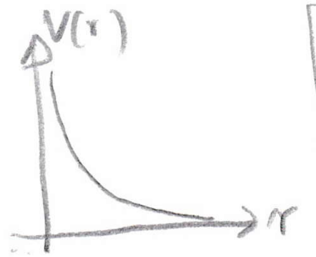
[Σετ6]

A1] $V(r) = A\dfrac{e^{-mr}}{r}$.

α) Για $r \to 0$: $e^{-mr} \to 1$ και $\dfrac{A}{r} \to \infty \Rightarrow V(r) \to \infty \; (r \to 0)$

Για $r \to \infty$: $e^{-mr} \to 0$ και $\dfrac{A}{r} \to 0 \Rightarrow V(r) \to 0 \; (r \to \infty)$

$\Rightarrow$ 

β) Κλίση της $V(r)$:

$$\vec{\nabla} V(r) = (\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V)$$

$$\frac{\partial V(r)}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = A\left[\frac{-m e^{-mr} \cdot r - e^{-mr} \cdot 1}{r^2}\right] = -A\frac{e^{-mr}}{r^2}(1+mr)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2-1} \cdot (2x) = \frac{x}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_x V(r) = -A\frac{x}{r^3}(1+m \cdot r)e^{-mr}}$$

Ανάλογα για $\partial_y V$ και $\partial_z V$. Τελικά είναι

$$\boxed{\vec{\nabla} V(r) = -A\frac{\vec{r}}{r^3}(1+m \cdot r)e^{-mr}}$$

γ) Για $m=0$: $\vec{\nabla} V = -A\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ (*)

Θέλουμε να υπολογίσουμε $\vec{\nabla}^2 V = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)V$. Χρησιμοποιώντας την σχέση (*) έχουμε

σχ.(*) για $\vec{\nabla} V$

$$= \partial_x\left(-A\frac{x}{r^3}\right) + \partial_y\left(-A\frac{y}{r^3}\right) + \partial_z\left(-A\frac{z}{r^3}\right)$$

$$\partial_x\left(\frac{x}{r^3}\right) = (\partial_x x)\cdot\frac{1}{r^3} + x\,\partial_x\Big(\underbrace{\frac{1}{r^3}}_{(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}}\Big) = \frac{1}{r^3} + x\cdot\left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right)\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}-1}\cdot(\cancel{2}x) =$$

$$= \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$$, Ανάλογα: $\partial_y\left(\frac{y}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}$, $\partial_z\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}$

$$\Rightarrow \vec\nabla^2 V = -A\left[\frac{3}{r^3} - \frac{3\overbrace{(x^2+y^2+z^2)}^{=r^2}}{r^5}\right] = -A\left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec\nabla^2 V(r) = \vec\nabla\cdot\vec\nabla\, V(r) = 0}$$

A2 α) Για $\vec a = (a_x, a_y, a_z)$, $a_{x,y,z} = \text{const.}$ και $\Phi(\vec r) = \vec a\cdot\vec r$ είναι

$$\partial_i \Phi(\vec r) = \partial_i(\vec a\cdot\vec r) = \partial_i\Big(\sum_{j=x,y,z} a_j r_j\Big) =$$

i: x, y ή z

$$\underset{\vec a = \text{const.}}{=} \sum_j a_j \underbrace{\partial_i r_j}_{\delta_{ij}} = \underline{\underline{a_i}}$$ ή $\boxed{\vec\nabla\Phi(\vec r) = \vec a}$

ή χωρίς δείκτες:

$\vec\nabla\Phi = \vec\nabla(\vec a\cdot\vec r)$. Εδώ προσοχή: $\vec\nabla(\vec a\cdot\vec r) \neq \vec a(\vec\nabla\cdot\vec r)$!

