Α1 Σετ 1 ①

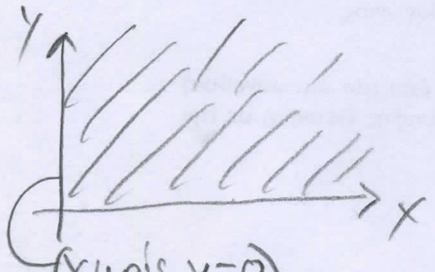
① Πεδία ορισμών + γραφήματα των

• $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x}}{y}$

Λύση

Πρέπει $x\geq 0$ & $y\neq 0$. Πεδίο ορισμού (Π.Ο.) είναι

$$A=\{(x,y): x\geq 0 \ \& \ y\neq 0\}$$



(χωρίς $y=0$)

• $f(x,y)=\sqrt{\underbrace{(16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)}}$

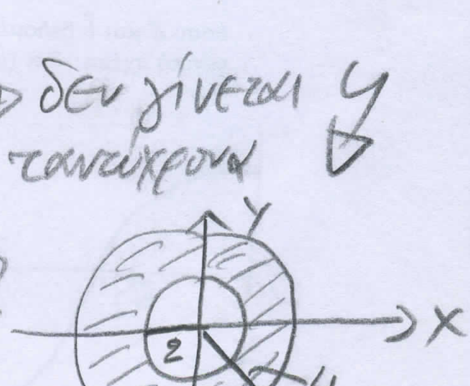
Λύση

Εδώ πρέπει ο όρος να είναι ≥ 0. Άρα

$$\begin{cases} 16-x^2-y^2\geq 0 \text{ και } x^2+y^2-4\geq 0 \\ \text{ή} \\ 16-x^2-y^2\leq 0 \text{ και } x^2+y^2-4\leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2\leq 16 \text{ και } x^2+y^2\geq 4 \\ \text{ή} \\ x^2+y^2\geq 16 \text{ και } x^2+y^2\leq 4 \rightarrow \text{δεν γίνεται ταυτόχρονα} \end{cases}$$

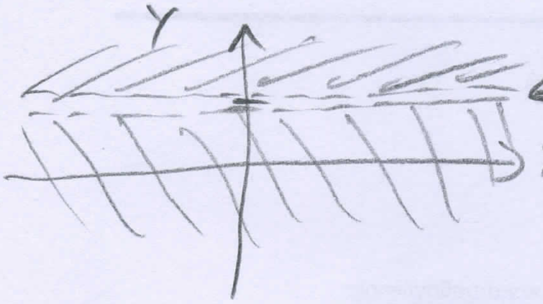
$$\Rightarrow \text{Π.Ο.}: A=\{(x,y): 4\leq x^2+y^2\leq 16\}$$



• $f(x,y)=\dfrac{x(1-y)}{y^2-2y+1}$

Λύση

Εδώ: $y^2-2y+1=(y-1)^2\neq 0 \Rightarrow \boxed{y\neq 1} \Rightarrow$ Π.Ο.: $A=\{(x,y): x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}-\{1\}\}$



• $f(x,y)=\left(1-\sin^2(x^2+y^2)\right)^{1/4}$

Λύση

Εδώ: $f=\left(1-\sin^2(x^2+y^2)\right)^{1/4}=\left[\cos(x^2+y^2)\right]^{1/2}$

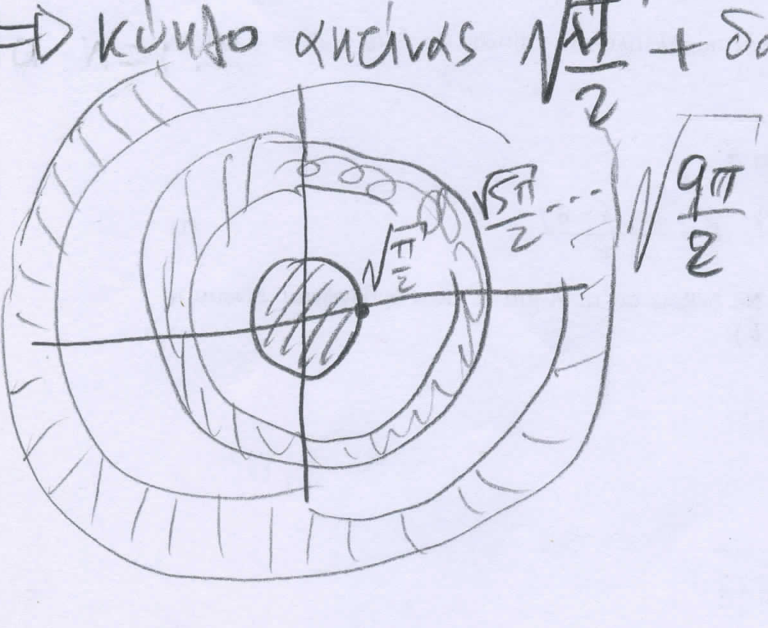
$\uparrow$

$\sin^2(\dots)+\cos^2(\dots)=1$

$$\Rightarrow \cos(x^2+y^2)\geq 0 \Rightarrow 2n\pi-\pi/2\leq x^2+y^2\leq 2n\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$(n=0,1,2,3,\dots)$$

