2_{0.05,2} = 5,991$$

Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση ότι οι συντελεστές στην βοηθητική παλινδρόμηση είναι ίσοι με το μηδέν, άρα δεν γίνεται δεκτή η υπόθεση ομοσκεδαστικότητας.

Έλεγχος Harvey-Godfrey

Εκτίμηση της $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1i} + u_i$

και υπολογισμός $\hat{u}_i = Y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \ldots + \hat{\beta}_{k-1} X_{k-1i}\right)$

Εκτίμηση της $\ln \hat{u}_i^{\,2} = \delta_0 + \delta_1 X_{1i} + \delta_2 X_{2i} + \ldots + \delta_{k-1} X_{k-1i} + v_i$

Έλεγχος της $H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_{k-1} = 0$

υπολογισμός του $nR^2_{\hat{u}^2}$

Η H_0 απορρίπτεται αν

$$nR^2_{\ln \hat{u}^2} > \chi^2_{a,k-1}$$

Σε αυτή την περίπτωση δεν δεχόμαστε την υπόθεση για την ύπαρξη ομοσκεδαστικότητας.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι με την κλασική μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα από 100 παρατηρήσεις:

$$\hat{Y} = 6{,}12 + 0{,}16X_1 + 1{,}07X_2 \qquad \mathrm{R}^2 = 0{,}46$$
$$(2{,}62)\ \ (0{,}034)\ \ (0{,}378)$$

Όπου Y οι οικογενειακές δαπάνες για τρόφιμα, X_1 το οικογενειακό εισόδημα και X_2 ο αριθμός ατόμων της οικογένειας.

Αν υποθέσουμε ότι η ετεροσκεδαστικότητα σχετίζεται και με τις δύο ερμηνευτικές μεταβλητές, εκτιμάμε τη βοηθητική παλινδρόμηση: $\ln \hat{u}^2 = -24{,}32 + 0{,}31X_1 + 6{,}44X_2 \qquad \mathrm{R}^2_{\hat{u}^2} = 0{,}24$

$$nR^2_{\ln \hat{u}^2} = 100 \cdot 0{,}24 = 24 \qquad \Rightarrow 24 > \chi^2_{0.05,2} = 5{,}991$$

Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση ότι οι συντελεστές στην βοηθητική παλινδρόμηση είναι ίσοι με το μηδέν, άρα δεν γίνεται δεκτή η υπόθεση ομοσκεδαστικότητας.

Σύνοψη ελέγχων

Εκτίμηση της $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + ... + \beta_{k-1} X_{k-1i} + u_i$

και υπολογισμός $\hat{u}_i = Y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + ... + \hat{\beta}_{k-1} X_{k-1i}\right)$

Εκτίμηση της:

$\hat{u}_i^2 = \delta_0 + \delta_1 X_{1i} + \delta_2 X_{2i} + ... + \delta_{k-1} X_{k-1i} + v_i$ Breusch-Pagan

$\hat{u}_i = \delta_0 + \delta_1 X_{1i} + \delta_2 X_{2i} + ... + \delta_{k-1} X_{k-1i} + v_i$ Glesjer

$\ln \hat{u}_i^2 = \delta_0 + \delta_1 X_{1i} + \delta_2 X_{2i} + ... + \delta_{k-1} X_{k-1i} + v_i$ Harvey-Godfrey

Ειδική περίπτωση είναι ο έλεγχος Park.

Έλεγχος White

Εκτίμηση της $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1i} + u_i$

και υπολογισμός $\hat{u}_i = Y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \ldots + \hat{\beta}_{k-1} X_{k-1i}\right)$

Εκτίμηση της

$$\hat{u}_i^2 = \delta_0 + \delta_1 X_{1i} + \delta_2 X_{2i} + \ldots + \delta_{k-1} X_{k-1i} + \delta_k X_{1i}^2 + \delta_{k+1} X_{2i}^2 + \ldots + \delta_{2k-2} X_{k-1i}^2 \ldots. + \delta_{2k-1} X_1 X_2 + \delta_{2k} X_1 X_3 + \ldots + v_i$$

Έλεγχος της $H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \ldots.. = 0$ υπολογισμός του $R_{\hat{u}^2}^2$

Η H_0 απορρίπτεται αν

$$nR^2_{\hat{u}^2} > \chi^2_{a,\frac{k^2+k-2}{2}}$$

Σε αυτή την περίπτωση δεν δεχόμαστε την υπόθεση για την ύπαρξη ομοσκεδαστικότητας.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι από την βοηθητική παλινδρόμηση προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα από 100 παρατηρήσεις:

$$\hat{u}_2 = -61,4 + 2,34X_1 - 3,41X_2 - 0,0198X_1^{\,2} + 0,476X_2^{\,2} + 0,077X_1X_2$$

$$\mathrm{R}^2 = 0,298$$

$$nR^2_{\hat{u}} = 29.8 > \chi^2_{0.05,5} = 11.070$$

Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση ότι οι συντελεστές στην βοηθητική παλινδρόμηση είναι ίσοι με το μηδέν.

Άρα δεν γίνεται δεκτή η υπόθεση ομοσκεδαστικότητας.

Μέθοδοι εκτίμησης

Η μέθοδος των Γενικευμένων Ελαχίστων Τετραγώνων

Περίπτωση 1η - το σ_i^2 είναι γνωστό

Έστω $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$

$$\frac{Y_i}{\sigma_i} = \beta_0 \frac{1}{\sigma_i} + \beta_1 \frac{X_{1i}}{\sigma_i} + \beta_2 \frac{X_{2i}}{\sigma_i} + \frac{u_i}{\sigma_i}$$

$$Y_i^* = \beta_0 X_{0i}^* + \beta_1 X_{1i}^* + \beta_2 X_{2i}^* + u_i^*$$

Όμως $Var(u_i^*) = Var\left(\frac{u_i}{\sigma_i}\right) = \frac{Var(u_i)}{\sigma_i^2} = 1$

Στο μετασχηματισμένο υπόδειγμα δεν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα

Μέθοδοι εκτίμησης

Οι εκτιμητές που παίρνουμε από την παλινδρόμηση:

$$Y_i^* = \beta_0 X_{0i}^* + \beta_1 X_{1i}^* + \beta_2 X_{2i}^* + u_i^* \qquad \text{(χωρίς σταθερό όρο)}$$

είναι άριστοι αμερόληπτοι γραμμικοί εκτιμητές (BLUE).