$\vec a\cdot\vec r = a_x x + a_y y + a_z z$: εσωτερικό γινόμενο $\equiv f(x,y,z)$

[illegible] $\vec\nabla f(x,y,z)$,

Δηλαδή: $\vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \left(\partial_x(\vec{a}\cdot\vec{r}), \partial_y(\vec{a}\cdot\vec{r}), \partial_z(\vec{a}\cdot\vec{r})\right) =$ 3

$$\cancel{\partial_x}\quad \partial_x(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \partial_x(a_x x + a_y y + a_z z) = a_x$$

$$\partial_y(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \partial_y(\quad -\|- \quad) = a_y$$

$$\partial_z(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \partial_z(\quad -\|- \quad) = a_z$$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\Phi = (a_x, a_y, a_z)$ ή $\underline{\underline{\vec{\nabla}\Phi = \vec{a}}}$.

Τώρα για $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r}(\vec{\omega}\times\vec{r})$: $\partial_i A_j = ?$ $(i,j = x,y,z)$.

Και εδώ προσοχή: $\partial_i A_j$ <u>ΔΕΝ</u> είναι η απόκλιση του $\vec{A}$, δηλ. δεν είναι $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ (αυτό θα γράφουμε ως $\sum\limits_{i=x,y,z}\partial_i A_i$ με δείκτες)

Υπολογίζουμε πρώτα τις συντεταγμένες A_x, A_y, A_z του $\vec{A}$.

Με $\vec{\omega} = \omega_z \vec{e}_z$ έχουμε

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = (\underset{\overset{\|}{0}}{\omega_y} z - \omega_z y, \omega_z x - \underset{\overset{\|}{0}}{\omega_x} z, \underset{\overset{\|}{0}}{\omega_x} y - \underset{\overset{\|}{0}}{\omega_y} x)$$

xyzxyz

$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\omega_z}{r}(-y, x, 0)}}$ ή $\underline{\underline{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\omega_z}{r}(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)}}$

Οπότε έχουμε με

$\cancel{\partial_x A_x}$ $\quad \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

$\partial_x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(\dots)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot(2x) = -\frac{x}{r^3}$

ανάλογα για ...

$$\partial_x A_x = +\omega_z \frac{xy}{r^3}, \quad \partial_y A_x = \omega_z \frac{y^2}{r^3} - \frac{\omega_z}{r}, \quad \partial_z A_x = \omega_z \frac{yz}{r^3}$$

$$\partial_x A_y = -\omega_z \frac{x^2}{r^3} + \omega_z \frac{1}{r}, \quad \partial_y A_y = -\omega_z \frac{xy}{r^3}, \quad \partial_z A_y = -\omega_z \frac{xz}{r^3}$$

$\partial_x A_z = \partial_y A_z = \partial_z A_z = 0$, επειδή $A_z = 0$.

Συνοπτικά

$$\partial_x \vec{A} = \frac{\omega_z}{r^3}\left(xy,\, r^2 - x^2,\, 0\right)$$

$$\partial_y \vec{A} = \frac{\omega_z}{r^3}\left(y^2 - r^2,\, -xy,\, 0\right)$$

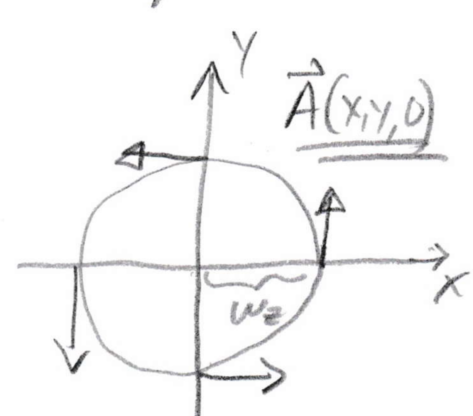
$$\partial_z \vec{A} = \frac{\omega_z}{r^3}\left(yz,\, -xz,\, 0\right)$$

β) $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r}(\vec{\omega} \times \vec{r})$ ή με $\vec{\omega} = \omega_z \vec{e}_z$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\omega_z}{r}\left(-y,\, x,\, 0\right).$$

