A1/ $f(x,y) = \dfrac{x+y-1}{x-y+1}$. Υπολογισμός $\partial_x f$, $\partial_y f$ για $(x_0,y_0)=(2,1)$ με

(α) τον ορισμό: $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(2,1)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{2+h+1-1}{2+h-1+1} - \frac{2+1-1}{2-1+1}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} =$

$= \dfrac{0}{0} \rightarrow$ l'Hopital: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{1} = 0.$

$\Rightarrow \boxed{\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,1)} = 0}$

Σημείωση: Ο ορισμός δεν χρειάζεται, επειδή εδώ είναι προφανές ότι οι παράγωγοι $\partial_{x,y} f$ για $(x_0,y_0)=(2,1)$ υπάρχουν. Απλώς εξάσκηση.

Ανάλογα για $\partial_y f$:

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,1)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2,h+1)-f(2,1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{2+(h+1)-1}{2-(h+1)+1} - 1}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{2+h}{2-h} - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h}{h(2-h)} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ l'Hopital

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2}{2-2h} = 1 \Rightarrow \boxed{\left.\partial_y f\right|_{(2,1)} = 1}$

(1β) Με κλασσική μέθοδος: Παραγώγιση $\partial_x f$ (ως προς x κρατώντας y σταθερά και μετά στο τελικό αποτέλεσμα θέτουμε $(x,y)=(2,1)$:

$$\partial_x f = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x+y-1}{x-y+1}\right] = \frac{(x+y-1)'\cdot(x-y+1)-(x+y-1)\cdot(x-y+1)'}{(x-y+1)^2} =$$

! ως προς x !
$y=$const.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$= \frac{1\cdot(\cancel{x}\cancel{-y}+1)-(\cancel{x}\cancel{+y}-1)\cdot(+1)}{(x-y+1)^2} = \frac{0}{(\dots)^2} = 0. \rightarrow \underline{\underline{\partial_x f(x,y)=0}}$$

$\neq 0$ για $(2,1)$, ο.κ.

$$\rightarrow \boxed{\partial_x f(2,1)=0}$$

Ανάλογα για $\partial_y f\big|_{(x_0,y_0)=(2,1)}$:

$$\underline{\underline{\partial_y f}} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x+y-1}{x-y+1}\right] = \frac{(x+y-1)'\cdot(x-y+1)-(x+y-1)\cdot(x-y+1)'}{(x-y+1)^2} =$$

! ως προς y !
$x=$const.

$$= \frac{1\cdot(x-y+1)-(x+y-1)\cdot(-1)}{(x-y+1)^2} = \frac{x\cancel{-y}\cancel{+1}+x\cancel{+y}\cancel{-1}}{(x-y+1)^2} = \underline{\underline{\frac{2x}{(x-y+1)^2}}}$$

$$\Rightarrow \partial_y f(2,1) = \frac{2\cdot 2}{(2-\cancel{1}\cancel{+1})^2} = \frac{4}{4} = 1. \Rightarrow \boxed{\partial_y f = 1 \text{ για } (x_0,y_0)=(2,1)}$$

Α2/(α) $\psi(t,x) = (x-at)^4 + \cos(x+at)$.

Υπολογίζουμε τις πρώτες και μετά δεύτερες παραγώγους ως προς x και y, αντίστοιχα:

$$\partial_t \psi = \frac{\partial}{\partial t}\left[(x-at)^4 + \cos(x+at)\right] =$$

$$= 4(x-at)^3 \cdot (-a) - \sin(x+at) \cdot a = -a\left[4(x-at)^3 + \sin(x+at)\right]$$

$$\Rightarrow \partial_t^2 \psi = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial t}\psi\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[(-a)\left(4(x-at)^3 + \sin(x+at)\right)\right] =$$

$$= -a \cdot \left[12(x-at)^2 \cdot (-a) + \cos(x+at) \cdot a\right]$$

$$\Rightarrow \partial_t^2 \psi = a^2\left[\cos(x+at) - 12(x-at)^2\right]$$

Ανάλογα υπολογίζουμε ∂_x^2:

$$\partial_x \psi = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-at)^4 + \cos(x+at)\right] = 4(x-at)^3 \cdot 1 - \sin(x+at) \cdot 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\partial_x^2 \psi}} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\psi\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[4(x-at)^3 - \sin(x+at)\right] = \underline{\underline{12(x-at)^2 - \cos(x+at)}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \checkmark$$

