ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1. $[c\cdot f(x)]' = c\cdot f'(x)$
2. $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$
3. $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
4. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. $(c)'=0$
2. $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$
3. $[f^\nu(x)]' = \nu f'(x) f^{\nu-1}(x)$
4. $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
5. $(e^{f(x)})' = f'(x)\cdot e^{f(x)}$
6. $(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
7. $(\eta\mu f(x))' = f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu f(x)$
8. $(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -f'(x)\cdot\eta\mu f(x)$
9. $(\varepsilon\varphi f(x))' = \dfrac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$
10. $(\sigma\varphi f(x))' = -\dfrac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}$
11. $(\sinh x)' = \cosh x$
12. $(\cosh x)' = \sinh x$
13. $(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1-\tanh^2 x$
14. $(\coth x)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x} = 1-\coth^2 x$
15. $x = f_1(t)\,,\ y = f_2(t) \ \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\ ,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$

ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. $\int dx = x+c$
2. $\int x^\nu dx = \dfrac{x^{\nu+1}}{\nu+1}+c,\quad \nu\neq -1$
3. $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x|+c$
4. $\int e^x dx = e^x + c$
5. $\int xe^x dx = (x-1)e^x + c$
6. $\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$
7. $\int x\eta\mu x dx = -x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + c$
8. $\int \eta\mu^2 x dx = \dfrac{x-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{2}+c$
9. $\int \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}dx = -\sigma\varphi x + c$
10. $\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$
11. $\int x\sigma\upsilon\nu x dx = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + c$
12. $\int \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \varepsilon\varphi x + c$
13. $\int \varepsilon\varphi x dx = -\ln|\sigma\upsilon\nu x| + c$
14. $\int \sigma\varphi x dx = \ln|\eta\mu x| + c$
15. $\int \sinh x dx = \cosh x + c$
16. $\int \cosh x dx = \sinh x + c$
17. $\int f^\nu(x) f'(x) dx = \dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}+c,\quad \nu\neq -1$
18. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$
19. $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c$
20. $\int \dfrac{1}{\alpha^2+x^2}dx = \dfrac{1}{\alpha}\text{Τοξεφ}\dfrac{x}{\alpha} + c$
21. $\int \dfrac{1}{x^2-\alpha^2}dx = \dfrac{1}{2\alpha}\ln\left|\dfrac{x-\alpha}{x+\alpha}\right| + c$
22. $\int \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}dx = \text{Τοξημ}\dfrac{x}{\alpha} + c$

23. $\int \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}dx = ar\sinh\frac{x}{\alpha}+c$

24. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}dx = ar\cosh\frac{x}{\alpha}+c$

25. $\int \frac{1}{x\sqrt{\alpha^2\pm x^2}}dx = \frac{1}{\alpha}\ln\left|\frac{x}{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2\pm x^2}}\right|+c$

26. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-\alpha^2}}dx = \frac{1}{\alpha}\text{Τοξσυν}\frac{\alpha}{x}+c$

27. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm\alpha^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm\alpha^2}\right|+c$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

1. $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$

2. $\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx$

3. $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$

4. $\int_\alpha^\beta Cf(x)dx = C\int_\alpha^\beta f(x)dx, \quad C = \text{σταθ.}$

5. $\int_\alpha^\beta \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$

6. $f(x)\le g(x), \forall x\in[\alpha,\beta] \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \le \int_\alpha^\beta g(x)dx$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

$A = A_1\cdot i + A_2\cdot j + A_3\cdot k$, $B = B_1\cdot i + B_2\cdot j + B_3\cdot k$

$C = C_1\cdot i + C_2\cdot j + C_3\cdot k$

1. $A = B \Leftrightarrow A_1 = B_1,\ A_2 = B_2,\ A_3 = B_3$

2. $A \parallel B \Leftrightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}$, για $B_i \ne 0$

3. $A + B = (A_1+B_1)i + (A_2+B_2)j + (A_3+B_3)k$

4. $A - B = (A_1-B_1)i + (A_2-B_2)j + (A_3-B_3)k$

5. $\lambda\cdot A = \lambda A_1\cdot i + \lambda A_2\cdot j + \lambda A_3\cdot k$