Στο επίπεδο xy για $z=0$ είναι $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$ και

$$\underline{\underline{|\vec{A}|}} = \frac{\omega_z}{r}\underbrace{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}_{=r} = \underline{\underline{\omega_z}}$$



Για $\underset{(x>0)}{y=0}$: $\vec{A} = \omega_z(0,1,0) = \omega_z \vec{e}_y$ $\Rightarrow$

Για $\underset{(y>0)}{x=0}$: $\vec{A} = \omega_z(-1,0,0) = -\omega_z \vec{e}_x$

γ) Απόκλιση του $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r}(\vec{\omega} \times \vec{r})$.

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\omega_z}{r}(-y, x, 0)$. $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z$

τα υπολογίσαμε στο (α)!

$\Rightarrow$

$\underline{\underline{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}} = \frac{\omega_z}{r^3}(xy - xy + 0) = \underline{\underline{0}}$, αναμενόμενο, επειδή το πεδίο $\vec{A}$ είναι στροβιλισμένο.

$\Rightarrow \underline{\underline{\mathrm{div}\,\vec{A} = 0}}$

Με τα αποτελέσματα από (α):

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = (\underbrace{\partial_y A_z}_{=0} - \partial_z A_y, \partial_z A_x - \underbrace{\partial_x A_z}_{=0}, \underbrace{\partial_x A_y}_{=r^2 - x^2} - \underbrace{\partial_y A_x}_{=y^2 - r^2}) =$$

xyzxyz

$$= \frac{\omega_z}{r^3}(-xz, yz, r^2 + z^2)$$

$2r^2 - x^2 - y^2$

$= x^2 + y^2 + 2z^2$ ✓

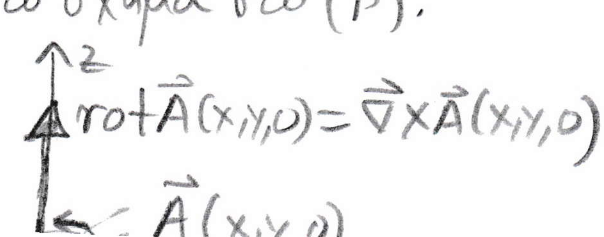
$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\omega_z}{r^3}\left(xz\vec{e}_x + yz\vec{e}_y + (r^2 + z^2)\vec{e}_z\right)}.$$

Σημείωση: για $z = 0$: $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\omega_z}{r}\vec{e}_z$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$

$\Rightarrow$ Η στροφή του $\vec{A}$ μας δίνει του μέτρο του στροβιλισμού του $\vec{A}$, το κατά πόσο περιστρέφεται γύρω από τον σταθερό άξονα z.

Βλέπε πάλι το σχήμα στο (β).

Σε 3 διαστάσεις:



A3 $\vec{F}(\vec{r}) = (2axy,\ bx^2+cy^2,\ 0)$

(α) i) ασυμπίεστο $\vec{F} \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0$

$$\Rightarrow \underline{\vec{\nabla}\cdot\vec{F}} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z =$$

$$= \partial_x(2axy) + \partial_y(bx^2+cy^2) + \partial_z \cdot 0$$

$$= \underline{2ay + 2cy} = \underline{2y(a+c)}$$

$\Rightarrow \vec{F}$ είναι ασυμπίεστο, $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=0$, για $\boxed{a=-c,\ b\in\mathbb{R}}$

ii) αστρόβιλο $\rightarrow \text{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$.

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = (\underset{0}{\partial_y F_z} - \underset{0}{\partial_z F_y},\ \underset{0}{\partial_z F_x} - \underset{0}{\partial_x F_z},\ \underset{2bx}{\partial_x F_y} - \underset{2ax}{\partial_y F_x})$$

$\Rightarrow \text{rot}\,\vec{F} = 2x(b-a) \Rightarrow \boxed{a=b,\ c\in\mathbb{R}}$ για να είναι το $\vec{F}$ αστρόβιλο.