■

(13) $\phi(\vec{r}) = \phi(x,y,z) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\partial_x \phi = \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right] = -\frac{\alpha}{\cancel{2}} \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (\cancel{2}x)$$

$$\Rightarrow \partial_x \phi = -\frac{\alpha x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}}, \text{ Ανάλογα: } \partial_y \phi = -\frac{\alpha y}{\sqrt{\ldots}^{\,3}}, \quad \partial_z \phi = -\frac{\alpha z}{\sqrt{\ldots}^{\,3}}$$

Στην συνέχεια:

$$\underline{\underline{\partial_x^2 \phi}} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\phi\right] = -\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[x \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right] =$$

$$= -\alpha\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} + x \cdot \left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right) \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}-1} \cdot (\cancel{2}x)\right]$$

$$= \frac{-\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}} + \frac{+3x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,5}} \Rightarrow \boxed{\partial_x^2 \phi = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}},$$

$$\left(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$\text{Ανάλογα: } \boxed{\partial_y^2 \phi = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad \partial_z^2 \phi = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}}$$

$$\Rightarrow \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right)\phi = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right)\phi(x,y,z) = 0} \checkmark$$

A3/ $f(x,y)=\begin{cases} xy\,\dfrac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

(α) $\partial_x f$, $\partial_y f$ για $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\underline{\underline{\partial_x f}}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2x^3y-3xy^3}{x^2+y^2}\right]=\frac{(6x^2y-3y^3)(x^2+y^2)-(2x^3y-3xy^3)2x}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{6x^4y-3x^2y^3+6x^2y^3-3y^5-2x^4y+6x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{4x^4y+9x^2y^3-3y^5}{(x^2+y^2)^2}}}. \quad (1)$$

$$\underline{\underline{\partial_y f}}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2x^3y-3xy^3}{x^2+y^2}\right]=\frac{(2x^3-9xy^2)(x^2+y^2)-(2x^3y-3xy^3)2y}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{2x^5-9x^3y^2+2x^3y^2-9xy^4-4x^3y^2+6xy^4}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{2x^5-11x^3y^2-3xy^4}{(x^2+y^2)^2}}} \quad (2)$$

~~Τώρα από (1) & (2) ... $\partial_x f$ και~~. Τις σχέσεις (1) & (2) χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό των μεικτών παραγώγων $2^{ης}$ τάξης $\partial_x\partial_y f$ και $\partial_y\partial_x f$ στο σημείο $(0,0)$.

Ας δούμε τώρα τις $\partial_x f$ και $\partial_y f$ στο $(0,0)$:

$\partial_x f\big|_{(x,y)=(0,0)} = \frac{0}{0}$ από την σχέση (1). Ανάλογα

έχουμε $\partial_y f\big|_{(x,y)=(0,0)} = \frac{0}{0}$ από (2). → απροσδιόριστες μορφές.

⇒ Πρέπει να κάνουμε χρήση του ορισμού μερικών παραγώγων:

$$\underline{\underline{\partial_x f(0,0)}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2\cdot(0+h)^3\cdot 0 - 3\cdot(0+h)\cdot 0}{(0+h)^2+0^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \underline{\underline{0}}.$$

$$\underline{\underline{\partial_y f(0,0)}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2\cdot 0^3\cdot(0+h) - 3\cdot 0\cdot(0+h)^3}{0^2+(0+h)^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \underline{\underline{0}}$$

β) Για την μελέτη της συνέχειας των $\partial_x f$ και $\partial_y f$ στο σημείο $(x,y)=(0,0)$ πρέπει να υπολογίσουμε τα όρια των συναρτήσεων $F_1 := \partial_x f$ και $F_2 := \partial_y f$ στο σημείο $(x,y)=(0,0)$, τα οποία πρέπει να ισούνται με τις τιμές των συναρτήσεων F_1 και F_2, αντίστοιχα, στο $(x,y)=(0,0)$. Παραπάνω υπολογίσαμε τις F_1 και F_2 για $(x,y)\neq(0,0)$ και για $(x,y)=(0,0)$:

$$F_1 := \partial_x f = \begin{cases} \dfrac{4x^4y+9x^2y^3-3y^5}{(x^2+y^2)^2} &, (x,y)\neq(0,0) \\ 0 &, (x,y)=(0,0) \end{cases} \qquad (3)$$

και

$$F_2 := \partial_y f = \begin{cases} \dfrac{2x^5-11x^3y^2-3xy^4}{(x^2+y^2)^2} &, (x,y)\neq(0,0) \\ 0 &, (x,y)=(0,0). \end{cases} \qquad (4)$$

Συνέχεια της F_1:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F_1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{4x^4y+9x^2y^3-3y^5}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{0}{0} \to \text{απροσδιόριστη μορφή.}$$

Προσοχή: ΟΧΙ l'Hopital!!