Η διαδικασία αυτή είναι μια ειδική περίπτωση της μεθόδου των **Γενικευμένων Ελαχίστων Τετραγώνων (GLS)**.

Η μέθοδος GLS στην περίπτωση της ετεροσκεδαστικότητας συμπίπτει με την **Σταθμική** μέθοδο των **Ελαχίστων Τετραγώνων (WLS)**.

Αν ορίσουμε ως $w_i = 1/\sigma_i$

$$\frac{Y_i}{\sigma_i} = \beta_0 \frac{1}{\sigma_i} + \beta_1 \frac{X_{1i}}{\sigma_i} + \beta_2 \frac{X_{2i}}{\sigma_i} + \frac{u_i}{\sigma_i} \quad \Rightarrow w_i Y_i = w_i \beta_0 + \beta_1 w_i X_{1i} + \beta_2 w_i X_{2i} + w_i u_i$$

Μέθοδοι εκτίμησης

Η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος του τετραγώνου των καταλοίπων της $w_i Y_i = w_i \beta_0 + \beta_1 w_i X_{1i} + \beta_2 w_i X_{2i} + w_i u_i$

είναι ταυτόσημη με:

$$\sum (w_i u_i)^2 = \sum (w_i Y_i - w_i \beta_0 - \beta_1 w_i X_{1i} - \beta_2 w_i X_{2i})^2$$

Σε κάθε παρατήρηση δηλαδή, και για κάθε μια μεταβλητή δίνεται μια στάθμιση, που είναι αντιστρόφως ανάλογη της τυπικής απόκλισης του u_i.

Πρακτικά όμως είναι απίθανο να ξέρουμε την τυπική απόκλιση του u_i και γι' αυτό καταφεύγουμε σε άλλες μεθόδους για την περίπτωση της ετεροσκεδαστικότητας.

☀

Περίπτωση 2η - το σ_i^2 δεν είναι γνωστό. Είναι όμως γνωστός ο παράγοντας Z_ι στη σχέση $\sigma_i=\sigma Z_i$

$$\frac{Y_i}{Z_i}=\beta_0\frac{1}{Z_i}+\beta_1\frac{X_{1i}}{Z_i}+\beta_2\frac{X_{2i}}{Z_i}+\frac{u_i}{Z_i}$$

$$Y_i^*=\beta_0X_{0i}^*+\beta_1X_{1i}^*+\beta_2X_{2i}^*+u_i^*$$

$$Var\left(u_i^*\right)=Var\left(\frac{u_i}{Z_i}\right)=\frac{Var\left(u_i\right)}{Z_i^2}=\frac{\sigma^2Z_i^2}{Z_i^2}=\sigma^2$$

Θα πάρουμε ακριβώς τους ίδιους εκτιμητές αν εφαρμόσουμε την Σταθμική μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων στο αρχικό υπόδειγμα:

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_{1i}+\beta_2X_{2i}+u_i$$

με στάθμιση: $$w_i=\frac{1}{\sigma Z_i}$$

Παράδειγμα:

$$\hat{Y}_i = 6.116 + 0.160X_{1i} + 1.071X_{2i} \qquad R^2 = 0.461$$
$$(2.617)\ (0.034)\quad (0.378)$$

Υπόθεση: $\sigma_i = \sigma X_{1i}$

$$\frac{Y_i}{X_{1i}} = \beta_0 \frac{1}{X_{1i}} + \beta_1 + \beta_2 \frac{X_{2i}}{X_{1i}}$$

$$Y_i^* = \beta_0 X_{1i}^* + \beta_1 + \beta_2 X_{2i}^*$$

$$\hat{Y}_i^* = 0.154X_{1i}^* + 5.879 + 1.195X_{2i}^*$$
$$(0.031)\quad (2.007)\ (0.287)$$

$$\hat{Y}_i = 0.154 + 5.879X_{1i} + 1.195X_{2i}$$
$$(0.031)\ \ (2.007)\quad (0.287)$$

Περίπτωση 3η - το σ_i^2 δεν είναι γνωστό ούτε και ο παράγοντας Z_{ι}. Εκτιμάται η σχέση της διακύμανσης σ_i^2 και των πιθανών παραγόντων που την επηρεάζουν.

Υποθέτουμε ότι οι παράγοντες που δημιουργούν το πρόβλημα της ετεροσκεδαστικότητας είναι περισσότεροι από ένας

Αν $Z_i^2 = e^{a_0 + a_1 X_{1i} + a_2 X_{2i}}$ $\qquad \sigma_i^2 = \sigma^2 e^{a_0 + a_1 X_{1i} + a_2 X_{2i}}$

Αν α_0, α_1 και α_2 γνωστά χρησιμοποιείται η προηγούμενη μέθοδος

Επειδή είναι άγνωστα εκτιμώνται μέσω της συνάρτησης

$$u_i^2 = \sigma^2 e^{a_0 + a_1 X_{1i} + a_2 X_{2i}} \varepsilon_i \qquad \varepsilon_i \sim \left(1, \sigma_\varepsilon^2\right)$$

Επειδή το u είναι άγνωστο προσεγγίζεται με το $\hat{u}$

Έτσι $$\ln \hat{u}_i^2 = \left(\ln \sigma^2 + a_0\right) + a_1 X_{1i} + a_2 X_{2i} + v$$

όπου $v_i \sim \left(0, \sigma_v^2\right)$

Ορίζουμε $g_i = \hat{u}_1^2$ $\delta_0 = \ln\sigma^2 + a_0$

έτσι $\ln g_i = \delta_0 + a_1 X_{1i} + a_2 X_{2i} + v_i$

Εκτιμώντας την συνάρτηση προκύπτουν

$\hat{\delta}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$ και $\overset{\wedge}{\ln g}$ $\Rightarrow \hat{g} = e^{\overset{\wedge}{\ln g}}$

