

Κβαντικό φαινόμενο Ζήνωνα (en: Quantum Zeno effect)

Κ. Φουτζόπουλος<sup>1</sup>, Ιούνιος 2020

για το μάθημα “Κβαντική Πληροφορία και Επεξεργασία”

---

1. Τμήμα Φυσικής, ΑΠΘ, ΠΜΣ Υπολογιστικής Φυσικής, <kfoutzop@auth.gr>

# 1 Εισαγωγή

Ποια η συμπεριφορά της πιθανότητας επιβίωσης μιας κβαντικής κατάστασης υπο συνεχείς μετρήσεις, όταν το χρονικό διάστημα μεταξύ αυτών γίνει επαρκώς μικρό;

Φαινόμενο Ζήνωννα: περιγραφικά, η πιθανότητα επιβίωσης τείνει στη μονάδα.

Βρέθηκε αρχικά από von Neumann στο έργο “*Μαθηματική Θεμελίωση της Κβαντομηχανικής*”, ενώ διατύπωση έχει δωθεί και από το Τούρινγκ (γι’ αυτό γνωστό και ως παράδοξο Τούρινγκ).

Εχει επανέλθει στο προσκήνιο λόγω εφαρμογών στη κβαντική υπολογιστική.

Επίσης μπορεί να δώσει εξήγησεις σε κάποιες διαδικασίες, όπως στον ανασυνδυασμό (φορτίου) ζευγών ριζικών ιόντων[15], που εμφανίζεται στη μαγντοαντίληψη των πτηνών[5].

Η μαθηματική εξέταση του φαινομένου γίνεται χωρίς επισύμανση κάποιων έμμεσων υποθέσεων<sup>2</sup>, και χωρίς πλήρη αυστηρότητα στην εξαγωγή των τύπων.

---

2. Όπως πεπερασμένες ορμές στην αρχική κατάσταση και ορειοθέτηση της Χαμιλτονιανής.

## 2 Αποσύνθεση ασταθούς συστήματος

Κλασσικά συστήματα

$$dN = -\gamma N dt = -(N/\tau) dt \Rightarrow N = N_0 \exp(-t/\tau)$$

$$p(t) = \exp(-t/\tau) \simeq 1 - t/\tau + \mathcal{O}(t^2) \quad (t \ll 1)$$

Κβαντικά συστήματα (με φυσικές μονάδες)

$$i\partial_t |\psi_t\rangle = H |\psi_t\rangle \Rightarrow |\psi_t\rangle = U(t - t') |\psi_{t'}\rangle = \exp(-iHt) |\psi_0\rangle$$

$$p(t) = |\langle \psi_t | \psi_0 \rangle|^2 = |\langle \psi_0 | \exp(-iHt) | \psi_0 \rangle|^2 = \left| \langle \psi_0 | 1 - iHt - \frac{1}{2}H^2 t^2 + \mathcal{O}(t^3) | \psi_0 \rangle \right|^2$$

$$p(t) \simeq \left| 1 - it \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle - \frac{1}{2} t^2 \langle \psi_0 | H^2 | \psi_0 \rangle \right|^2 \simeq 1 - t^2 [\langle \psi_0 | H^2 | \psi_0 \rangle - \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle^2]$$

$$p(t) \simeq 1 - t^2 / \tau_Z^2, \quad t \ll 1, \quad \tau_Z^{-2} = (\Delta H)^2 = \langle \psi_0 | H^2 | \psi_0 \rangle - \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle^2$$

Για πολύ μικρά χρονικά διαστήματα η αποσύνθεση δεν είναι εκθετική.