Για ρητές πολυωνυμικές συναρτήσεις ~~υπολογισμός~~ ύπαρξη + υπολογισμός ορίου με πολικές συντεταγμένες:

$$\begin{matrix} x = r\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\varphi \end{matrix} \Rightarrow F_1 = \frac{4r^5\cdot\overbrace{\cos^4\varphi\sin\varphi}^{g_1} + 9r^5\cdot g_2(\varphi) - 3r^5\cdot g_3(\varphi)}{r^4}$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to0} F_1 = \underbrace{\lim_{r\to0}[4r\cdot g_1(\varphi)]}_{=0} + \underbrace{\lim_{r\to0}[9r\cdot g_2(\varphi)]}_{=0} - \underbrace{\lim_{r\to0}[3r\cdot g_3(\varphi)]}_{=0}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} F_1(x,y) = 0 = F_1(0,0) \checkmark \to \text{συνεχής η } \partial_x f \text{ στο } (0,0).$$

Με παρόμοιο τρόπο για συνέχεια της F_2: πολικές συντεταγμένες για $F_2(x,y)$:

$$F_2 = 2r\cdot g_1(\varphi) - 11r\cdot g_2(\varphi) - 3r\cdot g_3(\varphi)$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to 0} F_2 = 0 = F_2(0,0) \checkmark \rightarrow \partial_y f \text{ συνεχής στο } (0,0).$$

γ) Για τον υπολογισμό των παραγώγων 2ης τάξης

$$\partial_x \partial_y f \quad \text{και} \quad \partial_y \partial_x f$$

στο σημείο $(x,y)=(0,0)$ παίρνουμε ως αφετηρία τις συναρτήσεις $F_2 := \partial_y f$ και $F_1 := \partial_x f$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό μερικής παραγώγου ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x, $\partial_x F_2$, και y, $\partial_y F_1$, αντίστοιχα:

$$\partial_x F_2 = \lim_{h\to 0} \frac{F_2(0+h,0) - F_2(0,0)}{h} \underset{\uparrow}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2\cdot(0+h)^5 - 11\cdot(0+h)^3\cdot 0 - 3\cdot(0+h)0^4}{[(0+h)^2+0^2]^2} - 0}{h} =$$

σχέση (4)
για $F_2(0+h,0)$ με $(x,y)\neq(0,0)$
$F_2(0,0)$ με $(x,y)=(0,0)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2\cdot h^5}{h^4}}{h} = 2.$$

Ανάλογα:

σχέση (3) για F_1

$$\partial_y F_1 = \lim_{h\to 0} \frac{F_1(0,0+h) - F_1(0,0)}{h} \overset{\downarrow}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{4\cdot 0^4(0+h) + 9\cdot 0^2\cdot(0+h)^3 - 3\cdot(0+h)^5}{[0^2+(0+h)^2]^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{-3\cdot h^5}{h^4}}{h} = -3$$

$$\Rightarrow \partial_x \partial_y f(0,0) = 2 \neq \partial_y \partial_x f(0,0) = -3.$$

O λόγος γιατί $\partial_x\partial_y f \neq \partial_y\partial_x f$ στο $(0,0)$ είναι ότι οι $\partial_x\partial_y f$, $\partial_y\partial_x f$ **ΔΕΝ** είναι συνεχείς στην αρχή των αξόνων.

Ναι μεν υπάρχουν αυτές οι μεικτές παράγωγοι, αλλά δεν είναι συνεχείς.

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Schwarz δεν ισχύει εδώ η ισότητα $\partial_x\partial_y f = \partial_y\partial_x f$ για $(x,y)=(0,0)$.