6. $m(A+B) = mA + mB$

7. $A\cdot B = 0 \Leftrightarrow A\perp B$

8. $|A| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$

9. $A + B = B + A$

10. $A + (B + C) = (A + B) + C$

11. $m(nA) = (mn)A = n(mA)$

12. $(m+n)A = mA + nA$

13. Αν $P = (x_1, y_1, z_1)$, $Q = (x_2, y_2, z_2)$, τότε:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

1. $A\cdot B = |A||B|\sigma\upsilon\nu\vartheta, \quad 0\le\vartheta\le\pi$

2. $A\cdot B = B\cdot A$

3. $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

4. $m(A\cdot B) = (mA)\cdot B = A\cdot(mB) = (A\cdot B)m$

5. $i\cdot i = j\cdot j = k\cdot k = 1, \quad i\cdot j = j\cdot k = k\cdot i = 0$

6. $A\cdot B = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$

$A\cdot A = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

1. $|A \times B| = |A|\cdot|B|\eta\mu\vartheta, \quad 0\le\vartheta\le\pi$

2. $A \times B = -B \times A$

3. $A \times (B+C) = A \times B + A \times C$

4. $m(A \times B) = (mA) \times B = A \times (mB) = (A \times B)m$

5. $i \times i = j \times j = k \times k = 0$, $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$

6. $A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$

ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1. $(A\cdot B)C \neq A(B\cdot C)$
2. $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$
3. $A\cdot(B \times C) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$
4. $A\cdot(B \times C) = B\cdot(C \times A) = C\cdot(A \times B) =$
   $= -A\cdot(C \times B) = -C\cdot(B \times A) = -B\cdot(A \times C)$
5. $A \times (B \times C) = (A\cdot C)B - (A\cdot B)C$
6. $A\cdot(B \times C) = 0 \Leftrightarrow A, B, C$ συνεπίπεδα

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. $(A+B)(t) = A(t) + B(t)$
2. $(\varphi A)(t) = \varphi(t)A(t)$
3. $(A\cdot B)(t) = A(t)\cdot B(t)$
4. $(A \times B)(t) = A(t) \times B(t)$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Αν $A = A(t),\ B = B(t)$, τότε:

1. $(A+B)' = A' + B'$
   $(A\cdot B)' = A'\cdot B + A\cdot B'$
   $(A \times B)' = A' \times B + A \times B'$
2. $(\varphi A)' = \varphi' A + \varphi A'$
3. $A' = A'_1\cdot i + A'_2\cdot j + A'_3\cdot k$
4. $A\cdot A' = 0 \Leftrightarrow |A| = \text{σταθ.}$
5. $A \times A' = 0 \Leftrightarrow A_0 = \text{σταθ.}$
   (όπου A_0 η κατεύθυνση του A)

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. $\int_\alpha^\beta A(t)dt = \left(\int_\alpha^\beta A_1(t)dt\right)i + \left(\int_\alpha^\beta A_2(t)dt\right)j +$
   $+\left(\int_\alpha^\beta A_3(t)dt\right)k$
2. $\int \lambda A(t)dt = \lambda \int A(t)dt$, $\lambda =$ αριθμ. σταθερά
3. $\int \varphi(t)C dt = \left(\int \varphi(t)dt\right)C$, $C =$ σταθ. διάνυσμα
4. $\int C\cdot A(t)dt = C\cdot\left(\int A(t)dt\right)$, $C =$ σταθ. διάνυσμα
5. $\int [C \times A(t)]dt = C \times \left(\int A(t)dt\right)$, $C =$ στ. διάνυσμα

ΔΙΑΝ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΡΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

$A = A(x,y,z) \Rightarrow$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A_1}{\partial x}i + \frac{\partial A_2}{\partial x}j + \frac{\partial A_3}{\partial x}k,$$

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz$$

ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

ΚΛΙΣΗ-ΑΠΟΚΛΙΣΗ-ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k, \quad \nabla\cdot A = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$\nabla \times A = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ∇

1. $\nabla \cdot (A+B) = \nabla \cdot A + \nabla \cdot B$
2. $\nabla \times (A+B) = \nabla \times A + \nabla \times B$
3. $\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$
4. $\nabla \times (\nabla \times A) = 0$
5. $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$
6. $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$
7. $\nabla \cdot \underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{u} \cdot \nabla$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ Α' ΤΑΞΗΣ