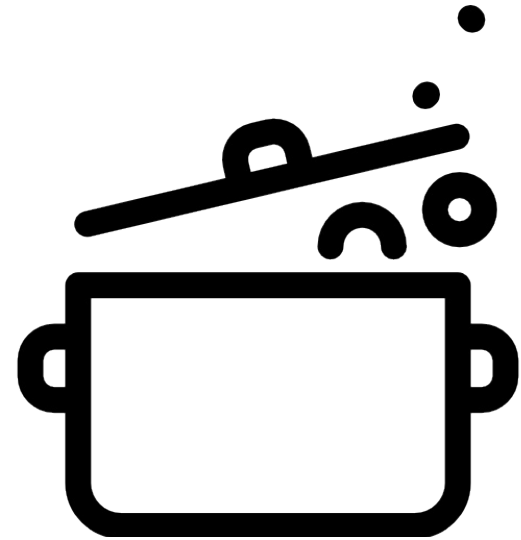
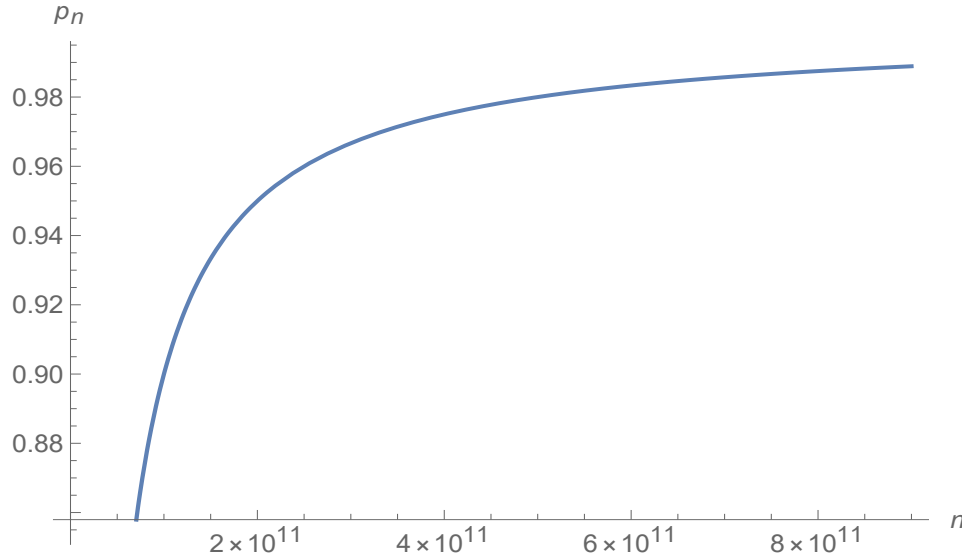
## Επαναλλειπόμενες μετρήσεις στο κβαντικό σύστημα

$$p_n(T) = \prod p(t) = [p(t)]^n = |\langle \psi_t | \psi_0 \rangle|^{2n} \Rightarrow p_n(T(t)) \simeq [1 - t^2 / \tau_Z^2]^n \simeq 1 - nt^2 / \tau_Z^2$$

$$T = nt \Rightarrow t = T/n \rightarrow p_n(T) \simeq 1 - (1/n) T^2 / \tau_Z^2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(T) = 1 \quad (T/n \ll 1)$$

Η αποσύνθεση αυτού καταστέλλεται εάν παρακολουθείται, δηλαδή εάν γίνονται συνεχείς μετρήσεις–διακοπές της μοναδιαία εξέλιξης–αυτού!

$T=1, t_z=1e-5$



*a watched pot never boils* (παροιμία)

## Σημειώσεις

- Για πολλά χρόνια η πειραματική πραγματοποίηση και παρακολούθηση ενός ασταθούς συστήματος κι άρα αυτής της συμπεριφοράς ήταν τεχνολογικά αδύνατη.[19]
- Η τετραγωνική εξάρτηση της πιθανότητας δεν προϋποθέεται για την ύπαρξη του φαινομένου. Για παράδειγμα στο μοντέλο Φρίντριχ, εμφανίζονται δύο περιοχές Ζήνωνα, αλλά μόνο η μία εμφανίζει τετραγωνική εξάρτηση.[1][2]
- Το  $t_Z$  αποκαλείται χρόνος Ζήνωνα, και χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της διάρκειας της τετραγωνικής συμπεριφοράς. Σε μερικά συστήματα είναι αρκετά ανακριβής.[8]
- Διαχωρίζοντας τη Χαμιλτονιανή σε ένα έλευθερο και ένα αλληπιδρών μέρος, με την αρχική κατάσταση να αποτελεί μια ιδιοκατάσταση της ελεύθερης Χαμιλτονιανής

$$H = H_0 + H_{\text{int}}, \quad H_0|\psi_0\rangle = \omega_0|\psi_0\rangle, \quad \langle\psi_0|H_{\text{int}}|\psi_0\rangle = 0 \Rightarrow t_Z^{-2} = \langle\psi_0|H_{\text{int}}^2|\psi_0\rangle$$

Δήλαδή ο χρόνος Ζήνωνα εξαρτάται στο τετράγωνο της αλληπιδρώντος Χαμιλτονιανής.