Για την μελέτη της συνέχειας της $\partial_x\partial_y f$ ή $\partial_y\partial_x f$ στο $(x,y)=(0,0)$ εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο που εφαρμόσαμε στο ερώτημα (β), αλλά τώρα για τις συναρτήσεις $\partial_x\partial_y f$ ή $\partial_y\partial_x f$.

Υπολογίζουμε δηλαδή πρώτα για $(x,y)\neq(0,0)$, π.χ.,

$$\partial_x\partial_y f = \partial_x F_2 = \frac{(10x^4-33x^2y^2-12y^4)(x^2+y^2)^2 - \ldots}{[(x^2+y^2)^2]^2} \quad (5)$$

Δεν χρειάζεται να κάνουμε όλες τις πράξεις με λεπτομέρεια, επειδή δεν μας το ζητάει η άσκηση στο ερώτημα (δ). Παρατηρούμε στην σχέση (5), ότι αριθμ. και παρανομ. έχουν όρους ίδιας δύναμης, δηλαδή περιέχουν όρους $\sim \frac{A^8}{B^8}$.

Ύπαρξη του ορίου με πολικές συντεταγμένες $x=r\cdot\cos\varphi$, $y=r\cdot\sin\varphi$

$$\Rightarrow \lim_{r\to 0} \partial_x\partial_y f = \lim_{r\to 0} \frac{r^8\cdot g_1(\varphi)}{r^8\cdot g_2(\varphi)} = \frac{g_1(\varphi)}{g_2(\varphi)}$$

$\Rightarrow$ όριο της $\partial_x\partial_y f$ στο $(0,0)$ **ΔΕΝ** υπάρχει.

A4

(a) Για την μελέτη ύπαρξης ολικού διαφορικού της έκφρασης

$$P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

με τρεις ανεξ. μεταβλητές πρέπει να δούμε εάν ισχύουν οι ισότητες

$$\partial_y P = \partial_x Q \quad \underline{\text{και}} \quad \partial_z P = \partial_x R \quad \underline{\text{και}} \quad \partial_z Q = \partial_y R \quad (*).$$

Εάν ισχύουν <u>και οι τρεις</u> ισότητες (*), τότε η ζητούμενη συνάρτηση υπολογίζεται χρησιμοποιώντας κατά προτίμηση τα ολοκληρώματα

$$f(x,y,z) = \int_a^x P(t,y,z)\,dt + \int_b^y Q(a,t,z)\,dt + \int_c^z R(a,b,t)\,dt \quad (**).$$

Στο εδώ παράδειγμα έχουμε λοιπόν με $P = x(y^2+z^2)$, $Q = y(x^2+z^2)$, $R = z(x^2+y^2)$

$$\partial_y P = \frac{\partial}{\partial y}\left[x(y^2+z^2)\right] = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)}_{2xy} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(xz^2)}_{=0} = 2xy$$

$$\partial_x Q = \frac{\partial}{\partial x}\left[y(x^2+z^2)\right] = 2xy \qquad \Rightarrow \partial_y P = \partial_x Q \ \checkmark$$

Ανάλογα: $\partial_z P = 2xz = \partial_x R = 2xz$ ✓ και $\partial_z Q = 2yz = \partial_y R = 2yz$ ✓.

$$\Rightarrow f(x,y,z) = \int_a^x t(y^2+z^2)\,dt + \int_b^y t(a^2+z^2)\,dt + \int_c^z t(a^2+b^2)\,dt.$$

Μπορούμε για απλότητα να θέσουμε $a=b=c=0$ και έχουμε:

$$f = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x (y^2+z^2) + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^y (0^2+z^2) + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^z (0^2+0^2) = \frac{1}{2}\left(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\right) + \overset{\text{μία σταθερά}}{c}$$

(β) $\underbrace{(x^2+axy^2)}_{P(x,y)}dx+\underbrace{(y^2-x^2y)}_{Q(x,y)}dy \quad (+)$

Πρέπει να ισχύει: $\partial_y P=\partial_x Q$ ή $\frac{\partial}{\partial y}\left[x^2+axy^2\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[y^2-x^2y\right]$

ή $2axy=-2xy \Longrightarrow \boxed{a=-1}$

Για $\underline{\underline{a=-1}}$ υπάρχει $f(x,y)$ που είναι ολικό διαφορικό της $(+)$, και το υπολογίζουμε και με τους 2 τρόπους $(a=-1)$:

(i) $df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy \quad (++)$.

