

Παράγωγος ως ζεύξης:

$\mathcal{D}\mathcal{D}(a)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] = 0 \text{ όπου } F(x, y, z(x, y)) = 0$$

αυτός ο όρος είναι το αποτέλεσμα της μερικής παραγώγου της $F(x, y, z(x, y))$ ως προς την μεταβλητή x . Δηλαδή οι όροι

$\frac{\partial F}{\partial x}$ και $\frac{\partial F}{\partial z}$ είναι απλές παραγώγους της

F ως προς x και z , αντίστοιχα, κρατώντας τις άλλες μεταβλητές σταθερές.

Το ίδιο ισχύει και για τον όρο $\frac{\partial z}{\partial x}$. Είναι η μερική παράγωγος της $z(x, y)$ ως προς x κρατώντας την y σταθερή.

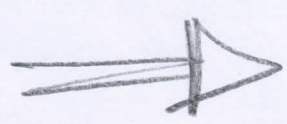
Για την επιπλέον παραγωγή του $[\dots]$ επάνω έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial F(x, y, z(x, y))}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial F(x, y, z(x, y))}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] = 0$$

Για να μην γίνει πολύ μπερδεμένο, ορίσουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x} \equiv G(x, y, z(x, y)) \text{ και } \frac{\partial F}{\partial z} \equiv H(x, y, z(x, y))$$

$$\text{και } \frac{\partial z}{\partial x} \equiv E(x, y).$$



$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\underbrace{G(x,y,z(x,y))}_{1^{\text{ος}} \delta \rho \sigma \varsigma} + \underbrace{H(x,y,z(x,y)) \cdot E(x,y)}_{2^{\text{ος}} \delta \rho \sigma \varsigma} \right] = \boxed{88(b)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[\underbrace{G(x,y,z(x,y))}_{3^{\text{ος}} \delta \rho \sigma \varsigma} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial x} H(x,y,z(x,y)) \right] \cdot E(x,y) + H(x,y,z(x,y)) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} E(x,y) \right] =$$

$$= \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \leftarrow 1^{\text{ος}} \delta \rho \sigma \varsigma$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] \cdot E \leftarrow 2^{\text{ος}} \delta \rho \sigma \varsigma$$

$$+ H \cdot \left[\frac{\partial E}{\partial x} \right] \leftarrow 3^{\text{ος}} \delta \rho \sigma \varsigma$$

$$= \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}_{F_{xx}} + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \right)}_{F_{xz}} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \right)}_{F_{xz}} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right)}_{F_{zz}} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)}_{F_z} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)$$

} ανεξάρτητων πινάκων

Έχουμε φοιτητών

$$\text{Προσοχή: } \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \neq \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x,y,z(x,y)) = \boxed{F_{xx} + 2 F_{xz} \cdot z_x + F_{zz} \cdot (z_x)^2 + F_z \cdot z_{xx} = 0}$$

Με $z_x = -\frac{f_x}{f_z}$ έχουμε συν συνέχεια (88c)

$$f_{xx} - 2 f_{xz} \cdot \frac{f_x}{f_z} + f_{zz} \cdot \frac{f_x^2}{f_z^2} + f_z \cdot z_{xx} = 0$$

$$\Rightarrow z_{xx} = -\frac{f_z^2 \cdot f_{xx} - 2 f_x \cdot f_z \cdot f_{xz} + (f_x)^2 \cdot f_{zz}}{(f_z)^3}$$

Ανάλογα υποψήφια οι παραγόμενες

$$z_{yy} = z_{yy} \text{ και } z_{xy} = z_{yx}$$

(Θεωρούμε τις παραγόμενες αυτές συνεχείς).