6. Αρμονικές συναρτήσεις και συνοριακά προβλήματα (Dirichlet).

Αρμονικές συναρτήσεις

Ορισμός 6.1 *Εστω E είναι ανοικτό σύνολο και $f: E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια πραγματική συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών x και y. Θα λέμε ότι η f είναι αρμονική στο E αν έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης και ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace*

$$f_{xx} + f_{yy} = 0 \text{ για κάθε } (x, y) \in E.$$

Θεώρημα 6.1 *Εστω $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ είναι αναλυτική σε ανοικτό σύνολο E. Τότε οι συναρτήσεις $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι αρμονικές στο E.*

Απόδειξη. Εφόσον η f είναι αναλυτική στο E, τότε οι συναρτήσεις $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι απειροδιαφορίσιμες στο E και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$. Αρα

$$u_{xx} = v_{yx} \text{ και } u_{yy} = -v_{xy}$$

και εφόσον η v έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης θα ισχύει $v_{xy} = v_{yx}$ οπότε αθροίζοντας κατά μέλη τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι $u_{xx} + u_{yy} = 0$ για κάθε $(x, y) \in E$. Ομοια είναι η απόδειξη για τη v. □

Ορισμός 6.2 *Αν $u, v: E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι πραγματικές συναρτήσεις σε ανοικτό σύνολο E τέτοιες ώστε η $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ να είναι αναλυτική στο E τότε οι u, v καλούνται αρμονικές συζυγείς επί του συνόλου E. Επίσης η v καλείται **αρμονική συζυγής της** u.*

Στο ερώτημα «αν u είναι αρμονική συνάρτηση σ' ένα σύνολο A μπορούμε πάντα να βρούμε μια συζυγή αρμονική της v ώστε η $f = u + iv$ να είναι αναλυτική στο A» η απάντηση είναι πολύπλοκη και εξαρτάται από τη μορφή του συνόλου A. Ισχύει η ακόλουθη

Πρόταση 6.1 *Αν u είναι αρμονική συνάρτηση σε τόπο E, τότε σε κάποια περιοχή $D_\varepsilon(z_0)$ κάθε σημείου $z_0 \in E$ η u είναι το πραγματικό μέρος κάποιας αναλυτικής συνάρτησης. Επιπλέον αν ο E είναι* ***απλά*** *συνεκτικός τόπος, τότε υπάρχει μοναδική αναλυτική συνάρτηση f στο Ε έτσι ώστε $u = \mathrm{Re}(f)$. Συνεπώς η u έχει μοναδική αρμονική συζυγή v με προσέγγιση σταθεράς.*

Πρόταση 6.2 *Αν u,v είναι συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις σε τόπο E και αν οι εξισώσεις $u(x,y)=c_1$, $v(x,y)=c_2$ ορίζουν λείες καμπύλες, τότε αυτές οι καμπύλες τέμνονται ορθογώνια.*

Πόρισμα 6.1 *Αν u είναι μια αρμονική συνάρτηση πάνω και στο εσωτερικό κύκλου με κέντρο $z_0 = x_0 + iy_0$ και ακτίνα R, τότε*

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0 + Re^{i\theta}\right)d\theta .$$

Απόδειξη. Υπάρχει μοναδική αναλυτική συνάρτηση f έτσι ώστε $u = \mathrm{Re}(f)$. Για την f ισχύει το Θεώρημα μέσης τιμής του Gauss. Εξισώνοντας τα πραγματικά μέρη παίρνουμε το αποτέλεσμα. □

Πόρισμα 6.2 (αρχή μεγίστου για αρμονικές συναρτήσεις) *Αν u είναι μια αρμονική (και μη σταθερή) συνάρτηση σε φραγμένο τόπο E και συνεχής στο σύνορο ∂E, όπου ∂E είναι μια κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη, τότε η u παίρνει μέγιστη τιμή πάνω στο σύνορο ∂E.*

Πόρισμα 6.3 *Αν u είναι μια αρμονική συνάρτηση σε φραγμένο τόπο E και $u(x,y)=c$ πάνω στο σύνορο ∂E, όπου το ∂E είναι μια κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη, τότε η $u(x,y)=c$ παντού στο E.*

Το πρόβλημα του Dirichlet για δίσκο και ημιεπίπεδο.