β) $\vec{F}\cdot\vec{\nabla}f$ με $f(\vec{r}) = 2x^2yz^3$ έχουμε

$$\vec{F}\cdot\vec{\nabla}f = F_x\underbrace{\partial_x f}_{4xyz^3} + F_y\underbrace{\partial_y f}_{2x^2z^3} + F_z\underbrace{\partial_z f}_{6x^2yz^2} = 2axy\cdot 4xyz^3 + (bx^2+cy^2)\cdot 2x^2z^3 + 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}\cdot\vec{\nabla}f = 8ax^2y^2z^3 + (bx^2+cy^2)2x^2z^3}$$

$\vec{F} \times \vec{\nabla} f = ? \quad f(\vec{r}) = 2x^2yz^3$

$$\vec{F} \times \vec{\nabla} = (F_y\partial_z - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{F_z}}\partial_y ,\ \underset{0}{\underset{\shortparallel}{F_z}}\partial_x - F_x\partial_z ,\ F_x\partial_y - F_y\partial_x)$$

xyzxyz

όπου ο τελεστής $\vec{\nabla} = (\partial x, \partial y, \partial z)$ δρα στην $f(\vec{r})$.

$\Rightarrow$ Με $\partial_x f = 4xyz^3$, $\partial_y f = 2xz^3$, $\partial_z f = 6x^2yz^2$ είναι

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{F} f = (bx^2 + cy^2)\, 6x^2yz^2 \vec{e}_x - 2axy \cdot 6x^2yz^2 \vec{e}_y + [2axy \cdot 2xz^3 - (bx^2+cy^2) \cdot 4xyz^3]\, \vec{e}_z}$$

A4 | Για $\vec{r} = (x,y,z)$ και $f(r)$ αποδείξουμε

$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) \Rightarrow$ εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ και $\vec{r} = (x,y,z)$.

δρα σε $\vec{r}$ <u>και σε</u> $\frac{1}{r^3}$!

Έχουμε

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \partial_x\left(\frac{x}{r^3}\right) + \partial_y\left(\frac{y}{r^3}\right) + \partial_z\left(\frac{z}{r^3}\right)$$

$$\partial_x\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} + x\,\partial_x\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} + x\,\underbrace{\partial_x (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}}_{-\frac{3}{\cancel{2}}(\cdots)^{-3/2-1}\cdot(\cancel{2}x) = -\frac{3x}{r^5}}$$

$\Rightarrow \partial_x\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^5}$, ανάλογα για $\partial_y\left(\frac{y}{r^3}\right)$ και $\partial_z\left(\frac{z}{r^3}\right)$.

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3\overbrace{(x^2+y^2+z^2)}^{r^2}}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0.$$

$$\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r^3}=\left[\partial_y\left(\frac{z}{r^3}\right)-\partial_z\left(\frac{y}{r^3}\right)\right]\vec{e}_x$$

xyzxyz

$$+\left[\partial_z\left(\frac{x}{r^3}\right)-\partial_x\left(\frac{z}{r^3}\right)\right]\vec{e}_y+\left[\partial_x\left(\frac{y}{r^3}\right)-\partial_y\left(\frac{x}{r^3}\right)\right]\vec{e}_z$$

Υπολογίσαμε παραπάνω: $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right)=-\frac{3\vec{r}}{r^3}$. Με $\partial_i r_j=0$ για $i\neq j$ έχουμε:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r^3}=-\frac{3}{r^3}\left[(y-z)\vec{e}_x+(z-x)\vec{e}_y+(x-y)\vec{e}_z\right]}$$

ή $\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r^3}=\mathrm{rot}\,\frac{\vec{r}}{r^3}=-\frac{3}{r^3}\left(y-z\,,\,z-x\,,\,x-y\right)$

$$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}}_{\vec{\nabla}^2=\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2}f(r)=\left(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2\right)f(r)$$

