$$\Rightarrow \begin{cases} n=3 \text{ περιττός: } (-1)^1\Delta_1>0 \text{ ή } \boxed{\begin{matrix}\Delta_1<0\\ \Delta_2>0\end{matrix}} \Rightarrow \boxed{\text{τοπικό μέγιστο}} \\ \quad (-1)^2\Delta_2>0 \text{ και} \\ \quad \underline{\text{ή}} \\ m=1 \text{ περιττός: } \boxed{\Delta_1<0 \text{ και } \Delta_2<0 \Rightarrow \text{τοπικό ελάχιστο}} \end{cases}$$

(*) Στην πράξη: (i) αντικατάσταση της συνθήκης, αν γίνεται, → $f(x,y,z(x,y))$, (ii) Από σύγκριση τιμών $f(x_0,y_0,\dots)$ όταν f συνεχής και χωρίς πολύ μεγάλες μεταβολές (π.χ. sin, cos, ...) ☺

Παραδείγματα:

1) Ν.Δ.Ο. ένα στερεό σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου (στην αρχή των αξόνων) δοθέντος όγκου V έχει ελάχιστη επιφάνεια όταν είναι κύβος.

Λύση

Υπόδειξη: ορθ. παρ.  $E=2(xy+xz+yz)$, $V=xyz$, κύβος  $E=6x^2$, $V=x^3\equiv xyz$

~~Υπολογίζουμε την~~ Θεωρούμε την συνάρτηση

$$E(x,y,z)=2xy+2xz+2yz \quad \text{όπου } \underline{\underline{x,y,z>0}}.$$

και αναζητούμε ακρότατα της E με την συνθήκη

$$V_0=xyz. \text{ ή } g\equiv xyz-V_0=0.$$

Αλλά $z=\dfrac{V_0}{xy}$ ⇒ πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση ακροτάτων συνάρτησης 2 μεταβλητών:

$$E(x,y)=2xy+2x\frac{V_0}{xy}+2y\frac{V_0}{xy}$$

ή $$\boxed{E(x,y)=2xy+2\frac{V_0}{y}+2\frac{V_0}{x}}$$

i) Υπολογισμός κρίσιμων σημείων

$$E_x = 2y - \frac{2V_0}{x^2} = 0 \;\&\; E_y = 2x - \frac{2V_0}{y^2} = 0$$

με λύση $x^2 = \frac{V_0^2}{y^4}$

$$x = \frac{V_0}{y^2} \Rightarrow y - V_0\frac{y^4}{V_0^2} = 0 \Rightarrow y\left(1 - \frac{y^3}{V_0}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{y=0} \\ y = V_0^{1/3} \end{cases}$$

$x = V_0^{3/3} \cdot V_0^{-2/3}$

$$\Rightarrow \boxed{(x_0, y_0) = \left(V_0^{1/3}, V_0^{1/3}\right)}$$

Διακρίνουσα:

$$E_{xx} = \frac{4V_0}{\underbrace{x^3}_{\to V_0^{1/3}}} > 0, \quad E_{yy} = \frac{4V_0}{\underbrace{y^3}_{\to V_0^{1/3}}} > 0, \quad E_{xy} = E_{yx} = 2$$

$$\Rightarrow \Delta = E_{xx} \cdot E_{yy} - E_{xy}^2 = \left(\frac{4V_0}{x^3}\right)\left(\frac{4V_0}{y^3}\right) + 2 > 0,$$

διότι $V_0 > 0$ και $x, y > 0$! ή $(x,y) \to (x_0, y_0) = (V_0^{1/3}, V_0^{1/3})$ ✓.

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{xx} > 0 \\ \& \\ \Delta > 0 \end{cases} \to$$ Το σημείο $P_0 = (V_0^{1/3}, V_0^{1/3})$ είναι τοπικό ελάχιστο

με τιμή

$$E(P_0) = 2V_0^{1/3} V_0^{1/3} + 2V_0 V_0^{-1/3} + 2V_0 V_0^{-1/3}$$

$$= 6V_0^{2/3} = 6\left(V_0^{1/3}\right)^2 = \text{όγκος κύβου με}$$

πλευρές $x_0 = y_0 = z_0 = V_0^{1/3}$.