Η $\hat{g}$ Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως συντελεστής στάθμισης και να εφαρμοστεί η σταθμική μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων.

$$\frac{Y_i}{\hat{g}_i} = \beta_0 \frac{1}{\hat{g}_i} + \beta_1 \frac{X_{1i}}{\hat{g}_i} + \beta_2 \frac{X_{2i}}{\hat{g}_i}$$

Αντί της $\ln g_i = \delta_0 + a_1 X_{1i} + a_2 X_{2i} + v_i$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί η

$$\ln g_i = \delta_0 + a_1 \hat{Y}_i + a_2 \hat{Y}_i^2 + v_i$$

Παράδειγμα:

$$\hat{Y}_i = 6.116 + 0.160X_{1i} + 1.071X_{2i} \qquad R^2 = 0.461$$
$$(2.617) \ (0.034) \quad (0.378)$$

$$\widehat{\ln g} = -1.591 + 0.030X_{1i} + 0.243X_{2i} \qquad R^2 = 0.110$$
$$(-1.166) \ (1.698) \quad (1.233)$$

$$\frac{\hat{Y}_i}{\hat{g}_i} = 7.656\frac{1}{\hat{g}_i} + 0.156\frac{X_{1i}}{\hat{g}_i} + 0.677\frac{X_{2i}}{\hat{g}_i} \qquad R^2 = 0.923$$
$$(1.479) \quad (0.029) \quad (0.245)$$

Η μέθοδος της συνεπούς μήτρας διακυμάνσεων (White)

Διορθώνει τις διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις χωρίς να αλλάζει τις εκτιμήσεις των συντελεστών

Οι συνεπείς διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις προκύπτουν από την εφαρμογή του τύπου

$$\frac{n}{n-k}(X'X)^{-1}\left(\sum \hat{u}_i^2 x_i x_i'\right)(X'X)^{-1}$$

Ειδικότερα $Var\left(\hat{\beta}_j\right)=\dfrac{\sum \hat{r}_{ij}^2 \hat{u}_i^2}{\sum \left(X_{ij}-\bar{X}_j\right)^2}$

όπου $\hat{r}_{ij}^2$ το κατάλοιπο από την $X_j = f(\upsilon\pi\acute{o}\lambda o\iota\pi\alpha\ X)$

Παράδειγμα:

$$\hat{Y}_i = 6.116 + 0.160X_{1i} + 1.071X_{2i} \qquad R^2 = 0.461$$

$$(2.617) \quad (0.034) \qquad (0.378)$$

$$\hat{Y}_i = 6.116 + 0.160X_{1i} + 1.071X_{2i} \qquad R^2 = 0.461$$

$$(2.358) \quad (0.028) \qquad (0.403)$$

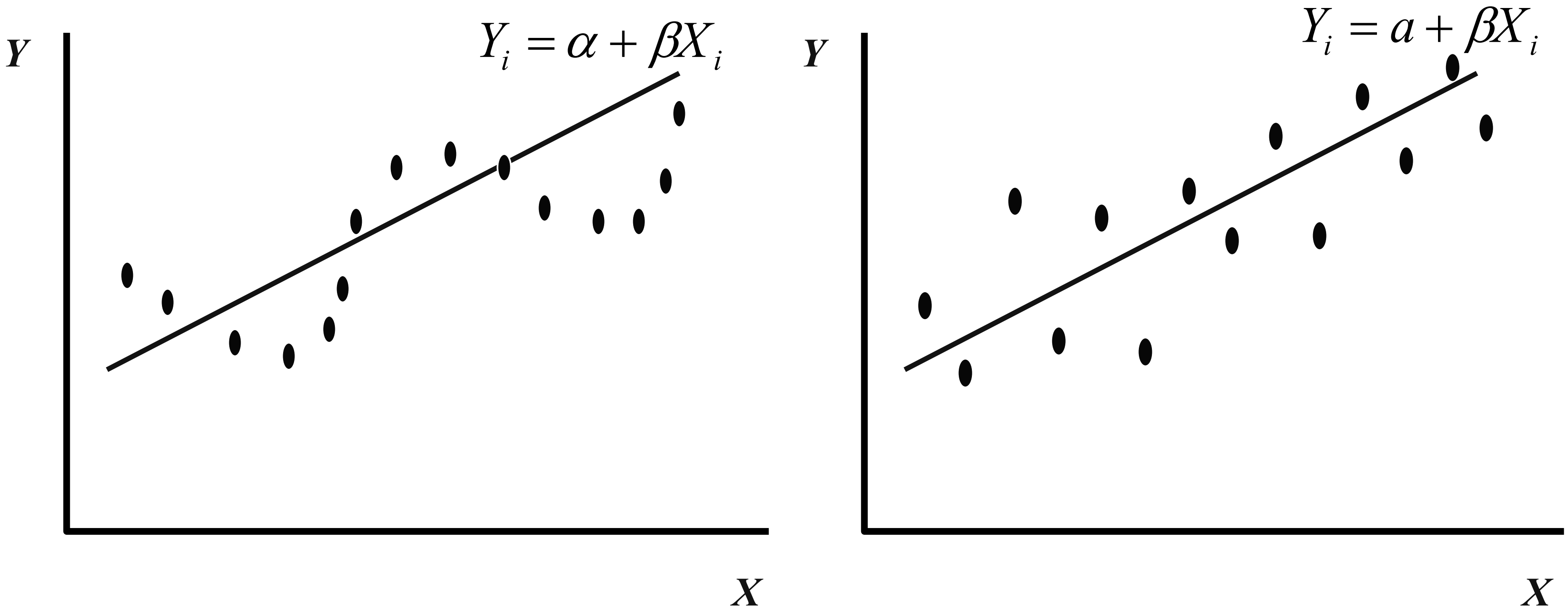
Αυτοσυσχέτιση

Το πρόβλημα

Το πρόβλημα της αυτοσυσχέτισης εμφανίζεται όταν παραβιάζεται η υπόθεση της ***μη συσχέτισης των σφαλμάτων***

