Κβαντομηχανική Ι **Χειμερινό εξάμηνο 15/16**

2ο Σετ ασκήσεων

Α1. Σωματίδιο μάζας m βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ σε φρέαρ δυναμικού απείρου βάθους (εύρος L) στην κατάσταση

$$\Psi(0,x) = N \sin^3(\frac{\pi}{L}x)\cos^3(\frac{\pi}{L}x)$$

(α) Να υπολογίσετε την σταθερά N ώστε η $\Psi(x)$ να είναι κανονικοποιημένη.
(β) Ποια είναι τα πιθανά αποτελέσματα των μετρήσεων της ενέργειας του σωματιδίου στην κατάσταση $\Psi(x)$ και ποια η πιθανότητα του καθενός;
(γ) Να υπολογίσετε την μέση τιμή της ενέργειας $\langle E \rangle$ του σωματιδίου στην κατάσταση $\Psi(x)$ και να δείξετε ότι

$$\langle E \rangle \simeq 7E_1$$

με E_1 την ενέργεια της βασικής ιδιοκατάστασης.
(δ) Να βρεθεί η κατάσταση $\Psi(t,x)$ του σωματιδίου για $t > 0$. Ποια είναι η μέση τιμή της ενέργειας για $t > 0$;

Δίνονται: $32\sin^3(\vartheta)\cos^3(\vartheta) = 3\sin(2\vartheta) - \sin(6\vartheta)$
$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, $E_n = E_1 n^2$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Α2. Η δέσμια κατάσταση ενός σωματιδίου στο δυναμικό $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ για την χρονική στιγμή $t = 0$ δίνεται από

$$\Psi(x) = A\left(2x^3 - 3x + \frac{1}{4}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$$

με το χαρακτηριστικό μήκος x_0 του ταλαντωτή.
(α) Να Υπολογίσετε τον παράγοντα κανονικοποίησης A.
(β) Σε ποιες καταστάσεις καθορισμένης τιμής ενέργειας θα μεταβεί το σωματίδιο μετά από μία μέτρηση της ενέργειας και ποιες οι πιθανότητές τους;
(γ) Να υπολογίσετε την μέση τιμή της ενέργειας $\langle E \rangle$ του σωματιδίου στην κατάσταση $\Psi(x)$.
(δ) Ποια είναι η χρονική εξέλιξη $\Psi(t,x)$ της κατάστασης αυτής;

Δίνονται: $H_0(\xi) = 1$, $H_1(\xi) = 2\xi$, $H_2 = 4\xi^2 - 2$, $H_3 = 8\xi^3 - 12\xi$
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) d\xi = (2^n n!\sqrt{\pi})\,\delta_{nm}$
$\psi_n(x) = (2^n n!\sqrt{\pi}x_0)^{-1/2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)$.

Α3. Σωματίδιο μάζας m περιγράφεται από την κατάσταση καθορισμένης τιμής ενέργειας

$$u(x) = Ne^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$$

με $x_0^2 = \hbar/(m\omega)$. Να υπολογίσετε την ιδιοτιμή της ενέργειας E και το δυναμικό $V(x)$.