2) Να βρείτε τρεις θετικούς αριθμούς των οποίων το άθροισμα είναι 12 και το γινόμενό τους είναι μέγιστο.

Λύση

1ος τρόπος: Έστω $x, y, z > 0$ οι ζητούμενοι αριθμοί. Τότε

$$x + y + z = 12. \quad (1)$$

Η συνάρτηση που ζητούμε το μέγιστο είναι

$$f(x, y, z) = xyz. \quad (2)$$

- Από (1) $\Rightarrow z = 12 - x - y$

$\Rightarrow$ Στην (2): $f(x,y) = xy(12 - x - y) = 12xy - x^2y - xy^2$.

- Υπολογισμός ακροτάτων:

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 12y - 2xy - 2y^2 = 0 \\ f_y &= 12x - x^2 - 2xy = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} P_1(0,0) \to \text{απορρίπτεται, λόγω } x,y,z>0. \\ P_2(4,4) \end{cases}$$

- Χαρακτηρισμός του κρίσιμου σημείου:

$f_{xx}(P_2) = -8 < 0$ και $f_{xy} = f_{yx} = -4$

$f_{yy}(P_2) = -8$

$\Rightarrow \Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 48 > 0$

$\Rightarrow \begin{cases} f_{xx} < 0 \\ \& \\ \Delta > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ τοπικό μέγιστο.

$\Rightarrow$ Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι $x = 4$, $y = 4$ και

$z = 12 - x - y = 4$.

$2^{\text{ος}}$ τρόπος: Με πολλαπλασιαστές Lagrange.

→ Πρόβλημα $\begin{cases} f(x,y,z) = xyz = \text{extr.} \\ \text{με συνθήκη} \\ x+y+z=12 \\ \rightarrow g(x,y,z) = x+y+z-12=0 \end{cases}$ $\Rightarrow \Phi(x,y,z) = f + \lambda \cdot g = 0$

→ Αναζήτηση κρίσιμων σημείων:

$$\vec{\nabla} f + \lambda \vec{\nabla} g = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \Phi_x = yz + \lambda = 0 \\ \Phi_y = xz + \lambda = 0 \\ \Phi_z = xy + \lambda = 0 \\ \Phi_\lambda = x+y+z-12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=y=z=4 \\ \& \\ \lambda = -16 \end{matrix}}$$

Λύση:

Χαρακτηρισμός του $P_0(4,4,4)$ με $\lambda=-16$: Εδώ έχουμε $n=3$ και $m=1$ (τρεις μεταβλητές, μία συνθήκη)

$\rightarrow n-m=2 \rightarrow$ 2 ορίζουσες για διερεύνηση

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} & \Phi_{xz} & g_x \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} & \Phi_{yz} & g_y \\ \Phi_{zx} & \Phi_{zy} & \Phi_{zz} & g_z \\ g_x & g_y & g_z & 0 \end{vmatrix}_{P_0} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -48 < 0$$

Δ_2 (! συμμετρικός πίνακας! $f_{ij} = f_{ji}$!!)

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

$\Rightarrow n=3$ περιττός και $\Delta_1 < 0$ ή $(-1)^1 \Delta_1 > 0$

$\Delta_2 > 0$ ή $(-1)^2 \Delta_2 > 0$

$\Rightarrow$ τοπικό μέγιστο στο $(4,4,4)$ ✓ ■

3) Ζητούμενα πιθανά ακρότατα της

$$f(x,y)=x^2+y$$

που είναι ταυτόχρονα και σημεία του κύκλου

$$x^2+y^2=1.$$

Λύση

Ζητάμε τα ακρότατα της

$f(x,y)=x^2+y$ με συνθήκη $x^2+y^2=1$.

