Κβαντομηχανική Ι **Χειμερινό εξάμηνο 15/16**

2ο Σετ ασκήσεων

A1. Ένα σύστημα περιγράφεται από τον τελεστή Hamilton

$$\hat{H} = \frac{1}{2k\hbar^2}\hat{L}^2 + \frac{\mu_0 B}{\hbar}\hat{L}_z \tag{1}$$

με την σταθερά του Planck $\hbar$ καθώς και τις σταθερές K, μ_0 και B.

(α) Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές (ενέργειες) του τελεστή Hamilton της σχέσης (;;).

Την χρονική στιγμή $t = 0$ η κυματοσυνάρτηση του συστήματος δίνεται από την σχέση

$$\Psi(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left(\sin(\vartheta)\sin(\varphi) + i\cos(\vartheta)\right) . \tag{2}$$

(β) Να δείξετε ότι η κυματοσυνάρτηση Ψ της σχέσης (;;) είναι κανονικοποιημένη.

(γ) Να υπολογίσετε τις μέσες τιμές $\langle E\rangle$, $\langle \hat{L}^2\rangle$ και $\langle \hat{L}_z\rangle$ ως προς την κατάσταση Ψ της σχέσης (;;).

(δ) Να βρείτε την χρονική εξέλιξη του συστήματος, δηλαδή να υπολογίσετε την $\Psi(\vartheta, \varphi, t)$.

A2. Η κυματοσυνάρτηση σωματιδίου που κινείται σε κεντρικό δυναμικό είναι

$$\Psi(x, y, z) = N\,(x + y + z)\,e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} . \tag{3}$$

Να βρεθεί η πιθανότητα να μετρήσουμε $L^2 = 2\hbar^2$ και $L_z = 0$.

Υποδείξεις: Εκφράστε την κυματοσυνάρτηση σε σφαιρικές συντεταγμένες και διαχωρίστε την $\Psi(r, \vartheta, \varphi)$ σε ένα ακτινικό κομμάτι και σε ένα γωνιακό. Για την επίλυση της άσκησης χρειάζεστε μόνο το γωνιακό κομμάτι.

A3. Ένα σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση

$$\Psi(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\sin(\varphi) . \tag{4}$$

(α) Ποιες είναι οι πιθανές μετρήσεις του τελεστή $\hat{L}_z$ και με ποια πιθανότητα;

(β) Να υπολογίσετε τις αναμενόμενες τιμές $\langle \hat{L}_x\rangle$ και $\langle \hat{L}_y\rangle$.

Σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\cos\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta .$$

Ορθοκανονικοποιημένες σφαιρικές αρμονικές Y_{lm} για $l = 0, 1, 2$:

$$Y_{0\,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_{1\,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos(\vartheta), \quad Y_{1\,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\cos(\vartheta)e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{2\,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2(\vartheta) - 1), \quad Y_{2\,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)e^{\pm i\varphi}, \quad Y_{2\,\pm2} = \mp\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2(\vartheta)e^{\pm i2\varphi} .$$

Σχέσεις για τελεστές αναβίβασης και υποβιβασμού:

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$$

$$\hat{L}_+ Y_{lm} = \sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,Y_{l,m+1}$$

$$\hat{L}_- Y_{lm} = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,Y_{l,m-1} .$$