Δηλαδή $\operatorname{cov}(u_i u_j) \neq 0 \quad \forall i \neq j$

Υπάρχει όταν η ***σειρά*** με την οποία εμφανίζονται οι παρατηρήσεις έχει νόημα



Αυτοσυσχέτιση 1ου βαθμού

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1t} + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s}) = 0 \quad \forall s \neq 0$$

Διαδικασία αυτοσυσχέτισης 1ου βαθμού
AR(1)

$$-1 < \rho < 1$$

Συντελεστής αυτοσυσχέτισης 1ου βαθμού

$\rho > 0$ **Θετική αυτοσυσχέτιση**

$\rho < 0$ **Αρνητική αυτοσυσχέτιση**

Οι συνέπειες της αυτοσυσχέτισης

- Οι εκτιμητές που προκύπτουν από την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και οι προβλέψεις που βασίζονται σε αυτούς εξακολουθούν να είναι ***αμερόληπτοι*** και ***συνεπείς***.
- Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων δεν δίνει πλέον τους πιο ***αποτελεσματικούς*** εκτιμητές και προβλέψεις. Υπάρχουν άλλοι αμερόληπτοι εκτιμητές με μικρότερες διακυμάνσεις.
- Αν μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών περιλαμβάνεται η εξαρτημένη με ***χρονική υστέρηση*** π.χ. Y_{t-1} , τότε οι εκτιμητές ***δεν είναι ούτε συνεπείς***.
- Οι εκτιμητές των ***διακυμάνσεων*** των $\hat{\beta}$ είναι ***μεροληπτικοί*** και ***ασυνεπείς***. Οι στατιστικοί έλεγχοι που βασίζονται στις διακυμάνσεις αυτές οδηγούν σε ***λάθος συμπεράσματα.***

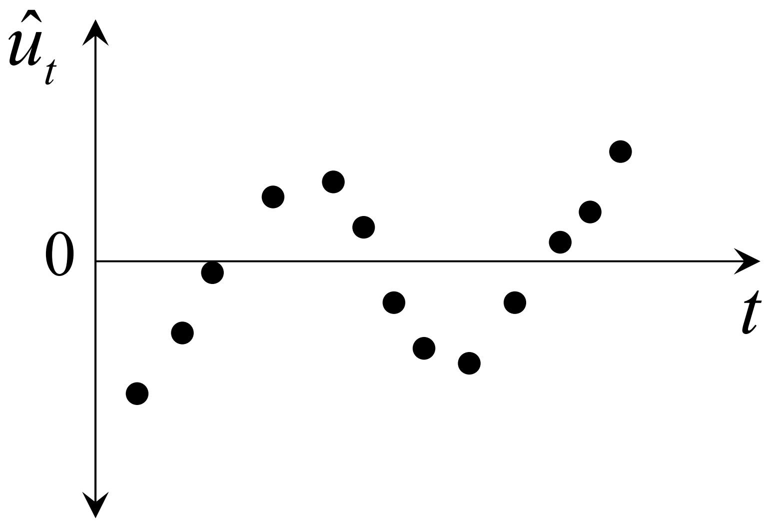
Ανίχνευση της αυτοσυσχέτισης

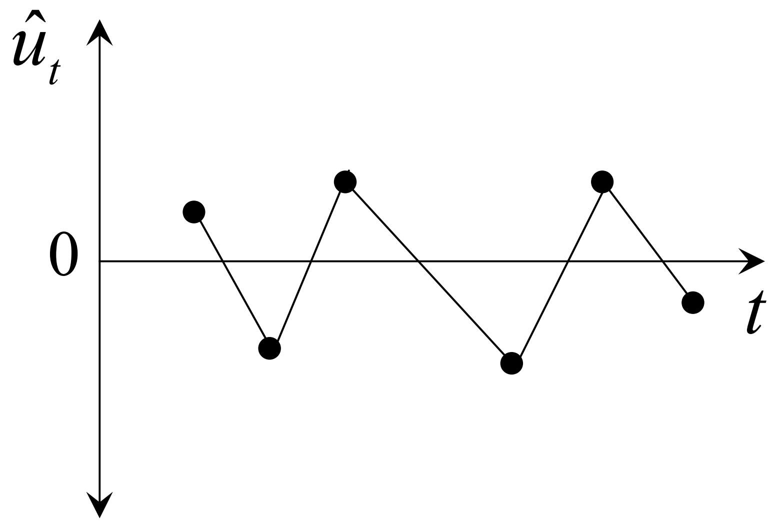
Διαγραμματική παρουσίαση

Η συνάρτηση εκτιμάται με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και υπολογίζονται τα $\hat{u}_t$.

Κατασκευάζουμε ένα διάγραμμα όπου στον κάθετο άξονα εμφανίζεται το $\hat{u}_t$ και στον οριζόντιο ο χρόνος (t).

Η μέθοδος αυτή λειτουργεί συμβουλευτικά μόνο.





Ο έλεγχος Durbin - Watson

Για να χρησιμοποιηθεί πρέπει:

- Να υπάρχει σταθερός όρος β_0
- Η υπόθεση που ελέγχεται να αφορά πρώτου βαθμού αυτοσυσχέτιση
- Να μην υπάρχει ως ανεξάρτητη μεταβλητή η εξαρτημένη με χρονική υστέρηση

Εκτίμηση της εξίσωσης $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1t} + u_t$

Υπολογισμός των $\hat{u}_i$

Υπολογισμός της στατιστικής $\boldsymbol{d}$ **(Durbin-Watson)**

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} \left(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \left(\hat{u}_t^2\right)}$$

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t^2 + \sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}^2 - 2\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \left(\hat{u}_t^2\right)}$$

Επειδή οι εκτιμήσεις των σφαλμάτων για μεγάλα δείγματα είναι συνήθως μικροί αριθμοί

$$\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t^2 \approx \sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}^2 \approx \sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2$$

$$d \approx \frac{2\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2 - 2\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \left(\hat{u}_t^2\right)} = 2\left(1 - \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \left(\hat{u}_t^2\right)}\right) \approx 2\left(1 - \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} \left(\hat{u}_{t-1}^2\right)}\right)$$

Επειδή όμως $\frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} \left(\hat{u}_{t-1}^2\right)} = \hat{\rho}$ $\quad d \approx 2\left(1 - \hat{\rho}\right)$ ➡

$\hat{\rho} \to 1 \quad d \to 0$ Θετική αυτοσυσχέτιση

$\hat{\rho} \to -1 \quad d \to 4$ Αρνητική αυτοσυσχέτιση

$\hat{\rho} \to 0 \quad d \to 2$ Μηδενική αυτοσυσχέτιση

Διαπιστώνεται ότι όταν το *d* ή το *4-d* τείνουν στο *0* η πιθανότητα ύπαρξης αυτοσυσχέτισης αυξάνει ενώ όταν το *d* ή το *4-d* τείνουν στο *2* μειώνεται.

