$\Sigma\epsilon\tau\ 2$

A1 α) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = ;$ (Να υπολογιστεί)

Λύση

Γράφουμε

$$f(x,y) = \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{x^2 - x\cdot y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\overbrace{(x^2 - x\cdot y)}^{x\cdot\cancel{(x-y)}}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\cancel{(x-y)}} =$$

$$= x\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y}). \text{ Άρα } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} [x\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})] =$$

$$= 0\cdot(\sqrt{0}+\sqrt{0}) = \underline{\underline{0}}.$$

β) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{2xy}} = ;$ (Να υπολογιστεί)

Λύση

Τρόπος λύσης όπως στην (α). Έχουμε πρώτα

$$\frac{(x-y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{2xy}} = \frac{(x-y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{2xy}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}} =$$

$$= \frac{\cancel{(x-y)^2}\cdot(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy})}{\underbrace{(\sqrt{x^2+y^2})^2 - (\sqrt{2xy})^2}_{x^2+y^2-2xy = \cancel{(x-y)^2}}} = \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}$$

$$\Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}) = \underline{\underline{0}}$$

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$. Πολικές συντ.: $x=\varrho\cdot\cos\varphi$, $y=\varrho\cdot\sin\varphi$

$(x,y)\to(0,0) \Rightarrow \varrho\to 0$ ($\varphi\in[0,2\pi]$).

$$\Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)}{\varrho^2} = \lim_{\varrho\to 0}\Big[\underset{\substack{\to 0\\(\varrho\to 0)}}{\varrho^2}\cdot\underbrace{(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)}_{\text{φραγμένη}}\Big]=0$$

(b) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2+2x^3+3y^3}{x^2+y^2} \underset{\uparrow}{=} \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2\cos^2\varphi-\varrho^2\sin^2\varphi+2\varrho^3\cos^3\varphi+3\varrho^3\sin^3\varphi}{\varrho^2}$$

πολ. συντ.
$x=\varrho\cdot\cos\varphi$
$y=\varrho\cdot\sin\varphi$

$$\Rightarrow \lim_{\varrho\to 0}\left[\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+\varrho(2\cos^3\varphi+3\sin^3\varphi)\right]=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi$$

$\longrightarrow$ όριο <u>ΔΕΝ</u> υπάρχει.

(c) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^4+y^4)e^{(x^2+y^2)^{-1}} \underset{\uparrow}{=} \lim_{\varrho\to 0}\left[(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi)\cdot\varrho^4\cdot e^{\frac{1}{\varrho^2}}\right]$$

πολ. συντ.

Έχουμε εδώ: $$\lim_{\varrho\to 0} \frac{e^{1/\varrho^2}}{\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)^2} \underset{\substack{\uparrow\\ t=\frac{1}{\varrho^2}}}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{t^2}=\infty.$$

Όριο <u>ΔΕΝ</u> υπάρχει.

$\left(\lim\limits_{t\to\infty}\frac{e^t}{t^2}=\frac{\infty}{\infty}\right.$. L'Hopital: $\frac{e^t}{2t}\to\frac{e^t}{2}\to\lim\limits_{t\to\infty}\frac{e^t}{2}=\infty$).

διότι $(e^t)'=e^t$.).

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$. Για $(x,y)\to(0,0)$ είναι $\frac{\sqrt{0+1}-1}{0}=\frac{0}{0}$.

Και μετά από πολ. συντ. έχουμε απροσδιόριστη μορφή: $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\sqrt{\rho^4(\cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi)+1}-1}{\rho^2} = \dfrac{\sqrt{0+1}-1}{0} = \dfrac{0}{0}$.

$\curvearrowright$

Απλοποίηση ποσ/νεας αριθμ. & παρανομαστή με $\sqrt{x^2y^2+1}+1$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(\sqrt{x^2y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2y^2+1}+1\right)}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2y^2+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2y^2+1}-1\right)} \underset{\text{πολ. συντ.}}{=} \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^{\cancel{4}\,2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\cancel{\rho^2}\left(\sqrt{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi+1}+1\right)} =$$

$$= \frac{0}{\sqrt{0+1}+1} = 0. \quad (\checkmark)$$

(e) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}\cdot\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} =$$

(γνωστό όριο $\frac{\sin(\xi)}{\xi}$ για $\xi\to 0$)

$$= \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}}_{\substack{(t=x^3+y^3)\\ \parallel \\ \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}}} \cdot \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}}_{\substack{\parallel \\ \lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\rho^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)}{\rho^2}}} = 1\cdot 0 = 0$$

(7) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x\cdot y(x^2+y^2)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \to$$ απροσδιόριστη μορφή...