Υπολογίζουμε πρώτα τις μερικές παραγώγους 1ης τάξης της $f(r)$, και μετά τις παραγώγους 2ης τάξης. Προσοχή εδώ στο ότι η f εξαρτάται από το μέτρο του διανύσματος $\vec{r}$, το $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Η f είναι δηλ. σύνθετη συνάρτηση της μορφής $f(r(x,y,z))$. Έχουμε

$$\left.\partial_x f=\frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\right\}\Rightarrow\partial_x f(r)=\frac{x}{r}f'(r)\ \text{με}\ f'(r)=\frac{df(r)}{dr}$$

Τώρα $\partial_x^2 f(r) = \partial_x(\partial_x f(r)) = \partial_x\left[\frac{x}{r} f'(r)\right] =$

$$= \underbrace{\partial_x\left(\frac{x}{r}\right)}_{\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}} \cdot f'(r) + \frac{x}{r} \underbrace{\partial_x(f'(r))}_{\frac{d^2 f(r)}{dr^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f''(r) \cdot \frac{x}{r}}$$

$$\Rightarrow \partial_x^2 f = \frac{1}{r} f' - \frac{x^2}{r^3} f' + \frac{x^2}{r^2} f''$$

Ανάλογα: $\partial_y^2 f = \partial_y\left(\frac{y}{r} f'\right) = \frac{1}{r} f' - \frac{y^2}{r^3} f' + \frac{y^2}{r^2} f''$

$\partial_z^2 f = \dots\dots = \frac{1}{r} f' - \frac{z^2}{r^3} f' + \frac{z^2}{r^2} f''$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f(r) = \frac{3}{r} f' - \frac{x^2+y^2+z^2}{r^3} f' + \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} f''$$

ή με $r^2 = x^2+y^2+z^2$:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f(r) = \frac{3}{r} f'(r) - \frac{f'(r)}{r} + f''(r)}$$

A5) Εξισώσεις Maxwell (κενό): $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

για $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$, $\vec{r} = \vec{r}(t)$!

Κυματική εξίσωση για $\vec{E}$:

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$ Παίρνουμε στροφή: $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$

$\Longrightarrow$ Ταυτότητα: $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{F} = -\vec{\nabla}^2\vec{F} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})$ για τυχαίο $\vec{F}$.

$\Longrightarrow$

$$-\vec{\nabla}^2\vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

Αλλά είναι $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ (Maxwell)

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \text{ (Maxwell)}$$

$$\Longrightarrow -\vec{\nabla}^2\vec{E} = -\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\nabla}^2\vec{E} = \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}} \checkmark$$

Για το $\vec{B}$: Σχηματίζουμε την στροφή στα 2 μέλη της εξίσωσης

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

και έχουμε

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \underset{\substack{\text{ταυτότητα} \\ \text{για } \vec{F}=\vec{B}}}{\Longrightarrow} -\vec{\nabla}^2\vec{B} + \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{=0}) = \frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{E}}_{-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}})$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\nabla}^2\vec{B} = \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}} \checkmark$$

■

A6) α) Σχηματίζουμε την στροφή του διανυσματικού

$$\text{rot}\,\text{grad}\,\Phi = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Phi = \vec{O}.$$

το κάναμε
και ξέρουμε ότι είναι μηδέν για
τυχαίο αριθμ. πεδίο $\Phi = \Phi(\vec{r})$!

$\Rightarrow$ Το $\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi$ πρέπει να είναι αστρόβιλο, $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{O}$.

(δεν είναι απαραίτητο, έχει καθιερωθεί στην Φυσική)

β) $\vec{A}(\vec{r}) = (x+2y+4z,\ 2x-3y-z,\ 4x-y+2z)$

Για να δούμε εάν υπάρχει αριθμ. πεδίο $\varphi(\vec{r})$ έτσι ώστε $\vec{A} = -\vec{\nabla}\cdot\varphi$, πρέπει να δούμε εαν $\text{rot}\,\vec{A} \overset{?}{=} \vec{O}$.