$H_0 : \rho = 0$

$H_1 : \rho > 0$ *(d<2)*

$d \le d_L$

Η H_0 απορρίπτεται

$d \ge d_U$

Η H_0 δεν απορρίπτεται

$d_L \le d \le d_U$

Δεν υπάρχει συμπέρασμα

$H_0 : \rho = 0$

$H_1 : \rho < 0$ *(d>2)*

$4 - d \le d_L$

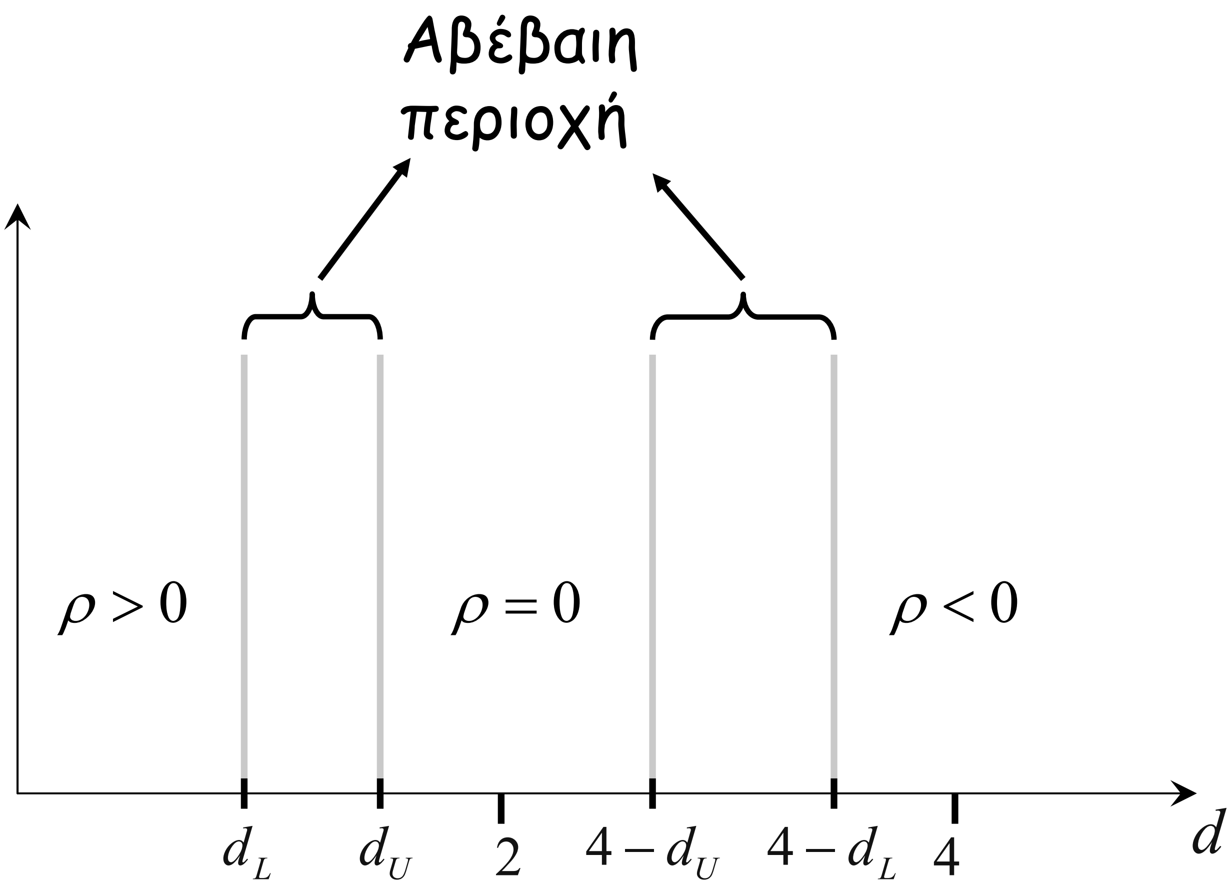
Η H_0 απορρίπτεται

$4 - d \ge d_U$

Η H_0 δεν απορρίπτεται

$d_L \le 4 - d \le d_U$

Δεν υπάρχει συμπέρασμα


Αβέβαιη
περιοχή
$\rho > 0$
$\rho = 0$
$\rho < 0$
d_L
d_U
2
$4-d_U$
$4-d_L$
4
d

Μειονεκτήματα

- Είναι δυνατό να δώσει αποτελέσματα που δεν οδηγούν σε συμπεράσματα
- Δεν είναι κατάλληλο στην περίπτωση που μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών περιλαμβάνεται η εξαρτημένη με χρονική υστέρηση.
- Δεν είναι κατάλληλο όταν η αυτοσυσχέτιση είναι μεγαλύτερου βαθμού.