→ Lagrange: $\Phi(x,y)=x^2+y+\lambda(x^2+y^2-1)$

$$\to \Phi_x = 2x(\lambda+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ή} \\ \lambda=-1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Phi_y = 1+2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$\Phi_\lambda = x^2+y^2-1=0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \overset{(1)}{=} 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} y=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{P_1(0,1)} \\ \boxed{P_2(0,-1)} \end{cases} \\ \lambda \overset{(1)}{=} -1 \overset{(2)}{\Rightarrow} y=\frac{1}{2} \overset{(3)}{\longrightarrow} x^2+\frac{1}{4}-1=0 \to x^2-\frac{3}{4}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)} \\ \boxed{P_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)} \end{cases}$$

→ Αντικατάσταση στην f:

$f(P_1)=1,\ f(P_2)=-1,\ f(P_3)=f(P_4)=\frac{5}{4}.$

στον κύκλο έχουμε
$\begin{cases} \text{μέγιστο στα } \left(\frac{\pm\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right) \\ \text{και} \\ \text{ελάχιστο στο } (0,-1) \end{cases}$

4) Να βρείτε τα σημεία της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=4$ που απέχουν ελάχιστη και μέγιστη απόσταση από το σημείο $(3,1,-1)$.

Λύση

Απόσταση ενός σημείου (x,y,z) της σφαίρας από το σημείο $(3,1,-1)$:

$$d^2=(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2 \quad (*)$$

$\Rightarrow$ Lagrange: $F(x,y,z)=d^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$

$\rightarrow$ Εύρεση κρίσιμων σημείων:

$$F_x = 2(x-3)+2\lambda x=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{3}{x}-1}$$

$$F_y = 2(y-1)+2\lambda y=0 \Rightarrow y-1+y\left(\frac{3}{x}-1\right)=0$$

$$F_z = 2(z+1)+2\lambda z=0 \Rightarrow z+1+z\left(\frac{3}{x}-1\right)=0$$

$$F_\lambda = x^2+y^2+z^2-4=0$$

ή $y=\frac{x}{3}$ και $z=\frac{-x}{3}$.

$$\Rightarrow x^2+\frac{x^2}{9}+\frac{x^2}{9}-4=0.$$

$$\Rightarrow \frac{11x^2}{9}-4=0 \Rightarrow \frac{11x^2}{9}=4 \Rightarrow x^2=\frac{36}{11} \Rightarrow x=\pm\frac{6}{\sqrt{11}}$$

$$\Rightarrow P_1\left(+\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\cancel{3}}\frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\cancel{3}}\frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\sqrt{11}}\right)$$

$$P_2\left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

Άρα αντικαθιστούμε τα P_1 και P_2 στην απόσταση

$d^2 \Leftrightarrow$ σχέση $(*)$

$$d_1^2=\left(\frac{6}{\sqrt{11}}-3\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{11}}-1\right)^2+\left(-\frac{2}{\sqrt{11}}+1\right)^2$$
$$d_2^2=\left(-\frac{6}{\sqrt{11}}-3\right)^2+\left(-\frac{2}{\sqrt{11}}-1\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{11}}+1\right)^2$$
$$\Rightarrow d_1<d_2$$

$\Rightarrow P_1$ είναι το πλησιέστερο σημείο και P_2 το πιο απομακρυσμένο. ■

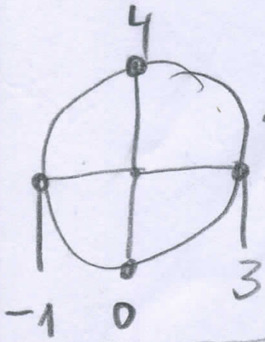
5) Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x,y)=x-2xy+2y$ μέσα στον κύκλο $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. $\rightarrow$ ή περιβ.: $(x-1)^2+(y-2)^2\leq 4$.

<u>Λύση</u>

$\rightarrow$ Εσωτερικό του κύκλου: συνήθης μέθοδος για συνάρτηση 2 μεταβλητών:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=1-2y=0 \;\&\; f_y=2-2x=0$$

$\Rightarrow P\left(1,\frac{1}{2}\right)$ κρίσιμο σημείο, το οποίο βρίσκεται <u>μέσα</u> (στο εσωτερικό) του κύκλου.



