(a)

A1) Ανάπτυγμα Taylor στην αρχή των αξόνων (= ανάπτυγμα Mac-Laurin):

$$V(x,y) = V(0,0) + V_x \cdot x + V_y \cdot y + \frac{1}{2}\left[V_{xx} \cdot x^2 + V_{yy} y^2 + 2 V_{xy} xy\right]$$

$$V_x = \frac{2x}{a+by^2} + y^2 \cdot (-1)(c+dx^2)^{-2} \cdot (2d \cdot x) = \frac{2x}{a+by^2} - \frac{2dxy^2}{(c+dx^2)^2}$$

$$\Rightarrow V_x(0,0) = 0.$$

$$V_y = x^2 \frac{(-2by)}{(a+by^2)^2} + \frac{2y}{c+dx^2} \Rightarrow V_y(0,0) = 0.$$

$$V_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2x}{a+by^2} - \frac{2dxy^2}{(c+dx^2)^2}\right] =$$

$$= \frac{2}{a+by^2} - 2dy^2 \cdot \left(\frac{1 \cdot (c+dx^2)^2 - x \cdot 2 \cdot (c+dx^2) \cdot 2dx}{(c+dx^2)^4}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{xx}(0,0) = \frac{2}{a}}$$

$$V_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2y}{c+dx^2} - \frac{2bx^2 y}{(a+by^2)^2}\right] = \frac{2}{c+dx^2} - \underbrace{2bx^2 \cdot (\ldots)}_{\text{Έτσι και αλλιώς αυτός όρος είναι μηδέν στο } (0,0).}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{yy}(0,0) = \frac{2}{c}}$$

$$V_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2y}{c+dx^2} - \frac{2bx^2y}{(a+by^2)^2}\right] =$$

$$= 2y \cdot \frac{-2dx}{(c+dx^2)^2} - \frac{4bxy}{(a+by^2)^2} = -4xy\left(\frac{d}{(c+dx^2)^2} + \frac{b}{(a+by^2)^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{V_{xy}(0,0) = 0}$$

Άρα έχουμε συνολικά για την προσέγγιση μέχρι και όρους 2ης τάξης:

$$\underline{\underline{V(x,y)}} \simeq \frac{1}{2}\left[\frac{2}{a}x^2 + \frac{2}{c}y^2\right] = \underline{\underline{\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{c}}}$$

Άρα: $\omega_1^2 = \frac{2}{a}$ και $\omega_2^2 = \frac{2}{c}$.

(β) Για την προσέγγιση μέχρι και όρους $\underline{\underline{4\text{ης τάξης}}}$ το ανάπτυγμα της $V(x,y)$ σε σειρά Mac-Laurin μέχρι και όρους 4ης τάξης είναι πάρα πολύ χρονοβόρα.

Εργαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε

$$V(x,y) = F(x,y) + G(x,y)$$

και έχουμε

$$F(x,y) = \frac{x^2}{a+by^2} = \frac{x^2}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{by^2}{a}} = \frac{x^2}{a} \cdot \frac{1}{1+t}$$

$$t := \frac{by^2}{a} \ll 1$$

Έχοντας $F(x,y) = \frac{x^2}{a} \cdot \frac{1}{1+t}$ αρκεί να αναπτύξουμε τον $2^{ο}$ όρο $\frac{1}{1+t}$ ως προς $t \ll 1$ μέχρι παράγοντες $1^{ης}$ τάξης για να καταλήξουμε σε τελικό αποτέλεσμα που να περιέχει όρους μέχρι και $2^{ης}$ τάξης ως προς τις μεταβλητές x και y. Έχουμε

$$\frac{1}{1+t} \underset{\text{Mac-Laurin}}{\approx} 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{1+t}\right)'}_{\frac{-1}{(1+t)^2} = 1 \text{ στο } t=0} \cdot t + \dots \approx 1 - t + \dots$$