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y,\ \partial_z A_x - \partial_x A_z,\ \partial_x A_y - \partial_y A_x)$$

$\partial_y A_z = \partial_y(4x-y+2z) = -1$, $\partial_z A_x = \partial_z(x+2y+4z) = 4$

$\partial_z A_y = \partial_z(2x-3y-z) = -1$, $\partial_x A_z = \partial_x(4x-y+2z) = 4$

$\partial_x A_y = \partial_x(2x-3y-z) = 2$

$\partial_y A_x = \partial_y(x+2y+4z) = 2$

$\Rightarrow \underline{\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{O}}$

Άρα υπάρχει $\varphi(\vec{r})$ έτσι ώστε $\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$.

$$A_x(\vec{r}) = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \Rightarrow \Phi(\vec{r}) = -\int A_x(\vec{r})dx$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{r}) = -\int(x+2y+4z)dx + R(y,z) = -\frac{x^2}{2} - 2xy - 4xz + R(y,z),$$

Για τον υπολογισμό του $R(y,z)$ χρησιμοποιούμε πάλι την σχέση $\vec{A} = -\vec{\nabla}\Phi$ για μία άλλη συντεταγμένη, π.χ. την y και το ενδιάμεσο αποτέλεσμα για Φ το παραγωγίζουμε ως προς y:

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{x^2}{2} - 2xy - 4xz + R(y,z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \cancel{-2x} + \frac{\partial R}{\partial y} \overset{!}{=} -F_y = \cancel{-2x} + 3y + z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial y} = +3y + z \Rightarrow R(y,z) = +\int (3y+z)\,dy = +\frac{3y^2}{2} + yz + g(z)$$

Έχουμε για το $\Phi(\vec{r})$: $\Phi(\vec{r}) = -\frac{x^2}{2} - 2xy - 4xz + \frac{3y^2}{2} + yz + g(z)$

Απομένει ο προσδιορισμός της $g(z)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \cancel{-4x} \cancel{+y} + \frac{dg}{dz} \overset{!}{=} -F_z = \cancel{-4x} \cancel{+y} - 2z$$

$$\Rightarrow g = -\int 2z\,dz + G = -z^2 + G$$

$$\Rightarrow \text{τελικά: } \boxed{\Phi(\vec{r}) = -\frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} - z^2 - 2xy - 4xz + yz + G \quad (G = \text{const.})}$$

Α7) Τροχιά: $\vec{r}(t) = A\cos(\omega_1 t + \alpha)\vec{e}_x + B\cos(\omega_2 t + \beta)\vec{e}_y$

Συνάρτηση: $f(\vec{r}) = \frac{x^3 + y^3}{3}$.

Σημείωση: Ρυθμός μεταβολής <u>κατά μήκος</u> της τροχιάς $\equiv$ πως αλλάζει η $f(\vec{r})$ όταν το $\vec{r}$ μεταβάλλεται με τον

Ρυθμός μεταβολής: $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ (*)

Δηλ., πρέπει να υπολογίσουμε την $\dfrac{df}{dt}$, σχέση (*).

Η $f(x,y)$ είναι σύνθετη συνάρτηση (ως προς χρόνο t) δύο μεταβλητών, ~~...~~ βλέπε σχέση (*). Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y^2.$$ Με $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ είναι

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\cos(\omega_1 t + \alpha)\right) = -A\omega_1 \sin(\omega_1 t + \alpha)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(B\cos(\omega_2 t + \beta)\right) = -B\omega_2 \sin(\omega_2 t + \beta)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{df}{dt} = -A\omega_1 x^2 \sin(\omega_1 t + \alpha) - B\omega_2 y^2 \sin(\omega_2 t + \beta)}$$

(με $x = x(t) = A\cos(\omega_1 t + \alpha)$ και $y = y(t) = B\cos(\omega_2 t + \beta)$)

ή

$$\frac{df}{dt} = \sin(\omega_1 t + \alpha)\cos(\omega_1 t + \alpha)\left(-A^2\omega_1\right) + \sin(\omega_2 t + \beta)\cos(\omega_2 t + \beta)\left(-B^2\omega_2\right)$$