Σύγκριση $(+)$ με $(++) \Longrightarrow P=\frac{\partial f}{\partial x}$ και $Q=\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\Longrightarrow f(x,y)=\int P(x,y)dx+R(y)=\int(x^2-xy^2)dx+R(y)$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2y^2}{2}+R(y).$$

Εν συνεχεία,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=Q \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left[\underbrace{\frac{x^3}{3}}_{0}-\underbrace{\frac{x^2y^2}{2}}_{x^2y}+R(y)\right]=y^2-x^2y$$

ή $\cancel{-x^2y}+\frac{dR(y)}{dy}=y^2\cancel{-x^2y} \Longrightarrow \frac{dR}{dy}=y^2$ ή $R(y)=\int y^2dy=\frac{y^3}{3}+c$.

$$\Longrightarrow \boxed{f(x,y)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+c}$$, όπου $c=$σταθερά.

(ii) Με το ολοκλήρωμα

$$f(x,y)=\int_a^x P(t,y)\,dt+\int_b^y Q(a,t)\,dt=$$

$$\overset{(a=b=0)}{=}\int_0^x (t^2-ty^2)\,dt+\int_0^y (t^2-0^2\cdot t)\,dt$$

$$=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x-y^2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x+\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{t^3}{3}+c$$

A5 (α) Χρειαζόμαστε το διαφορικό της συνάρτησης $B=B(I,r)$:

$$\Delta B\approx dB=\underbrace{\left(\frac{\partial B}{\partial I}\right)}_{\frac{\mu_0}{2\pi r}}dI+\underbrace{\left(\frac{\partial B}{\partial r}\right)}_{-\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}}dr$$

$$\Rightarrow \Delta B\simeq\frac{\mu_0}{2\pi r}\left(dI-\frac{I}{r}dr\right)=\frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{2\pi\cdot 0{,}4m}\cdot\left[0{,}2\cdot 10^{-3}A-\frac{2A\cdot 10^{-3}m}{0{,}4m}\right]$$

$I=I_0=2A$

$r=r_0=40cm=0{,}4m$

$dI=0{,}2\cdot 10^{-3}A$ και $dr=10^{-3}m$

$$\Rightarrow \underline{\Delta B}=-2{,}4\cdot 10^{-8}\underbrace{\frac{A}{m}\cdot\frac{N}{A^2}}=\underline{-2{,}4\cdot 10^{-8}\,T}$$

μονάδες μέτρησης $\longrightarrow \frac{N}{A\cdot m}=\frac{Kg\,m}{s^2}\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{A}=\frac{Kg}{s^2A}=1\,\text{Tesla}=1T.$

(β) Υπολογίζουμε την έκφραση $(1.02)^{0.95}$ προσεγγιστικά με την χρήση του ολικού διαφορικού θέτοντας

$$f(x,y) = x^y.$$

Με $\Delta x = dx = 0.02$ και $\Delta y = dy = -0.05$ και $|\Delta x| \ll 1, |\Delta y| \ll 1$ έχουμε

$$\Delta f \simeq df = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}_{yx^{y-1}} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy$$

yx^{y-1} ή $f(x,y) = \left(e^{\ln x}\right)^y = e^{y \ln x} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{y \ln x} \cdot \dfrac{y}{x} = x^y \dfrac{y}{x}$ ✓

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{y \ln x}\right] = e^{y \ln x} \cdot \ln x = \underline{\underline{x^y \cdot \ln x}}.$$

$$\Rightarrow \boxed{df = yx^{y-1} \cdot dx + x^y \ln x \cdot dy}$$

Τώρα με $(x,y) = (1,1)$, $dx = 0.02$ και $dy = -0.05$ έχουμε

$$df = 1 \cdot (0.02) + (\underbrace{1^1 \cdot \ln(1)}_{=0}) \cdot (-0.05) = 0.02$$

$$\Rightarrow \Delta f \simeq df = f(1.02, 0.95) - f(1,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{f(1.02, 0.95)} = f(1,1) + \Delta f = 1^1 + 0.02 = \underline{\underline{1.02}}$$

Με υπολογιστή: $f(1.02, 0.95) = (1.02)^{0.95} = 1.021$

→ πολύ καλή προσέγγιση, διότι $|\Delta x| \ll 1$ και $|\Delta y| \ll 1$