$\Rightarrow$ κύκλο ακτίνας $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ + δακτυλίους:



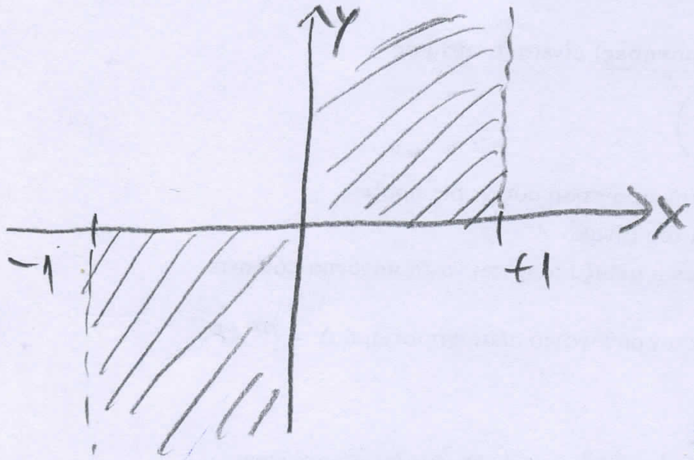
• $f(x,y) = \sin^{-1}(x) + \sqrt{xy}$

Λύση

Εδώ: Για $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ της $\sin(x)$ ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $\sin^{-1}(x)$ ή $\arcsin(x)$ με πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$.

Η $\sqrt{xy}$ ορίζεται όταν x & y είναι ομόσημα, δηλ. για $x \cdot y \geq 0$.

$\Rightarrow \{(x,y): -1 \leq x \leq 0, y \leq 0$ και $0 \leq x \leq 1, y \geq 0\}$.



(A2) • $f(x,y,z) = \ln(4-x^2-y^2-z^2)$

Λύση

Πρέπει $4-x^2-y^2-z^2 > 0 \Rightarrow$ Π.Ο. $A = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 < 4\}$

$\rightarrow$ σφαίρα ακτίνας $a < 4$ με κέντρο την αρχή των αξόνων.

• $f(x,y,z) = \sqrt{1-9x^2-y^2-4z^2}$

Λύση

Πρέπει $1-9x^2-y^2-4z^2 \geq 0$ ή $9x^2+y^2+4z^2 \leq 1$

$\Rightarrow A = \{(x,y,z): 9x^2+y^2+4z^2 \leq 1\} \rightarrow$ Ελλειψοειδές + εσωτερικό του $\boxed{\frac{x^2}{(\frac{1}{3})^2} + y^2 + \frac{z^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1}$

4

• $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-z}$

Λύση

Εδώ: $x^2+y^2-z\geq 0$ ή $x^2+y^2\geq z \Rightarrow A=\{(x,y,z): x^2+y^2\geq z\}$

→ Παραβολοειδές $z=x^2+y^2$ και έξω από αυτό.

• $f(x,y,z)=\dfrac{\ln(z)}{x^2+y^2+z^2-9}$

Λύση

Εδώ: $z>0$ και $x^2+y^2+z^2\neq 9 \Rightarrow$ Σφαίρα αλλά για $z>0$ και εντός της επιφάνειας $x^2+y^2+z^2=9=3^2$.

• $f(x,y,z)=\dfrac{z}{\sin(x+z)\sin(x+y)}$

Λύση

Εδώ παρανομαστής $\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y\neq k\pi \\ \text{και} \\ x+z\neq m\pi \end{cases}$ για $k,m=0,\pm1,\pm2,\ldots$

$\Rightarrow$ Τεμνόμενα: $\left\{\dfrac{x}{1}=\dfrac{-y+k\pi}{1}=\dfrac{-z+m\pi}{1} : (x,y,z)\right\}=E_{km}$

Ο τρισδιάστατος χώρος που του έχουν αφαιρεθεί οι παραπάνω ευθείες E_{km}.