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1\leq x\leq 3 \\ 0\leq y\leq 4 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Περιφέρεια του κύκλου:

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\left[(x-1)^2+(y-2)^2-4\right]$$

με Lagrange για 2 μεταβλ. + 1 συνθήκη.

$$\Rightarrow F_x=1-2y+2(x-1)\lambda=0\Rightarrow\lambda=\frac{2y-1}{2(x-1)}$$
$$F_y=2-2x+2(y-2)\lambda=0 \Rightarrow (x-1)^2=\frac{1}{2}(y-2)(2y-1)$$
$$F_\lambda=(x-1)^2+(y-2)^2-4=0 \Rightarrow y_{1,2}=\ldots$$

6) Να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση του σημείου (0,0,0) από το επίπεδο $2x+y-z=5$.

Λύση

Ζητούμενο ακρότατο (ελάχιστο) της

$$f(x,y,z) = d^2 = x^2+y^2+z^2 = (x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2$$

σημείο του επιπέδου

με συνθήκη $\quad 2x+y-z=5$

→ Όχι πολλαπλασιαστές Lagrange, επειδή από την συνθήκη βρίσκουμε εύκολα $z=z(x,y)$: $z=2x+y-5$.

⇒ Πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση ακροτάτων συνάρτησης 2 μεταβλητών:

$$f(x,y) = x^2+y^2+(2x+y-5)^2.$$

$$\Rightarrow f_x = 2x+2(2x+y-5)\cdot 2 = 2x+8x+4y-20=0$$

$$f_y = 2y+2(2x+y-5) = 2y+4x+2y-10=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10x+4y-20=0 \\ 4x+4y-10=0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} (-1) & 10x+4y-20=0 \\ + & -6x+10=0 \Rightarrow x=\frac{10}{6}=\frac{5}{3} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 10\cdot\frac{5}{3}+4y-20=0 \Rightarrow 4y = 20-\frac{50}{3}=\frac{10}{3} \Rightarrow y=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow z = 2\cdot\frac{5}{3}+\frac{5}{6}-5 = \frac{10}{3}+\frac{5}{6}-5 = \frac{20+5-30}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{P\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\right)}$$

Για ελάχιστο?

$$f_{xx} = 10 > 0, \quad f_{yy} = 4 \ (>0), \quad f_{xy} = f_{yx} = 4$$

$$\Delta = 10 \cdot 4 - 4^2 = 40 - 16 > 0 \Rightarrow \begin{array}{l} f_{xx} > 0 \\ \Delta > 0 \end{array} \Rightarrow$$ όπως (τοπικό) $\overset{\shortparallel}{}$ ολικό ελάχιστο ✓.

7) Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x,y,z) = x+y+z$ υπό τον περιορισμό $xyz=1$.

Λύση

<u>1ος τρόπος</u>: Από συνθήκη $xyz=1$ έχουμε κατ' ανάγκην

$$x \neq 0 \ \& \ y \neq 0 \ \& \ z \neq 0.$$

Οπότε $z = \dfrac{1}{xy} \Rightarrow f(x,y) = x+y+\dfrac{1}{xy} \Rightarrow$ πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση ακροτάτων συνάρτησης 2 μεταβλητών.

$\Rightarrow$ 1ες παράγωγοι: $f_x = 1 - \dfrac{1}{x^2 y} = 0$, $\quad f_y = 1 - \dfrac{1}{xy^2} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 y = 1 \to y = \dfrac{1}{x^2} \\ xy^2 = 1 \Rightarrow x \dfrac{1}{x^4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=y=1}$$

και από $xyz=1$ $\Rightarrow \boxed{z=1}$

Υπάρχει ένα κρίσιμο σημείο, το $\underline{x=y=z=1}$.

$\Downarrow$

είναι ~~μέγιστο~~ ελάχιστο, όπως φαίνεται με απλή αντικατάσταση:

$$f(1,1,1) = 1+1+\frac{1}{1 \cdot 1} = 3 \leq$$ από κάθε άλλο σημείο.

$f_{xx} = \frac{2}{x^3y} > 0$ στο $(1,1,1)$ $\qquad f_{xy}=f_{yx}=\frac{1}{x^2y^2} = 1 >$ στο $(1,1,1)$

$f_{yy} = \frac{2}{xy^3} > 0$

$\Rightarrow \Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 2\cdot 2-1 = 3>0.$

Ακρότατα πλεγμένης συνάρτησης $z=\varphi(x,y)$ με

$$F(x,y,\varphi(x,y))=0:$$

8) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $z=\varphi(x,y)$ που ορίζεται με πεπλεγμένη μορφή από την σχέση

$$z^2+xyz-xy^2-x^3=0.$$

Λύση.