$\Longrightarrow$

$$F(x,y) \cong \frac{x^2}{a}(1-t) = \frac{x^2}{a}\left(1 - \frac{by^2}{a}\right) = \frac{x^2}{a} - \frac{b}{a^2}x^2y^2$$

Ανάλογα: $G(x,y) = \frac{y^2}{c+dx^2} = \frac{y^2}{c} \cdot \frac{1}{1+\frac{dx^2}{c}} = \frac{y^2}{c} \cdot \frac{1}{1+\tau} \approx \frac{y^2}{c} - \frac{d}{c^2}x^2y^2$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{V(x,y) \approx \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{c} - \left(\frac{b}{a^2} + \frac{d}{c^2}\right) x^2 y^2}$$

$$\Longrightarrow \omega_1^2 = \frac{2}{a} \qquad \varepsilon = \frac{b}{a^2} + \frac{d}{c^2}.$$
$$\omega_2^2 = \frac{2}{c}$$

$\blacksquare$

A2

i) $f(x,y) = e^{x-2y}$ με $x = \sin(u)$, $y = u^3 + w^2$.

$$df \underset{\substack{\uparrow \\ f=f(x,y)}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy$$

και

$$dx \underset{\substack{\uparrow \\ x=x(u,w)}}{=} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right) dw \,, \quad dy \underset{\substack{\uparrow \\ y=y(u,w)}}{=} \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right) dw$$

$\Big\} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right) dw\right] +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right) dw\right] =$$
$$= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right] \cdot du$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)\right] \cdot dw$$

Έχουμε δηλαδή

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-2y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2e^{x-2y}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos(u), \quad \frac{\partial x}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 3u^2, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = 2w$$

$\Rightarrow$

$$df = \left[e^{x-2y} \cdot \cos(u) - 2e^{x-2y} \cdot 3u^2\right] du$$

$$+ \left[e^{x-2y} \cdot 0 - 2e^{x-2y} \cdot 2w\right] \cdot dw$$

$$\Rightarrow \boxed{df = e^{x-2y}\left(\cos(u) - 6u^2\right)du - 4we^{x-2y}\,dw}$$

ii) $g(x,y) = x^3y^2$ με $x = u^2w$ και $y = u^2+w^2$

Ανάλογα

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2x^3y, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 2uw, \quad \frac{\partial x}{\partial w} = u^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 2u, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = 2w$$

$$\Rightarrow dg = \left[3x^2y^2 \cdot 2uw + 2x^3y \cdot 2u\right]du + \left[3x^2y^2 \cdot u^2 + 2x^3y \cdot 2w\right]dw$$

$$\Rightarrow \boxed{dg = 3x^2y^2\left(2uw\,du + u^2dw\right) + 2x^3y\left(2u\,du + 2w\,dw\right)}$$

Α5 Αν $z=\varphi(x,y)$ ορίζεται από

$$F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0,$$

Ν.Δ.Ο.:

$$x z_x + y z_y = z$$

Λύση

Θέτουμε $u=\frac{x}{z}$ και $w=\frac{y}{z}$ και έχουμε

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial F}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$$

$$F=F\big(u(x,y,z(x,y)),\, w(x,y,z(x,y))\big)$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial F}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_u\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{z^2}z_x\right)+F_w\left(0-\frac{y}{z^2}z_x\right)=0 \\[2ex] F_u\left(0-\frac{x}{z^2}z_y\right)+F_w\left(\frac{1}{z}-\frac{y}{z^2}z_y\right)=0 \end{cases}$$

→ Λύση $F_u, F_w \neq 0$ όταν ορίζουσα του παραπάνω ομογενούς συστήματος $=0$:

$$\frac{1}{z}\begin{vmatrix} 1-\frac{x}{z}z_x & -\frac{y}{z}z_x \\[1ex] -\frac{x}{z}z_y & 1-\frac{y}{z}z_y \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \frac{1}{z}\left(1-\frac{x z_x}{z}\right)\left(1-\frac{y}{z}z_y\right)-\frac{xy}{z^3}z_x z_y=0$$