Εστω E είναι φραγμένος τόπος και $u_0(x,y)$ είναι δοθείσα συνεχής συνάρτηση πάνω στο σύνορο ∂E. Το πρόβλημα του Dirichlet ασχολείται με την εύρεση πραγματικής συνάρτησης $u(x,y)$ τέτοιας ώστε:

- u να είναι αρμονική στο εσωτερικό του E και

- $u(x,y)=u_0(x,y)$ στο ∂E.

Θεώρημα 6.2 *Εστω E είναι φραγμένος τόπος με το σύνορο αυτού ∂E να είναι μια κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη. Τότε αν υπάρχει λύση στο πρόβλημα Dirichlet τότε αυτή είναι μοναδική.*
Απόδειξη. Εστω u, v είναι δύο λύσεις. Θέτουμε $\phi = u - v$. Τότε η ϕ είναι αρμονική και $\phi = 0$ πάνω στο ∂E. Αρα από την αρχή του μεγίστου αναγκαστικά $\phi = 0$. □

Πρόταση 6.3 (ολοκληρωτικός τύπος του Poisson) *Εστω u ορίζεται και είναι συνεχής στον κλειστό δίσκο $\overline{D_r(0)} = \{z : |z| \le r\}$ και είναι αρμονική στο δίσκο $D_r(0) = \{z : |z| < r\}$. Τότε για κάθε $\rho < r$ ισχύει*

$$u(\rho,\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)\frac{r^2-\rho^2}{r^2 - 2\rho r \sigma\upsilon\nu(\theta-\phi)+\rho^2}d\theta .$$

Απόδειξη. Από τα παραπάνω υπάρχει μοναδική αναλυτική συνάρτηση f τέτοια ώστε $u = Re(f)$ επί του $D_r(0)$. Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

για κάθε $z = \rho e^{i\theta} \in D_r(0)$. Για κάθε τέτοιο z ορίζουμε ένα νέο σημείο $z_1 = \frac{r^2}{\bar{z}}$, το οποίο καλούμε ανάκλαση του z ως προς τον κύκλο $|z| = r^2$. Προφανώς το z_1 βρίσκεται στο εξωτερικό του δίσκου $D_r(0)$, άρα $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}d\zeta = 0$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_1}\right)d\zeta .$$

Αλλά:

$$\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z_1}=\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-\frac{r^2}{\overline{z}}}=\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-\frac{|\zeta|^2}{\overline{z}}}$$

$$=\frac{1}{\zeta-z}-\frac{\overline{z}}{\zeta\overline{z}-|\zeta|^2}=\frac{|\zeta|^2-|z|^2}{\zeta|\zeta-z|^2}.$$

Αρα:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(\zeta)\frac{|\zeta|^2-|z|^2}{\zeta|\zeta-z|^2}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)\frac{r^2-|z|^2}{\left|re^{i\theta}-z\right|^2}d\theta$$

δηλαδή:

$$f\left(\rho e^{i\phi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)\frac{r^2-\rho^2}{\left|re^{i\theta}-\rho e^{i\phi}\right|^2}d\theta .$$

Επειδή $\left|re^{i\theta}-\rho e^{i\phi}\right|^2=r^2-2\rho r\sigma\upsilon\nu\left(\theta-\phi\right)+\rho^2$ έχουμε

$$f\left(\rho e^{i\phi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2\rho r\sigma\upsilon\nu\left(\theta-\phi\right)+\rho^2}d\theta .$$

Αν λοιπόν $f\left(\rho e^{i\phi}\right)=u(\rho,\phi)+iv(\rho,\phi)$ εξισώνοντας τα πραγματικά μέρη της παραπάνω παίρνουμε το ζητούμενο.