A8 Κλίση της $T(x,y)$:

$$\vec{\nabla} T = (\partial_x T, \partial_y T) = \left[-\beta_1 e^{\alpha_1 y}\sin(\beta_1 x) + \alpha_2 e^{\alpha_2 x}\cos(\beta_2 y)\right]\vec{e}_x + \left[\alpha_1 e^{\alpha_1 y}\cos(\beta_1 x) - \beta_2 e^{\alpha_2 x}\sin(\beta_2 y)\right]\vec{e}_y$$

$\rightsquigarrow$ Για $(x,y) = (0,0)$:

$\boxed{\vec{\nabla} T(0,0) = (\alpha_2, \alpha_1)}$ $\longrightarrow$ ταχύτερη αύξηση: $+\vec{\nabla} T(0,0) = \alpha_2 \vec{e}_x + \alpha_1 \vec{e}_y$

A9 $S_1: x^2+y^2+z^2=9$, $S_2: x^2+y^2-z^{-3}=0$.

Γωνία των S_1 & S_2 : $\vec\nabla F(P_0)\cdot\vec\nabla G(P_0)$ με $F(\vec r)=x^2+y^2+z^2-9=0$
$G(\vec r)=x^2+y^2-z^{-3}=0$

$P_0=(2,-1,2)$

$\Rightarrow \vec\nabla F=(2x,2y,2z)$, $\vec\nabla G=(2x,2y,3z^{-4})$

$\Rightarrow \vec\nabla F(P_0)=(4,-2,4)$, $\vec\nabla G(P_0)=(4,-2,\frac{3}{16})$

$$|\vec\nabla F(P_0)|=\sqrt{\underbrace{4^2}_{16}+\underbrace{2^2}_{4}+\underbrace{4^2}_{16}}=\underbrace{\sqrt{36}}_{6},\ |\vec\nabla G(P_0)|=\sqrt{16+4+\underbrace{\frac{9}{16^2}}_{0.035}}=\sqrt{20{,}035}$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec\nabla F(P_0)\cdot\vec\nabla G(P_0)}{|\vec\nabla F(P_0)|\,|\vec\nabla G(P_0)|}=\frac{\overset{16}{4\cdot4}+\overset{4}{(-2)\cdot(-2)}+4\cdot(\frac{3}{16})}{6\cdot\sqrt{20{,}035}}=\frac{20{,}75}{6\sqrt{20{,}035}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{20{,}75}{26{,}86}=\underline{\underline{0{,}77}}$$

Παράγωγο της $f(\vec r)=x^2+y^2$ κατά την κατεύθυνση της εφαπτόμενης της καμπύλης ως τομή των S_1 & S_2 :

$$\frac{x-x_0}{\underbrace{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}\Big|_{P_0}}_{n_1}}=\frac{y-y_0}{\underbrace{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}\Big|_{P_0}}_{n_2}}=\frac{z-z_0}{\underbrace{\frac{D(F,G)}{D(x,y)}\Big|_{P_0}}_{n_3}}$$

χρειαζόμαστε το διάνυσμα $\vec n=(n_1,n_2,n_3)$

Στη συνέχεια: $\vec\nabla G|_{P_0}=(4,-2,\overset{\text{αντί για } 3/16}{0})$ και $\vec\nabla F|_{P_0}=(4,-2,4)$

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)}\Big|_{P_0}=\begin{vmatrix}\partial_y F & \partial_z F\\ \partial_y G & \partial_z G\end{vmatrix}=(\partial_y F)(\partial_z G)-(\partial_z F)(\partial_y G)=-2\cdot0-4\cdot(-2)=8$$