A3 (α) $g(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{1-z^2}}{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}$ σε κατάλληλες συντεταγμένες

Λύση

Κυλινδρικές συντεταγμένες: $x=\rho\cdot\cos\varphi$, $y=\rho\cdot\sin\varphi$, $z=z$ $\rightarrow g(\rho,z)=\dfrac{\sqrt{1-z^2}}{2-\sqrt{4-\rho^2}}$

$\Rightarrow 1-z^2 \geq 0 \Rightarrow z^2 \leq 1$ ή $-1 \leq z \leq 1$

και $\rho^2 \leq 4$

$\Rightarrow$ Π.Ο.: επιφάνεια και εσωτερικό κυλίνδρου με βάση τον κύκλο $\rho^2 = 4$ και ύψος 2. (από $z=-1$ έως $z=+1$).

β) $\phi = (x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}}$

Σφαιρικές συντεταγμένες: $x = r\cos\theta\sin\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = r^2$

$z = r\cos\theta$

$$\Rightarrow \phi(r, \theta) = \frac{1}{r} - \frac{r\cdot\cos\theta}{r^3}$$

ή $\boxed{\phi(r,\theta) = \dfrac{1}{r} - \dfrac{\cos\theta}{r^2}}$

A4 (α)

$$S_1: 9x^2+25y^2+4z^2 = 2 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1}$$

$\downarrow \alpha \quad \downarrow \beta \quad \downarrow \gamma$

$\rightarrow$ Ελλειψοειδές με κέντρο την αρχή των αξόνων και ημιάξονες α, β και γ.

$S_2: z = x^2 + 3y^2 \Rightarrow \boxed{z = \frac{x^2}{\underset{\uparrow\,\alpha^2}{1^2}} + \frac{y^2}{\underset{\uparrow\,\beta^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}}$ → Ελλειπτικό παραβολοειδές με κέντρο την αρχή των αξόνων και παραμέτρους α & β.

$S_3: 2x^2 + 8y^2 - 4x - z = -2.$

Εδώ γράφουμε

$$2\underbrace{(x^2 - 2x)}_{(x-1)^2 - 1} + 8y^2 - z = -2$$

ή

$$2(x-1)^2 - \cancel{2} + 8y^2 - z = \cancel{-2}$$

ή

$$2(x-1)^2 + 8y^2 = z \Rightarrow \boxed{z = \frac{(x-1)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2}}$$

→ Ελλειπτικό παραβολοειδές με κέντρο $P(1,0)$

(β) Έχουμε

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x^2 + Ax)}_{\left(x+\frac{A}{2}\right)^2 - \frac{A^2}{4}} + (y^2 + By) + (z^2 + C\cdot z) + D = 0$$

$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2 - \frac{A^2}{4}$, ανάλογα οι άλλοι όροι.

$$\Rightarrow \left(x+\frac{A}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{B}{2}\right)^2 + \left(z+\frac{C}{2}\right)^2 + D - \frac{A^2}{4} - \frac{B^2}{4} - \frac{C^2}{4} = 0$$

ή τελικά:

$$\boxed{\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=R^2 \\ \text{με } R=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}\ \left(\text{για } A^2+B^2+C^2 \geqslant 4D\right)$$

$\Rightarrow$ σφαίρα κέντρου $P\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2},-\frac{C}{2}\right)$ και ακτίνας R.

A5 (α) $f(x,y)=9-x^2-y^2$.

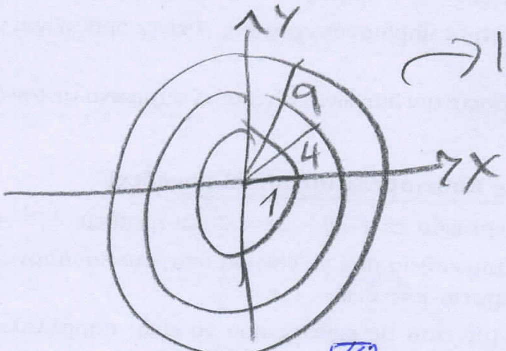
Ισοσταθμ. καμπύλες: θέτω $k=9-x^2-y^2$ ή $\boxed{x^2+y^2=9-k}$

$\Rightarrow$ κύκλοι κέντρου $P(0,0)$ ακτίνας $9-k\ (>0)$.