Παράδειγμα

t	Y	X	$\hat{u}_t$	$\hat{u}_t^2$	$\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}$	$(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2$
1958	5.121	105.508	0.028	0.001		
1959	4.134	107.497	-1.033	1.067	-1.062	1.127
1960	4.653	111.875	-0.678	0.460	0.355	0.126
1961	5.622	124.676	-0.189	0.036	0.489	0.239
1962	5.499	130.118	-0.516	0.267	-0.327	0.107
1963	6.453	142.140	-0.013	0.000	0.503	0.253
1964	7.093	155.338	0.132	0.017	0.145	0.021
1965	8.907	171.456	1.341	1.799	1.210	1.463
1966	8.625	182.420	0.648	0.420	-0.693	0.480
1967	9.204	192.895	0.834	0.696	0.186	0.035
1968	9.647	204.164	0.855	0.731	0.020	0.000
1969	10.167	221.908	0.709	0.503	-0.145	0.021
1970	9.961	240.471	-0.193	0.037	-0.902	0.814
1971	10.580	267.849	-0.600	0.360	-0.408	0.166
1972	10.658	289.450	-1.332	1.775	-0.732	0.536
1973	13.139	318.550	0.057	0.003	1.390	1.931
Αθροίσματα				**8.174**		**7.320**

Έστω ότι εκτιμήθηκε η συνάρτηση $\hat{Y}_t = 1,136 + 0,0375 X_t$
την οποία θέλουμε να ελέγξουμε για την ύπαρξη αυτοσυσχέτισης.
Υπολογίζουμε την στατιστική d:

$$d = \frac{\sum(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum \hat{u}_t^2} = \frac{7,320}{8,174} = 0,89$$

Για $\alpha=5\%$, $T=16$, $K=1$ είναι
$d_L=1,1$ και $d_U=1,37$

$d < d_L$ άρα $\rho>0$.

Παράδειγμα

Εάν είχαμε εκτιμήσει την $\hat{Y}_t = 6{,}409 - 7{,}002 X_{1t} + 0{,}0453 X_{2t}$ τότε η d θα ήτανε:

$$d = \frac{\sum\left(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}\right)^2}{\sum \hat{u}_t^2} = \frac{7{,}074}{5{,}735} = 1{,}23$$

Για $\alpha=5\%$, $T=16$, $K=2$ είναι $d_L=0.98$ και $d_U=1{,}54$

$d_L < d < d_U$ άρα δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα.

Ο έλεγχος του πολλαπλασιαστή Lagrange

Ισοδυναμεί με ένα έλεγχο προσθήκης μιας νέας μεταβλητής $(\hat{u}_{t-1})$

Εφαρμόζεται όταν έχουμε τουλάχιστον 30 βαθμούς ελευθερίας.

- Εκτίμηση της εξίσωσης $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + ... + \beta_{k-1} X_{k-1t} + u_t$
- Υπολογισμός των $\hat{u}_i$
- Εκτίμηση της εξίσωσης $\hat{u}_t = \gamma_0 + \gamma_1 X_{1t} + ... + \gamma_{k-1} X_{k-1t} + \rho \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t$

Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας του ρ

- Υπολογίζεται η στατιστική $(n-1)R^2$
- Η στατιστική αυτή ακολουθεί την κατανομή χ^2 με 1 βαθμό ελευθερίας (ο αριθμός των περιορισμών, $\rho=0$)
- Αν $(n-1)R^2 > \chi_1^2$ απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση $(\rho=0)$

Παράδειγμα

t	Y	X	$\hat{u}_t$	$\hat{u}_{t-1}$
1958	5.121	105.508	0.028	
1959	4.134	107.497	-1.033	0.028
1960	4.653	111.875	-0.678	-1.033
1961	5.622	124.676	-0.189	-0.678
1962	5.499	130.118	-0.516	-0.189
1963	6.453	142.140	-0.013	-0.516
1964	7.093	155.338	0.132	-0.013
1965	8.907	171.456	1.341	0.132
1966	8.625	182.420	0.648	1.341
1967	9.204	192.895	0.834	0.648
1968	9.647	204.164	0.855	0.834
1969	10.167	221.908	0.709	0.855
1970	9.961	240.471	-0.193	0.709
1971	10.580	267.849	-0.600	-0.193
1972	10.658	289.450	-1.332	-0.600
1973	13.139	318.550	0.057	-1.332

Έστω ότι εκτιμήθηκε η συνάρτηση $\hat{Y}_t = 1,136 + 0,0375X_t$
την οποία θέλουμε να ελέγξουμε για την ύπαρξη αυτοσυσχέτισης.
Εκτιμάμε την: $\hat{u}_t = b_0 + b_1 X_t + \rho \hat{u}_{t-1}$

$$\hat{u}_t = -0.05 + 0.0002X_t + 0.55\hat{u}_{t-1} \qquad \mathrm{R}^2 = 0.30$$

$$(0.56) \quad (0.003) \quad (0.24) \qquad (n-1)R^2 = 15 \cdot 0,3 = 4.5 > \chi_1^2 = 3,84$$

Έλεγχος με την στατιστική t

Όπως και στην περίπτωση του πολλαπλασιαστή Lagrange, χρειαζόμαστε μεγάλο δείγμα.

- Εκτίμηση της εξίσωσης $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + ... + \beta_{k-1} X_{k-1t} + u_t$
- Υπολογισμός των $\hat{u}_i$
- Εκτίμηση της εξίσωσης $\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t$
- Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας του ρ:

Υπολογισμός της στατιστικής t: $t = \dfrac{\hat{\rho} - 0}{S_{\hat{\rho}}}$

Και σύγκριση με την t των πινάκων: $t_{a/2, n-k}$

Εάν $|t| > t_{a/2, n-k}$ απορρίπτεται η H_0.

