Παράγωγος 2ης τάξης:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Bigg[\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}\Bigg]=0 \quad \text{όπου } F(x,y,z(x,y))=0.$$

αυτός ο όρος είναι το αποτέλεσμα της μερικής παραγώγισης της $F(x,y,z(x,y))$ ως προς την μεταβλητή x. Δηλαδή οι όροι

$\frac{\partial F}{\partial x}$ και $\frac{\partial F}{\partial z}$ είναι απλές παραγωγίσεις της

F ως προς x και z, αντίστοιχα, κρατώντας τις άλλες μεταβλητές σταθερές.

Το ίδιο ισχύει και για τον όρο $\frac{\partial z}{\partial x}$. Είναι η μερική παράγωγος της $z(x,y)$ ως προς x κρατώντας την y σταθερή.

Για την επιπλέον παραγώγιση του όρου $[\ldots]$ επάνω έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial F(x,y,z(x,y))}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial F(x,y,z(x,y))}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]=0$$

Για να μην γίνεται μπέρδεμα, ορίζουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x}\equiv G(x,y,z(x,y)) \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial z}\equiv H(x,y,z(x,y))$$

και $\frac{\partial z}{\partial x}\equiv E(x,y)$.

$\Longrightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[G(x,y,z(x,y))+H(x,y,z(x,y))\cdot E(x,y)\Big]=$$

$$=\overbrace{\frac{\partial}{\partial x}\Big[G(x,y,z(x,y))\Big]}^{1^{\text{ος}}\text{ όρος}}+\overbrace{\Big[\frac{\partial}{\partial x}H(x,y,z(x,y))\Big]\cdot E(x,y)}^{2^{\text{ος}}\text{ όρος}}+$$

$$+\overbrace{H(x,y,z(x,y))\cdot\Big[\frac{\partial}{\partial x}E(x,y)\Big]}^{3^{\text{ος}}\text{ όρος}}=$$

$$=\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \Leftarrow 1^{\text{ος}}\text{ όρος}$$

$$+\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]\cdot E \Leftarrow 2^{\text{ος}}\text{ όρος}$$

$$+H\cdot\left[\frac{\partial E}{\partial x}\right] \Leftarrow 3^{\text{ος}}\text{ όρος}$$

$$=\underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}_{F_{xx}}+\underbrace{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\right)}_{F_{xz}}\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}_{z_x}+\underbrace{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\right)}_{F_{xz}}\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}_{z_x}$$

$$+\underbrace{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)}_{F_{zz}}\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}_{(z_x)^2}+\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)}_{F_z}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}_{z_{xx}}$$

αυτό σας έγραψα στον πίνακα

Προσοχή: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \neq \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

Έχουμε λοιπόν

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x,y,z(x,y))=\boxed{F_{xx}+2F_{xz}\cdot z_x+F_{zz}\cdot(z_x)^2+F_z\cdot z_{xx}=0}$$

Με $z_x = -\frac{F_x}{F_z}$ έχουμε στην συνέχεια (88(c))

$$F_{xx} - 2F_{xz} \cdot \frac{F_x}{F_z} + F_{zz} \cdot \frac{F_x^2}{F_z^2} + F_z \cdot z_{xx} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{z_{xx} = -\frac{F_z^2 \cdot F_{xx} - 2F_x \cdot F_z \cdot F_{xz} + (F_x)^2 \cdot F_{zz}}{(F_z)^3}}$$

Ανάλογα υπολογίζονται οι παράγωγοι 2ης τάξης z_{yy} και $z_{xy} \overset{!}{=} z_{yx}$

(Θεωρώντας τις παραγώγους αυτές συνεχείς).