Για $k=0$: $x^2+y^2=3^2$

$k=5$: $x^2+y^2=2^2$

$k=8$: $x^2+y^2=1$



$\rightarrow$ ισοσταθμικές καμπύλες της $f(x,y)=9-x^2-y^2$

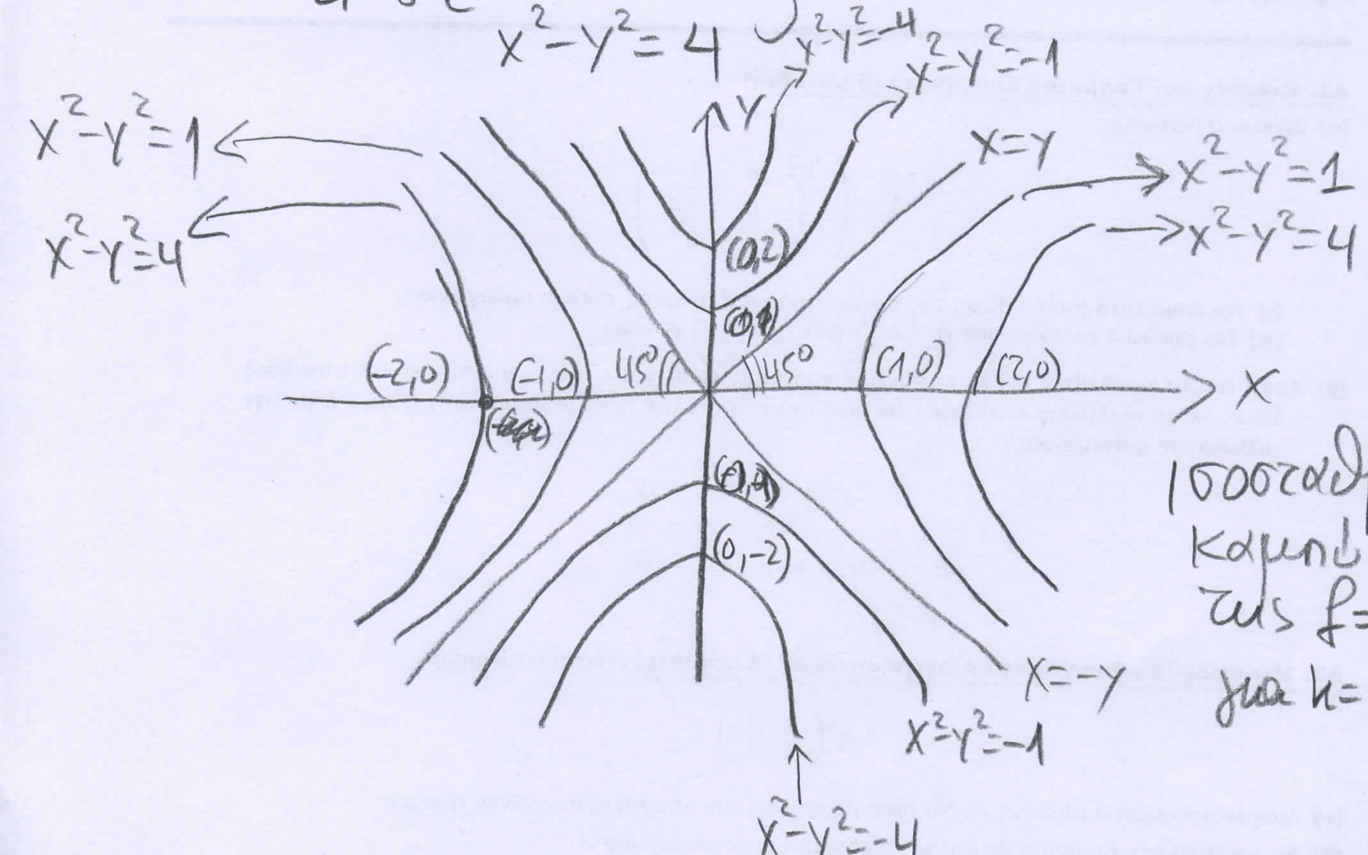
(β) $f(x,y)=x^2-y^2$.

Για τον προσδιορισμό των ισοσταθμικών καμπυλών θέτουμε πάλι $k=x^2-y^2$ και έχουμε

για $\underline{k=0}$: $x^2-y^2=0 \Rightarrow x=y,\ x=-y \rightarrow$ ευθείες $x=y$, $x=-y$

για $k=-1$: $x^2-y^2=-1 \Rightarrow y^2-x^2=1$

$$\left.\begin{array}{c}-4\\1\\4\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=-4\\x^2-y^2=1\\x^2-y^2=4\end{array}\right\} \text{υπερβολές.}$$



Ισοσταθμικές καμπύλες της $f=x^2-y^2$ για $k=-4,-1,0,1,4$

(γ) Ισοσταθμ. καμπύλες της

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+4y^2)-\left[6(x^4+y^4)+2x^2y^2\right]$$

είναι της μορφής

$$k=\frac{1}{2}(x^2+4y^2)-\left[6(x^4+y^4)+2x^2y^2\right].$$

Κοντά στην αρχή των αξόνων οι όροι μικρότερης τάξης υπερισχύουν των όρων ανωτέρων τάξεων. Εδώ δηλαδή προσεγγιστικά έχουμε

$$z\simeq\frac{1}{2}(x^2+4y^2)+\mathcal{O}(4) \Rightarrow \text{ελλειπτικό παραβολοειδές}: \boxed{z\simeq\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

περιέχει όρους 4ης τάξης που δεν περιλαμβάνουμε