Η θετική ποσότητα

$$\boxed{P(\rho,r,\phi-\theta)=\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2\rho r\sigma\upsilon\nu\left(\theta-\phi\right)+\rho^2}}$$

καλείται **πυρήνας του Poisson**. Αντίστροφα αποδεικνύεται ότι

Θεώρημα 6.2 *Αν* $F(\theta)$ *είναι μια (τμηματικά) συνεχής συνάρτηση στο* $[0,2\pi]$ *με* $F(0)=F(2\pi)$ *τότε η συνάρτηση*

$$u(\rho,\phi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2\rho r\sigma\upsilon\nu\left(\theta-\phi\right)+\rho^2}d\theta,\ (\rho<r)$$

είναι:

(α) *αρμονική στο δίσκο* $D_r(0)$ *και*

(β) $\lim_{\rho\to r^-} u(\rho,\theta)=F(\theta)$ *σε κάθε σημείο συνέχειας της* F*, άρα η* u ***είναι λύση του προβλήματος Dirichlet στο δίσκο*** $D_r(0)$***.***

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη τα ακόλουθα:

Πρόταση 6.4 (Ολοκληρωτικός τύπος Swchartz) *Αν η συνάρτηση* $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ *είναι αναλυτική και φραγμένη στο άνω ημιεπίπεδο* $\mathrm{Im}(z)>0$ *και στον άξονα των πραγματικών αριθμών τότε για* $y>0$ *έχουμε*

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t,0)\cdot y}{(t-x)^2+y^2}dt\,.$$

Θεώρημα 6.3 *Αν* $F(x)$ *είναι μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση στο* $\mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $\left|x^a F(x)\right|<\infty,\ (a>0)$ *τότε η συνάρτηση*

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\cdot F(t)}{(t-x)^2+y^2}dt,$$

είναι:

(α) *αρμονική στο άνω ημιεπίπεδο* $\mathrm{Im}(y)>0$ *και*

(β) $\lim_{y\to 0^+} u(x,y)=F(x)$ *σε κάθε σημείο συνέχειας της* F*, άρα η* u ***είναι λύση του προβλήματος Dirichlet στο άνω ημιεπίπεδο.***

Μερικές φορές η λύση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών μπορεί να προσδιορισθεί με τη θεώρησή της σαν το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος μιας αναλυτικής συνάρτησης. Η επόμενη πρόταση μας βοηθά σ' αυτή την κατεύθυνση.

Πρόταση 6.5 Εστω $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ απεικονίζει ένα χωρίο D_z του επιπέδου z σ' ένα χωρίο D_w του επιπέδου w, όπου f αναλυτική στο D_z και $f'(z)\neq 0$. Αν $h(u,v)$ είναι αρμονική στο D_w τότε η $H(x,y)=h\big(u(x,y),v(x,y)\big)$ είναι αρμονική στο D_z.

Λυμένες ασκήσεις

1. Αν **(α)** $u(x,y)=3xy$, **(β)** $v(x,y)=e^{x}\left(y\sigma\upsilon\nu y+x\eta\mu y\right)$,

να βρεθούν οι συζυγείς αρμονικές αυτών και η αναλυτική συνάρτηση $f=u+iv$.

Λύση. **(α)** Είναι εύκολο να δούμε ότι $u_{xx}+u_{yy}=0\ \ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, άρα η u είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Από τις συνθήκες Cauchy-Riemmann (βλέπε ορισμό συζυγούς αρμονικής συνάρτησης) έχουμε

$$\begin{cases} v_y=u_x=3y \\ v_x=-u_y=-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=\int 3y\,dy+a(x) \\ v_x=-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=\dfrac{3}{2}y^2+a(x) \\ v_x=-3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v=\dfrac{3}{2}y^2+a(x) \\ v_x=-3x=a'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=\dfrac{3}{2}y^2+a(x) \\ -3x=a'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=\dfrac{3}{2}y^2+a(x) \\ a(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+c \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(x,y)=\frac{3}{2}\left(y^2-x^2\right)+c.$$

Σημειώνουμε ότι υπάρχει μοναδική αναλυτική συνάρτηση (με προσέγγιση σταθεράς) της μορφής $f=u+iv=\dfrac{3i}{2}z^2+ic$. Αυτή βρίσκεται θέτοντας $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ και $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