Ανάλογα:

$$\left.\frac{D(F,G)}{D(z,x)}\right|_{P_0} = \begin{vmatrix} \partial_z F & \partial_x F \\ \partial_z G & \partial_x G \end{vmatrix} = \underbrace{(\partial_z F)}_{4}\underbrace{(\partial_x G)}_{4} - \underbrace{(\partial_x F)}_{4}\underbrace{(\partial_z G)}_{0} = 16$$

$$\left.\frac{D(F,G)}{D(x,y)}\right|_{P_0} = \begin{vmatrix} \partial_x F & \partial_y F \\ \partial_x G & \partial_y G \end{vmatrix} = 4\cdot(-2) - (-2)\cdot 4 = 0$$

$\Rightarrow \vec{n} = (8, 16, 0)$ και με $|\vec{n}| = \sqrt{64+16^2} = \sqrt{320}$

είναι $\vec{n}_0 = \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \dfrac{1}{\sqrt{320}}(8,16,0) \rightarrow$ κατεύθυνση της εφαπτόμενης ευθείας της καμπύλης των δυο επιφανειών στο σημείο $P_0 = (2,-1,2)$.

Οπότε τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της $f(x,y,z) = f(x,y) = x^2+y^2$ κατά την κατεύθυνση του $\vec{n}_0$ στο P_0:

$$D_{\vec{n}_0} f(P_0) = [\vec{\nabla} f(P_0)]\cdot\vec{n}_0 = \underbrace{\partial_x f(P_0)}_{2x\to 4}(n_0)_x + \underbrace{\partial_y f(P_0)}_{2y\to -2}(n_0)_y$$

$$\rightarrow \boxed{D_{\vec{n}_0} f(P_0) = \frac{1}{\sqrt{320}}\left(4\cdot 8 + (-2)\cdot 16\right)}$$

A10 $S_1:\ x^2+y^3-2(2+yz)=0,\quad S_2:\ x^2+1-z^2+2y^2=0$

i) S_1 και S_2 κάθετες στο $P_0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} F(P_0)\cdot\vec{\nabla} G(P_0)=0$ με

$F(\vec{r}) = x^2 + y^3 - 2(2 + yz) = 0$ & $G(\vec{r}) = x^2 + 1 - z^2 + 2y^2 = 0.$

Υπολογίζουμε για $P_0(1,-1,2)$

$\partial_x F = 2x \to \partial_x F(P_0) = \underline{\underline{2}}$ | $G_x(P_0) = 2$

$\partial_y F = 3y^2 - 2z \to F_y(P_0) = 3\cdot(-1)^2 - 2\cdot 2 = -\underline{\underline{1}}$ | $G_y(P_0) = -4$

$\partial_z F = -2y \to F_z(P_0) = \underline{\underline{2}}$ | $G_z(P_0) = -4$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{\nabla}F(P_0)\cdot\vec{\nabla}G(P_0)}} = F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z =$$

$$= \underbrace{2\cdot 2}_{4} + \underbrace{(-1)\cdot(-4)}_{4} + \underbrace{2\cdot(-4)}_{-8} = \underline{\underline{0}} \checkmark \Rightarrow S_1 \perp S_2 \text{ στο } P_0$$

β) Γωνία των $F(\vec{r}) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ & $G(\vec{r}) = x^2 + y^2 - z - 3 = 0$ στο $P_0 = (2,-1,2)$

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{\nabla}F(P_0)\cdot\vec{\nabla}G(P_0)}{|\vec{\nabla}F(P_0)|\,|\vec{\nabla}G(P_0)|}$$

$\vec{\nabla}F = (2x, 2y, 2z) = (4,-2,4)$

$\vec{\nabla}G = (2x, 2y, -1) \underset{\text{στο } P_0}{=} (4,-2,-2)$

$|\vec{\nabla}F| = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$

$|\vec{\nabla}G| = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\cos\vartheta}} = \frac{\overset{16}{4\cdot 4} + \overset{4}{(-2)\cdot(-2)} + \overset{-8}{4\cdot(-2)}}{6\sqrt{24}} = \underline{\underline{\frac{12}{6\sqrt{24}}}}$$