Παράδειγμα

t	Y	X	$\hat{u}_t$	$\hat{u}_{t-1}$
1958	5.121	105.508	0.028	
1959	4.134	107.497	-1.033	0.028
1960	4.653	111.875	-0.678	-1.033
1961	5.622	124.676	-0.189	-0.678
1962	5.499	130.118	-0.516	-0.189
1963	6.453	142.140	-0.013	-0.516
1964	7.093	155.338	0.132	-0.013
1965	8.907	171.456	1.341	0.132
1966	8.625	182.420	0.648	1.341
1967	9.204	192.895	0.834	0.648
1968	9.647	204.164	0.855	0.834
1969	10.167	221.908	0.709	0.855
1970	9.961	240.471	-0.193	0.709
1971	10.580	267.849	-0.600	-0.193
1972	10.658	289.450	-1.332	-0.600
1973	13.139	318.550	0.057	-1.332

Έστω ότι εκτιμήθηκε η συνάρτηση $\hat{Y}_t = 1{,}136 + 0{,}0375 X_t$
την οποία θέλουμε να ελέγξουμε για την ύπαρξη αυτοσυσχέτισης.
Εκτιμάμε την: $\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1}$

$$\underset{(0.222)}{\hat{u}_t = 0.552 \hat{u}_{t-1}}$$

$$t = \frac{0.552 - 0}{0.222} = 2.477 > t_{0.025,14} = 2.145$$

Αμιγής και μη αμιγής αυτοσυσχέτιση

Η ύπαρξη αυτοσυσχέτισης μπορεί να οφείλεται σε λαθεμένη εξειδίκευση του υποδείγματος (***μη αμιγής αυτοσυσχέτιση***).
Π.χ. παράλειψη σημαντικής μεταβλητής.

Η ύπαρξη αρνητικής αυτοσυσχέτισης είναι συνήθως ισχυρή ένδειξη μη αμιγούς αυτοσυσχέτισης

Μέθοδοι εκτίμησης

Αλλαγή της συναρτησιακής μορφής

Πολλές φορές η αυτοσυσχέτιση είναι το αποτέλεσμα μη σωστής εξειδίκευσης του υποδείγματος. Έτσι, η προσθήκη ουσιαστικών μεταβλητών ή μεταβλητών που ήδη υπάρχουν αλλά με άλλη μορφή (X_2, $\ln X$ κ.λ.π.) μπορεί να οδηγήσει σε περιορισμό η εξάλειψη του προβλήματος.

☀

Η μέθοδος Cochrane-Orcutt (CORC)

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1,t} + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1,t} + u_t \qquad u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{1,t-1} + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1,t-1} + u_{t-1}$$

$$\rho Y_{t-1} = \rho\beta_0 + \rho\beta_1 X_{1,t-1} + \ldots + \rho\beta_{k-1} X_{k-1,t-1} + \rho u_{t-1}$$

$$Y_t - \rho Y_{t-1} =$$

$$\left(\beta_0 - \rho\beta_0\right) + \left(\beta_1 X_{1t} - \rho\beta_1 X_{1,t-1}\right) + \ldots + \left(\beta_{k-1} X_{k-1t} - \rho\beta_{k-1} X_{k-1,t-1}\right) + u_t - \rho u_{t-1}$$

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0\left(1-\rho\right) + \beta_1\left(X_{1t} - \rho X_{1,t-1}\right) + \ldots + \beta_{k-1}\left(X_{k-1t} - \rho X_{k-1,t-1}\right) + \varepsilon_t$$

$$Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_{1,t}^* + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1,t}^* + \varepsilon_t$$

$$\left\{\begin{array}{l} E\left(\varepsilon_t\right) = 0 \\ E\left(\varepsilon_t^2\right) = \sigma_\varepsilon^2 \\ E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s}\right) = 0 \quad \forall s \neq 0 \end{array}\right.$$

Ικανοποιούνται όλες τις υποθέσεις του κλασσικού γραμμικού υποδείγματος.
Θα μπορούσε να εκτιμηθεί με την μέθοδο των Ε.Τ. αν το ρ ήταν γνωστό.
Επειδή δεν είναι γνωστό ακολουθείται η εξής διαδικασία: ➡

- Εκτίμηση της εξίσωσης $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1t} + u_t$
- Υπολογισμός των $\hat{u}_i$
- Εκτίμηση του $\hat{\rho}$ από την εξίσωση $\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t$
- Υπολογισμός των $\begin{cases} Y_t^* = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} \\ X_{it}^* = X_{it} - \hat{\rho} X_{it-1} \end{cases}$
- Εκτίμηση της εξίσωσης $Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_{1t}^* + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1t}^* + \varepsilon_t$
- Με βάση τα $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_{k-1}$ και την αρχική εξίσωση υπολογίζονται νέες εκτιμήσεις $\hat{\hat{u}}_i$
- Με βάση την εξίσωση υπολογίζεται νέος συντελεστής αυτοσυσχέτισης $\hat{\hat{\rho}}$

Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι οι τιμές δύο διαδοχικών εκτιμήσεων του ρ να μη διαφέρουν σημαντικά (π.χ. $0{,}001$).

Παράδειγμα (Cochrane-Orcutt)

t	Y	X
1958	16.7	95.2
1959	15.1	99
1960	16.7	107.1
1961	18.5	121
1962	20.3	128.6
1963	24.1	143.6
1964	28.2	161.4
1965	34.5	183.4
1966	35.6	203.9
1967	36.7	220.4
1968	40.7	239.6
1969	46.5	271.5
1970	52.1	304.4
1971	57.8	338.2
1972	71.6	387.3
1973	117.1	497.2
1974	139.1	582.1
1975	173.9	691.4
1976	205.5	849.9
1977	234.2	994
1978	274.3	1190.1
1979	349.3	1464.8

Αν εκτιμήσουμε την ευθεία παλινδρόμησης με τα στοιχεία του πίνακα παίρνουμε:

$$\hat{Y}_t = -13,62 + 0,248X_t$$

Στην συνέχεια εκτιμάμε την $u_t = \rho u_{t-1} + e_t$

Και παίρνουμε μια εκτίμηση για το ρ:

$$\hat{u}_t = 0,662u_{t-1}$$
$$(0.161)$$

Οπότε,

$$Y_t^* = Y_t - 0,662Y_{t-1}$$
$$X_{it}^* = X_{it} - 0,662X_{it-1}$$

και $\hat{Y}_t^* = -5,25 + 0,25X_t^*$ $\quad \hat{u}_t^* = 0,229u_{t-1}^*$

$$(0.225)$$

Στην τελευταία παλινδρόμηση το ρ δεν είναι στατιστικά σημαντικό άρα δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση. Θα είναι:

$$\hat{b}_0 = \frac{\hat{b}_0^*}{1-\hat{\rho}} = \frac{-5,25}{1-0,662} = 15,547 \qquad \Rightarrow \hat{Y}_t = -15,547 + 0,25X_t$$