Οταν $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \Leftrightarrow$

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[c + \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx\right]$$

ΙΑΚΩΒΙΑΝΗ

$$\frac{D(u,\upsilon)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} & \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} \end{vmatrix}, \qquad \frac{D(u,\upsilon)}{D(x,y)} \cdot \frac{D(x,y)}{D(u,\upsilon)} = 1,$$

$$dxdy = \frac{D(x,y)}{D(u,\upsilon)} du d\upsilon$$

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$x = \rho\sigma\upsilon\nu\vartheta, \quad y = \rho\eta\mu\vartheta, \quad \rho^2 = x^2 + y^2$

$dxdy = \rho d\rho d\vartheta$

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

$$\int_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$\oint P dx + Q dy = \iint_T \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \quad \text{(θεώρ. Green)}$$

ΚΑΜΠΥΛΕΣ

ΔΙΑΝ. ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΣΕ ΟΜΑΛΟ ΣΗΜΕΙΟ P_0

$R = A(t_0) + \lambda A'(t_0), \quad \lambda =$ παράμετρος

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΣΤΟ P_0

$x = A_1(t_0) + \lambda A'_1(t_0), \quad y = A_2(t_0) + \lambda A'_2(t_0),$

$z = A_3(t_0) + \lambda A'_3(t_0)$

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΣΤΟ P_0

$$\frac{x - A_1(t_0)}{A'_1(t_0)} = \frac{y - A_2(t_0)}{A'_2(t_0)} = \frac{z - A_3(t_0)}{A'_3(t_0)}$$

(όταν $A'_1(t_0), A'_2(t_0), A'_3(t_0) \neq 0$)

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΑΘΕΤΟΥ ΣΤΗΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

Για $A'_3(t_0) \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} x - A_1(t_0) & y - A_2(t_0) & z - A_3(t_0) \\ -A'_3(t_0) & 0 & A'_1(t_0) \\ 0 & -A'_3(t_0) & A'_2(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΩΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ

$$s = \int_{t^*}^{t} \sqrt{\left(A'_1(t)\right)^2 + \left(A'_2(t)\right)^2 + \left(A'_3(t)\right)^2} dt$$

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

$$\varepsilon_0 = \frac{dA}{ds}$$

ΔΙΑΝΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΓΓΥΤΑΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

$$\begin{bmatrix} R - A(t_0) & A'(t_0) & A''(t_0) \end{bmatrix} = 0$$

ΣΥΝΗΘ. ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΓΓΥΤΑΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

$$\begin{vmatrix} x - A_1(t_0) & y - A_2(t_0) & z - A_3(t_0) \\ A'_1(t_0) & A'_2(t_0) & A'_3(t_0) \\ A''_1(t_0) & A''_2(t_0) & A''_3(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΣΕ ΟΜΑΛΟ ΣΗΜΕΙΟ P_0

$$\kappa = \left|\frac{d^2 A}{ds^2}\right| = \left|A'(t) \times A''(t)\right| \cdot \left|A'(t)\right|^{-3}$$

ΑΚΤΙΝΑ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟ P_0

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

ΣΥΝΟΔΕΥΟΝ ΤΡΙΑΚΜΟ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Διανυσματικές εξισώσεις στο $P = P(t)$:

Εφαπτομένης: $R = A(t) + \lambda \varepsilon_0$

Πρώτης Καθέτου: $R = A(t) + \lambda \eta_0$

Δεύτερης Καθέτου: $R = A(t) + \lambda b_0$

Καθέτου Επιπέδου: $(R - A(t)) \times \varepsilon_0 = 0$

ή $\left[R - A(t) \quad \eta_0 \quad b_0\right] = 0$

Εγγυτάτου Επιπέδου: $(R - A(t)) \times b_0 = 0$

ή $\left[R - A(t) \quad \varepsilon_0 \quad \eta_0\right] = 0$

Ευθειοποιούντος Επιπ.: $(R - A(t)) \times \eta_0 = 0$

ή $\left[R - A(t) \quad \varepsilon_0 \quad b_0\right] = 0$

ΣΤΡΕΨΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

$$\sigma = \frac{[A' \quad A'' \quad A''']}{|A' \times A''|^2}, \qquad |\sigma| = \left|\frac{db_0}{ds}\right|$$

ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ FRENET

$$\frac{d\varepsilon_0}{ds} = \kappa \eta_0, \qquad \frac{d\eta_0}{ds} = -\kappa \varepsilon_0 + \sigma b_0, \qquad \frac{db_0}{ds} = -\sigma \eta_0$$

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΜΕ $r = A(u,\upsilon)$

Διαν. Εξίσωση Επιπέδου στο $P_0 = P(u_0, \upsilon_0)$:

$$\left[R - A(u_0,\upsilon_0) \quad \left.\frac{\partial r}{\partial u}\right|_{P_0} \quad \left.\frac{\partial r}{d\upsilon}\right|_{P_0}\right] = 0$$

Συνήθης Εξίσωση Επιπέδου:

$$\begin{vmatrix} x - A_1(u_0,\upsilon_0) & y - A_2(u_0,\upsilon_0) & z - A_3(u_0,\upsilon_0) \\ \left.\frac{\partial A_1}{\partial u}\right|_{(u_0,\upsilon_0)} & \left.\frac{\partial A_2}{\partial u}\right|_{(u_0,\upsilon_0)} & \left.\frac{\partial A_3}{\partial u}\right|_{(u_0,\upsilon_0)} \\ \left.\frac{\partial A_1}{\partial \upsilon}\right|_{(u_0,\upsilon_0)} & \left.\frac{\partial A_2}{\partial \upsilon}\right|_{(u_0,\upsilon_0)} & \left.\frac{\partial A_3}{\partial \upsilon}\right|_{(u_0,\upsilon_0)} \end{vmatrix} = 0$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΘΕΤΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

$R = A(P_0) + t\ell_0$, όπου $\ell_0 = \left.\frac{\partial r}{\partial u}\right|_{P_0} \times \left.\frac{\partial r}{\partial \upsilon}\right|_{P_0}$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΠΟΣΑ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

$$E = \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial A_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_3}{\partial u}\right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial r}{\partial \upsilon}\right)^2 = \left(\frac{\partial A_1}{\partial \upsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial \upsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_3}{\partial \upsilon}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial \upsilon} = \frac{\partial A_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \upsilon} + \frac{\partial A_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \upsilon} + \frac{\partial A_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial A_3}{\partial \upsilon}$$

ΜΕΤΡΟ ΚΑΘΕΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ℓ ΣΤΟ P=P (u,υ)

$$|\ell| = \sqrt{E \cdot G - F^2}$$

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΗ $z=\varphi(x,y)$

- Εξίσωση Εφαπτόμενου Επιπέδου:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-\varphi(x_0,y_0) \\ 1 & 0 & p_0 \\ 0 & 1 & q_0 \end{vmatrix}=0$$

όπου $p_0=\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ και $q_0=\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$

- Θεμελιώδη ποσά 1ης Τάξης:

$E=1+p^2,\quad G=1+q^2,\quad F=pq$

- Κάθετο Διάνυσμα ℓ:

$\ell=-p\cdot i-q\cdot j+k,\quad |\ell|=\sqrt{1+p^2+q^2}$

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΗ $f(x,y,z)=0$

- Εξίσωση Εφαπτόμενου Επιπέδου:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)+$$

$$+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0)=0$$

- Εξίσωση Καθέτου Διανύσματος:

$$gradf=\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j+\frac{\partial f}{\partial z}k$$

Αν $f_1(x,y,z)=0$ και $f_2(x,y,z)=0$ οι εξισώσεις δύο τεμνόμενων επιφανειών, και c η σχηματιζόμενη καμπύλη,τότε:

- Διαν. Εξίσωση της Εφαπτομένης της c:

$r=\overrightarrow{OP_0}+t(gradf_1|_{P_0}\ \mathrm{x}\ gradf_2|_{P_0})$

- Εξίσωση της Εφαπτομένης της c στο P_0:

$$r=\overrightarrow{OP_0}+t\left[\left.\frac{D(f_1,f_2)}{D(y,z)}\right|_{P_0}i+\left.\frac{D(f_1,f_2)}{D(z,x)}\right|_{P_0}j+\frac{D(f_1,f_2)}{D(x,y)}k\right]$$

ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΠΟΥ ΚΕΙΤΑΙ ΣΕ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

$$s=\int_{u1}^{u2}\sqrt{E+2F\frac{d\upsilon}{du}+G\left(\frac{d\upsilon}{du}\right)^2}\,du$$

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ $r=A(u,\upsilon)$

$$ds^2=Edu^2+2Fdud\upsilon+Gd\upsilon^2$$

ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ ΔΥΟ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

$$E+F(K_1+K_2)+GK_1K_2=0$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΗ $z=\varphi(x,y)$

$$S=\iint_D\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot dxdy$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΠΟΥ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ

$x=x(u,\upsilon),\quad y=y(u,\upsilon),\quad z=z(u,\upsilon)$

$$S=\iint_{D1}\sqrt{E\cdot G-F^2}\cdot dud\upsilon$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΕΠΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΗ $z=\varphi(x,y)$

$$\iint_S f(x,y,z)d\varepsilon=\iint_D f\big(x,y,\varphi(x,y)\big)\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot d$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΕΠΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΟ ΜΕ ΠΑΡΑΜ. ΕΞΙΣ.

$$\iint_S f(x,y,z)d\varepsilon=\iint_{D1} f\big(\mathrm{x}(\mathrm{u},\upsilon),\mathrm{y}(\mathrm{u},\upsilon),\mathrm{z}(\mathrm{u},\upsilon)\big)\cdot$$

$$\cdot\sqrt{E\cdot G-F^2}\cdot dud\upsilon$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΤΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

$$\nabla_{\alpha_0}f(P_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(r_0+t\alpha_0)-f(r_0)}{t}$$

1.Παράγωγος κατά μήκος καμπύλης και κατά κατεύθυνση

$$\nabla_c f = \nabla f \cdot \varepsilon_o \quad , \quad \nabla_\alpha f = \nabla f \cdot \alpha$$

2.Επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$\int_c F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_\alpha^\beta \Big[F_1(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{x}(t) +$$

$$+ F_2(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{y}(t) + F_3(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{z}(t) \Big] \cdot dt \quad ,$$

$$\int_c f(x,y,z) ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \cdot dt$$

3.Πορίσματα του Τύπου του Green στο επίπεδο

$$\mathrm{E} = \iint_T dxdy = \oint_c xdy = \oint_c -ydx = \frac{1}{2}\oint_c xdy - ydx \quad ,$$

$$\iint_T \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_c F_1 dx + F_2 dy - \oint_{c^*} F_1 dx + F_2 dy$$

4.Συνάρτηση δυναμικού σε συντηρητικά πεδία

$$f(x,y,z) = \int_\alpha^x F_1(\omega, y, z) \cdot d\omega + \int_\beta^y F_2(\alpha, \omega, z) \cdot d\omega + \int_\gamma^z F_3(\alpha, \beta, \omega) \cdot d\omega$$

5.Επιεπιφάνεια ολοκληρώματα διανυσματικών συναρτήσεων

Αν $\quad I = \iint_s A \cdot l_o d\varepsilon = \iint_S (\mathrm{A}_1 \sigma\upsilon\nu\alpha + \mathrm{A}_2 \sigma\upsilon\nu\beta + \mathrm{A}_3 \sigma\upsilon\nu\gamma) d\varepsilon \quad ,$

τότε $\quad I = \iint_{D_1} \left[A \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial v} \right] dudv \quad , \quad I = \iint_D (-pA_1 - qA_2 + A_3) dxdy \quad ,$

$$I = \pm \iint_{D'} A_1 dydz \pm \iint_{D''} A_2 dzdx \pm \iint_D A_3 dxdy$$

6.Τύπος Gauss και πόρισμα αυτού ,Τύπος Stokes

$$\iiint_D \nabla \cdot A dxdydz = \iint_s A \cdot l_o d\varepsilon \quad , \quad V = \iint_s A \cdot l_o d\varepsilon \quad \text{όπου} \quad \nabla \cdot \mathrm{A} = 1 \quad ,$$

$$\int_c F \cdot dr = \iint_s (\nabla \times F) \cdot l_o d\varepsilon$$