Για να δούμε αν το όριο υπάρχει παίρνουμε δύο ακολουθίες σημείων $P_n=\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)$ $P_n'=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ έτσι ώστε $P_n \to 0$ και $P_n' \to 0$ για $n\to\infty$, και έχουμε

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{xy(x^2+y^2)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2\cdot\sin^2\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{xy(x^2+y^2)} = \lim_{\substack{n\to\infty\\ P_n}} \frac{2\cdot\sin^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n^2}\right)}{\frac{2}{n^2}\left(-\frac{1}{n^2}\right)} =$$

υπόδειξη: $1-\cos\varphi = 2\sin^2(\varphi/2)$

$$= -\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right)^2 = -1.$$

Ίδια διαδικασία για P_n': $$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\sin^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n^2}\right)}{\frac{2}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}} = +1$$

$\Rightarrow$ Όρια για P_n και P_n' είναι -1 και $+1$, αντίστοιχα.
Δεν είναι ίδια $\Rightarrow$ όριο ΔΕΝ υπάρχει. ■

A3/ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-\sin^2(y)}{\tan(x)+y} = ?$$ για $(x,y)=(0,0)$: $\frac{0-0}{0+0}=\frac{0}{0}$, απροσδ. μορφή, δεν βγαίνει έτσι.

Ανάπτυγμα Taylor: $\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \mp \dots \approx t$ για $t \ll 1$!

$\tan(t) = t + \frac{t^3}{3} + \dots \approx t$ ή $t\to 0$

5

$\Rightarrow$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-(\sin(y))^2}{\tan(x)+y} \simeq \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x+y)(x-y)}{x+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x-y) = 0.$$

A4/

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^4)\ln(x^2+y^4) \underset{\substack{\uparrow\\ t=x^2+y^2}}{=} \lim_{t\to 0} t\cdot \ln(t) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln(t)}{\left(\frac{1}{t}\right)} = -\frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{l'Hopital:}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(t)}{\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{(\ln(t))'}{\left[\frac{1}{t}\right]'} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = -\lim_{t\to 0} t = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x+y+\sin(x+y)}{x+y-\sin(x+y)} = \frac{\infty}{\infty},$$ απροσδιόριστη μορφή, δεν βοηθάει.

Μεταβλ. $t=x+y$: $\lim_{t\to\infty} \frac{t+\sin(t)}{t-\sin(t)} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ l'Hopital.

Αλλά προσοχή: $\frac{1+\cos(t)}{1-\cos(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{}$ ΔΕΝ υπάρχει.

Έχουμε όμως: $\lim_{t\to\infty} \frac{t+\sin(t)}{t-\sin(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1+\frac{\sin(t)}{t}}{1-\frac{\sin(t)}{t}} = \rightarrow$ επόμενη σελίδα

$$= \frac{1+\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\cdot\sin(t)\right)}{1-\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\cdot\sin(t)\right)} \underset{\uparrow}{=} \frac{1+0}{1-0} = 1$$

$|\sin(t)|\le 1$

και $\frac{1}{t}\to 0 \ (t\to\infty)$

A5/

$$f(x,y)=\begin{cases}(\sin^4(x)-\sin^4(y))/(x^2-y^2), & (x,y)\neq(0,0)\\ \lambda, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

f συνεχής στο $(0,0)$ αν $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lambda$.

Έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^4 x-\sin^4 y}{x^2-y^2} \underset{\uparrow}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4-y^4}{x^2-y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{x^2-y^2} =$$

$\sin(t)\approx t$

για $t\to 0$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2) = 0.$$

$\Rightarrow$ Για $\boxed{\lambda=0}$ η $f(x,y)$ είναι συνεχής στο $(0,0)$.