ή

$$\frac{1}{z}-\frac{y}{z^2}z_y-\frac{x}{z^2}z_x+\cancel{\frac{xy}{z^3}z_xz_y}-\cancel{\frac{xy}{z^3}z_xz_y}=0$$

7

$$\Rightarrow \boxed{xz_x+yz_y=z} \checkmark$$

AB | Ν.Δ.Ο. η εξίσωση κύκλου

$$x^2+y^2=16$$

επιλύεται μονοσήμαντα ως προς y στην περιοχή του σημείου $P_A(0,4)$, και ως προς x στην περιοχή του σημείου $P_B(4,0)$.

Λύση

Για το $P_A(0,4)$: $F(x,y)=0$ θεωρώντας $y=y(x)$ και

$$x^2+y^2-16=0$$

έχουμε

$$F(P_A)=0^2+4^2-16=0 \checkmark$$

$$F_y=2y \Rightarrow F_x(P_A)=2\cdot 4=8\neq 0$$

$\Rightarrow$ η $F(x,y(x))=0$ επιλύεται ως προς y στο σημείο P_A (δηλαδή, ορίζεται η πεπλεγμένη συνάρτηση στο P_A)

Ανάλογα για το σημείο $P_B(4,0)$:

$$F(4,0)=4^2+0^2-16=0 \checkmark$$ επιλύεται ως προς την $x(y)$ στο σημείο B.

και $$F_x=2x=2\cdot 4=8\neq 0$$

A5 | Έχουμε εδώ $F(x,y,z(x,y))=0$ και ζητούμενο είναι η $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ της πλεγμένης συνάρτησης $z=z(x,y)$;

Εργαζόμαστε όπως και στην περίπτωση υπολογισμού της z_{xx} (βλέπε PDF-αρχείο στην ιστοσελ. users.auth.gr/tgaitano → Γενικά Μαθηματικά ΙΙ):

Υπολογίζουμε πρώτα την γενική σχέση $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ και μετά εφαρμόζουμε την μερική παράγωγο $\dfrac{\partial}{\partial x}$ στην $\dfrac{\partial F}{\partial y}$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Θέτω $A = \dfrac{\partial F}{\partial y}$, $B = \dfrac{\partial F}{\partial z}$ και $C = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ και έχω

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(B\cdot C)}_{\left[\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right]\cdot C + B\cdot\frac{\partial C}{\partial x}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial^2 z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \overset{!}{=} 0$$

ή με $z_x = -\frac{F_x}{F_z}$ και $z_y = -\frac{F_y}{F_z}$:

$$F_{xy} - F_{yz}\cdot\frac{F_x}{F_z} - F_{xz}\frac{F_y}{F_z} + F_{zz}\frac{F_x}{F_z}\frac{F_y}{F_z} + F_z\cdot z_{xy} = 0$$

ζητούμενο!

$$\Rightarrow \boxed{z_{xy} = -\frac{F_{xy}\cdot(F_z)^2 - F_{yz}\cdot F_x\cdot F_z - F_{xz}\cdot F_y\cdot F_z + F_{zz}\cdot F_x\cdot F_y}{(F_z)^3}}$$

Οπότε με $F(x,y,z) = e^z + x^2y + z + 5 = 0$, $z = z(x,y)$

και

$F_x = 2xy$

$F_y = x^2$, $F_{xy} = 2x$

$F_z = e^z + 1$, $F_{xz} = 0$, $F_{yz} = 0$, $F_{zz} = e^z$

$$\Rightarrow z_{xy} = -\frac{2x\cdot(e^z+1)^2 - 0 - 0 + e^z\cdot 2xy\cdot x^2}{(e^z+1)^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_{xy} = -2x\cdot\frac{[(e^z+1)^2 + x^2ye^z]}{(e^z+1)^3}}$$

■