Η μέθοδος Hildreth-Lu (HILU)

Η μέθοδος αυτή βασίζεται στον ίδιο μετασχηματισμό της αρχικής εξίσωσης:

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_{1t} - \rho X_{1t-1}) + \ldots + \beta_{k-1}(X_{k-1t} - \rho X_{k-1t-1}) + \varepsilon_t$$

Αντί να εκτιμήσει το άγνωστο ρ χρησιμοποιεί εναλλακτικές τιμές στο διάστημα $[-1.0\ ,\ 1.0]$ και επιλέγει αυτήν με το χαμηλότερο $\sum \hat{\varepsilon}_i^2$

Επειδή οι τιμές στο διάστημα $[-1.0\ ,\ 1.0]$ είναι άπειρες σε ένα πρώτο στάδιο χρησιμοποιούνται τιμές που απέχουν 0.1.

Όταν εντοπιστεί το διάστημα στο οποίο ελαχιστοποιείται το $\sum \hat{\varepsilon}_i^2$ χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο λεπτομερείς τιμές για να εντοπιστεί το απόλυτο ελάχιστο.

Παράδειγμα (Hildreth-Lu)

Εκτιμούμε την ευθεία

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0\left(1-\rho\right) + \beta_1\left(X_{1t} - \rho X_{1t-1}\right) + \varepsilon_t$$

για τιμές του ρ από -1 έως +1 και κρατάμε τα ESS.

ρ	ESS	ρ	ESS
-1	3491.242	0.1	889.0905
-0.9	3148.413	0.2	780.049
-0.8	2826.836	0.3	692.2534
-0.7	2526.512	0.4	625.6943
-0.6	2247.444	0.5	580.3568
-0.5	1989.633	**0.6**	**556.208**
-0.4	1753.073	**0.7**	**553.1763**
-0.3	1537.768	0.8	571.0843
-0.2	1343.72	0.9	609.4131
-0.1	1170.924	1	666.2187

t	Y	X
1958	16.7	95.2
1959	15.1	99
1960	16.7	107.1
1961	18.5	121
1962	20.3	128.6
1963	24.1	143.6
1964	28.2	161.4
1965	34.5	183.4
1966	35.6	203.9
1967	36.7	220.4
1968	40.7	239.6
1969	46.5	271.5
1970	52.1	304.4
1971	57.8	338.2
1972	71.6	387.3
1973	117.1	497.2
1974	139.1	582.1
1975	173.9	691.4
1976	205.5	849.9
1977	234.2	994
1978	274.3	1190.1
1979	349.3	1464.8

Το μεγάλο ***πλεονέκτημα*** της μεθόδου αυτής σε σχέση με την μέθοδο Cochrane-Orcutt είναι ότι οδηγεί πάντα στο ***απόλυτο*** ελάχιστο (global minimum) σημείο. Η μέθοδος Cochrane-Orcutt μπορεί να οδηγήσει σε ***σχετικά*** ελάχιστο (local minimum) σημείο.

Το ***μειονέκτημα*** της μεθόδου αυτής είναι ότι είναι περισσότερο χρονοβόρα.

Αυτοσυσχέτιση μεγαλύτερου βαθμού

Η γενική μορφή υποδείγματος με αυτοσυσχέτιση ***p*** βαθμού ***AR(p)***.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1t} + u_t$$

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} +,\ldots,+ \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t$$

Ο έλεγχος του πολλαπλασιαστή Lagrange

$$u_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1t} + \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \ldots + \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$H_0: \quad \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_p = 0$$

$$H_1: \text{Ένα τουλάχιστον } \rho \text{ δεν είναι } 0$$

- Εκτίμηση της εξίσωσης $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1t} + u_t$
- Υπολογισμός των $\hat{u}_i$
- Εκτίμηση της εξίσωσης

$$\hat{u}_t = \gamma_0 + \gamma_1 X_{1t} + \ldots + \gamma_{k-1} X_{k-1t} + \rho_1 \hat{u}_{t-1} + \rho_2 \hat{u}_{t-2} + \ldots + \rho_p \hat{u}_{t-p} + \varepsilon_t$$

- Υπολογίζεται η στατιστική $(n-p)R^2$
- Η στατιστική αυτή ακολουθεί την κατανομή χ^2 με p βαθμούς ελευθερίας (όσοι και ο αριθμός των περιορισμών)
- Αν $(n-p)R^2 > \chi^2_p$ απορίπτεται η μηδενική υπόθεση $(\rho=0)$
- Η επιλογή του p γίνεται με βάση προηγούμενη εμπειρία ή άλλες εξωτερικές πληροφορίες.

Ο έλεγχος της H_0 μπορεί να γίνει κατά τα γνωστά και με το κριτήριο της κατανομής F.

Εκτίμηση με τη μέθοδο Cochrane-Orcutt (CORC)

- Εκτίμηση της εξίσωσης

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1t} + u_t$$

- Υπολογισμός των $\hat{u}_i$
- Εκτίμηση των $\hat{\rho}_i$ από την εξίσωση

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} +,\ldots,+ \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t$$

- Υπολογισμός των $\begin{cases} Y_t^* = Y_t - \hat{\rho}_1 Y_{t-1} - \ldots - \hat{\rho}_p Y_{t-p} \\ X_{it}^* = X_{it} - \hat{\rho}_1 X_{it-1} - \ldots - \hat{\rho}_p X_{it-p} \end{cases}$
- Εκτίμηση της εξίσωσης $Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_{1t}^* + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1t}^* + \varepsilon_t$
- Με βάση τα $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_{k-1}$ και την αρχική εξίσωση υπολογίζονται νέες εκτιμήσεις $\hat{\hat{u}}_i$
- Με βάση την εξίσωση υπολογίζονται νέοι συντελεστές αυτοσυσχέτισης $\hat{\hat{\rho}}_i$

Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι $\sum \hat{\varepsilon}_i^2$ δύο διαδοχικών εκτιμήσεων να μη διαφέρουν σημαντικά.