1. Πρόβλημα → αναζήτηση ακροτάτων συνάρτησης 2 μεταβλ.
2. −״− → Υπολογισμός $z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}, z_x, z_y$ από θεωρία πεπλεγμένων συναρτήσεων.

Έχουμε: $z_x = -\frac{F_x}{F_z}$, $z_y = -\frac{F_y}{F_z}$

Και με $F = z^2+xyz-xy^2-x^3=0$ είναι

$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = yz-2xy-3x^2$; $F_y = xz-2xy$

και $F_z = 2z+xy$ $\underline{(\neq 0)}$!! → βασικό για απόρριψη πιθανή λύσεων !!

έχουμε

$$z_x = -\frac{yz - y^2 - 3x^2}{F_z} \quad \& \quad z_y = -\frac{xz - 2xy}{F_z},$$

Από $z_x = 0$ & $z_y = 0$ είναι

$$\overset{(1)}{yz - y^2 - 3x^2 = 0} \quad \& \quad \overset{(2)}{xz - 2xy = 0}.$$

και $z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$ (3).

Λύση του συστήματος:

$(2) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \ (2a) \to \text{απορρίπτεται (βλέπε παρακάτω)}. \\ \text{ή} \\ z = 2y \ (2b). \end{cases}$

(2a) $x = 0$ είναι ~~…~~ όμως από (3) $z = 0$. Αλλά λόγω ότι τότε $F_z = 0$ αυτή η λύση απορρίπτεται.

(2b) $\underline{z = 2y}$. Έχουμε το σύστημα

$$yz - y^2 - 3x^2 = 0 \quad (1)$$

$$xyz - xy^2 + z^2 - x^3 = 0 \quad (2)$$

για τους αγνώστους x, y με z δεδομένο.

Από (1) με $z = 2y$ έχουμε $x^2 = \frac{y^2}{3} \Rightarrow \boxed{x = \pm \frac{y}{\sqrt{3}}}$ (3)

Και από (3) και $z = 2y$ με αντικατάσταση στην (2) προκύπτουν:

$$\begin{cases} 4y^2 + \frac{y^3}{\sqrt{3}} - \frac{y^3}{3\sqrt{3}} = 0 \\ 4y^2 - y^3/\sqrt{3} + y^3/3\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y = -6\sqrt{3},\ x = -6,\ z = -12\sqrt{3} \\ y = 6\sqrt{3},\ x = -6,\ z = 12\sqrt{3} \end{cases}}$$

Άρα οι λύσεις είναι:

$P_1(-6, -6\sqrt{3}, -12\sqrt{3})$ και $P_2(-6, 6\sqrt{3}, 12\sqrt{3})$.

Η λύση $P_0(0,0,0)$ απορρίπτεται διότι $F_z(0,0,0)=0$!

Χαρακτηρισμός ακροτάτων: πρόσημο της

$$\Delta = z_{xx}\cdot z_{xy} - z_{xy} \text{ στα } P_1 \text{ και } P_2 \;?$$

Τις δεύτερες παραγώγους τις είχαμε υπολογίσει. Επειδή οι σχέσεις είναι σύνθετες, καλό είναι να γνωρίζουμε την διαδικασία εξαγωγής των z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} !!

Έχουμε $F(x,y,z(x,y))=0$.

$1^{η}$ παράγωγος ως προς x: $F_x + F_z\cdot z_x \to z_x$ ✓

$2^{η}$ -"- -"- : $\frac{\partial}{\partial x}\left[F_x + F_z\cdot z_x\right]$

Αναλυτικά:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[F_x(x,y,z(x,y)) + F_z(x,y,z(x,y))\cdot z_x(x,y)\right] =$$

$$= F_{xx} + F_{xz}\cdot z_x + (F_{xz} + F_{zz}\cdot z_x)\cdot z_x + F_z\cdot z_{xx}$$

$$= F_{xx} + 2F_{xz}\cdot z_x + F_{zz}\cdot z_x^2 + F_z\cdot z_{xx} = 0$$

Αλλά επειδή εδώ $\underline{z_x = z_y = 0} \Rightarrow \boxed{z_{xx} = -\frac{F_{xx}}{F_z}}$!