Παρατήρηση 1. Αν οι u,v είναι συζυγείς αρμονικές σε μια περιοχή του $z_0=0$, τότε ένας χρήσιμος μνημονικός κανόνας για τον υπολογισμό της αναλυτικής συνάρτησης f είναι ο εξής:

$$f(z)=u(z,0)+iv(z,0).$$

(β) Είναι εύκολο να δούμε ότι $v_{xx}+v_{yy}=0\ \ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, άρα η v είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Από τις συνθήκες Cauchy-Riemmann έχουμε

$$\begin{cases} u_x = v_y = e^x\left(\sigma\upsilon\nu y - y\eta\mu y + x\sigma\upsilon\nu y\right) \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = e^x\left(x\sigma\upsilon\nu y - y\eta\mu y\right) + a\left(y\right) \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = e^x\left(x\sigma\upsilon\nu y - y\eta\mu y\right) + a\left(y\right) \\ e^x\left(-x\eta\mu y - \eta\mu y - y\sigma\upsilon\nu y\right) + a'\left(y\right) = -e^x\left(y\sigma\upsilon\nu y + x\eta\mu y + \eta\mu y\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = e^x\left(x\sigma\upsilon\nu y - y\eta\mu y\right) + a\left(y\right) \\ a'\left(y\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow u = e^x\left(x\sigma\upsilon\nu y - y\eta\mu y\right) + c\,.$$

Σημειώνουμε ότι υπάρχει μοναδική αναλυτική συνάρτηση (με προσέγγιση σταθεράς) της μορφής $f = u + iv = ze^z + c$ (βλέπε προηγούμενη παρατήρηση).

2. Χρησιμοποιήστε τον ολοκληρωτικό τύπο του Poisson για να βρείτε το δυναμικό στο εσωτερικό κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 1$ όταν $V = 1$ στο 1^{ο} τεταρτημόριο της επιφάνειάς του και $V = 0$ στο υπόλοιπο της επιφάνειας.

Λύση. Εχουμε

$$u\left(r,\theta\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\sigma\upsilon\nu\left(\phi-\theta\right)} V\left(\phi\right) d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\sigma\upsilon\nu\left(\phi-\theta\right)} d\phi = \frac{1}{2\pi} 2\tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{1+r}{1-r}\varepsilon\phi\left(\frac{\phi-\theta}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{1+r}{1-r}\varepsilon\phi\left(\frac{\pi/2-\theta}{2}\right)\right) - \frac{1}{\pi}\tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{1+r}{1-r}\varepsilon\phi\left(\frac{-\theta}{2}\right)\right).$$

3. Αν $H\left(x\right) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, να λυθεί το πρόβλημα του Dirichlet στο άνω ημιεπίπεδο.

Λύση. Χρησιμοποιούμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Swchartz ο οποίος παίρνει τη μορφή

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}dt=\frac{1}{\pi}\tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{t-x}{y}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{-x}{y}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{-x}{y}\right).$$

Αλυτες ασκήσεις

1. Αν

(α) $v(x,y)=-\eta\mu x\cdot\sinh y$ με $f(0)=3$, **(β)** $v(r,\theta)=-3\theta$ με $f(1)=4$,

να βρεθούν οι συζυγείς αρμονικές αυτών και η αναλυτική συνάρτηση $f=u+iv$.

Απάντ. (α) $u(x,y)=-\sigma\upsilon\nu x\cdot\cosh y$, $f(z)=-\sigma\upsilon\nu z+4$,

(β) $u(r,\theta)=3\ell n r$, $f(z)=\ell n\left(\frac{1}{|z|^3}\right)+4,$.

2. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x,y)=x\sigma\upsilon\nu x\cdot\cosh y+y\eta\mu x\cdot\sinh y$ είναι αρμονική και να βρεθεί η συζυγής αρμονική της ώστε $v(0,0)=0$. Αν $f(x,y)=u+iv$ να εκφρασθεί η f σαν συνάρτηση του z και να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_{|z|=2}\frac{f(z)}{z-1}dz$.

Απάντ. $v(x,y)=y\sigma\upsilon\nu x\cdot\cosh y-x\eta\mu x\cdot\sinh y$, $f(z)=z\sigma\upsilon\nu z$, $2\pi i\cdot\sigma\upsilon\nu 1$.