Ανάλογα: $\boxed{z_{yy} = -\dfrac{F_{yy}}{F_z}, \quad z_{xy} = -\dfrac{F_{xy}}{F_z}}$!

για $z_x = z_y = 0$

Με $F_{xx} = -6x$, $F_{xy} = z - 2y = 0$ διότι $z = 2y$!

$$F_x = yz - y^2 - 3x^2$$

$$F_{yy} = -2x$$

$$\Rightarrow z_{xx} = -\frac{-6x}{2z+xy}$$

$$z_{yy} = -\frac{-2x}{2z+xy}$$

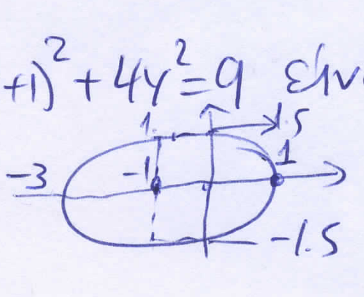
$$z_{xy} = 0$$

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta(P_1) = 1 > 0, \; z_{xx} = -\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \text{τοπικό μέγιστο} \\ \Delta(P_2) = 1 > 0, \; z_{xx} = \sqrt{3} > 0 \Rightarrow \text{τοπικό ελάχιστο} \end{cases}$

9) Να βρείτε την μέγιστη & ελάχιστη απόσταση των σημείων της καμπύλης $3(x+1)^2 + 4y^2 = 12$ (*) από τον x-άξονα και τα αντίστοιχα σημεία της με την μέθοδο Lagrange!

Λύση

Η $3(x+1)^2 + 4y^2 = 9$ είναι μετατοπισμένη έλλειψη!



→ ξέρουμε τις ακρότατες ~~απο~~ αποστάσεις από γεωμετρία!!

Με πολλαπλασιαστές Lagrange: Η απόσταση των ακρότατων σημείων της καμπύλης (*) ως προς τον άξονα x δίνεται από την συνάρτηση $d^2=y^2$. Άρα το πρόβλημα ανάγεται στην αναζήτηση ακρότατων της

$$f(x,y)=y^2 \text{ με συνθήκη } 3(x+1)^2+4y^2=12.$$

$$\Rightarrow F(x,y)=y^2+\lambda\left[3(x+1)^2+4y^2-12\right]$$

(1) $\Rightarrow F_x=\lambda(6x+6)=0 \Rightarrow \lambda=0$ ή $x=-1$

(2) $F_y=2y+8\lambda y=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \text{ή} \\ \lambda=-\frac{1}{4} \end{cases}$ $\left(\text{ή } \begin{cases} \lambda=0 \\ \text{ή} \\ x=-1 \end{cases}\right)$

SOS

(3) $F_\lambda=3(x+1)^2+4y^2-12=0$.

Για $y=0$: Από (3) $\Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=\begin{cases} +1 \\ -3 \end{cases}$

$\Rightarrow P_1(1,0),\ P_2(-3,0)$

Για $\lambda=-\frac{1}{4}$: Από (1) $\Rightarrow \lambda\neq 0$, άρα $\boxed{x=-1}$

και από (3) $\Rightarrow y=\pm 1.5 \Rightarrow P_3(-1,1{,}5),\ P_4(-1,-1{,}5)$.

$\Rightarrow$ Ελάχιστο ($d=0$) στα σημεία $(1,0)$ και $(-3,0)$

Μέγιστο ($d=3$) — " — $(-1,1{,}5)$ και $(-1,-1.5)$.

10) Ακρότατη απόσταση σημείων της επιφάνειας $2x^2+3y^2+2z^2+2xz=0$ από το επίπεδο $z=0$. Λύση

$$F=z^2+\lambda(2x^2+3y^2+2z^2+2xz) \Rightarrow \begin{cases} x: \\ y: \\ z: \end{cases} \Rightarrow \underline{(0,0,0)}$$