### 3 Αντίστροφο φαινόμενο Ζήνωνα

Από προηγουμένως

$$p(t) \simeq 1 - t^2 / \tau_Z^2, \quad p_n(T) = [p(t)]^n, \quad t = T / n$$

Η πρώτη ξαναγράφεται

$$p_n(T) = [p(t)]^n = \exp(n \log p(t)) = \exp(-\gamma_{\text{eff}} T)$$

Οπου  $\gamma_{\text{eff}}$  ο ενεργός ρυθμός αποσύνθεσης.

$$\gamma_{\text{eff}}(t) = -(1/t) \log p(t) \simeq t / \tau_Z^2, \quad t \ll 1$$

$$\gamma_{\text{eff}}(t) \rightarrow \gamma, \quad t \text{ not } \ll 1$$

Εστω πεπερασμένος χρόνος  $\tau^*$  ώστε

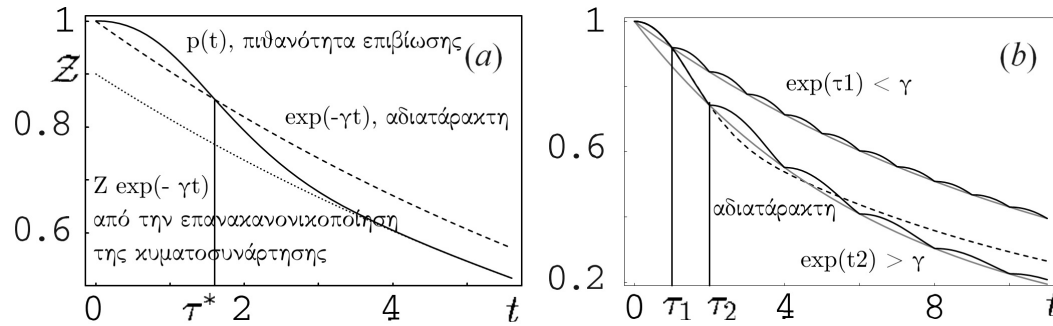
$$\gamma_{\text{eff}}(\tau^*) = \gamma \rightarrow p(\tau^*) = \exp(-\gamma \tau^*)$$

Ο χρόνος  $\tau^*$  είναι η τομή των καμπύλων  $p(t)$  και  $\exp(-\gamma t)$ .

Μπορεί να θεωρηθεί ως ο χρόνος μετάβασης από το κβαντικό στο αντίστροφο φαινόμενο. [8]

Εμφανίζεται σε κάποια μοντέλα ασταθών καταστάσεων.

Εστω το ακόλουθο παράδειγμα, όπου εμφανίζεται ένας τέτοιος χρόνος



πηγή: [8] (τροποποιημένη)

Για  $t = \tau_1 < \tau^*$ , προκύπτει το (κανονικό) φαινόμενο Ζήνωνα.

$$t < \tau^* \Rightarrow \gamma_{\text{eff}}(t) < \gamma$$

Δηλαδή η αποσύνθεση επιβραδύνεται σχετικά με το φυσικό ρυθμό.

Για  $t = \tau_2 > \tau^*$ , προκύπτει το αντίστροφο<sup>3</sup> φαινόμενο Ζήνωνα.

$$t > \tau^* \Rightarrow \gamma_{\text{eff}}(t) > \gamma$$

Δηλαδή η αποσύνθεση επιταχύνεται σχετικά με το φυσικό ρυθμό.

Δεν προκύπτει από γενικές αρχές όπως το (κανονικό) φαινόμενο Ζήνωνα. [21]

<sup>3</sup>. Αποκαλείται και φαινόμενο Ηράκλειτου (εκ του “τὰ πάντα ρεῖ”)

## 4 Γενικός φορμαλισμός

Δώθηκε από τους Misra και Sudarshan[22]. (Η ακόλουθη ανάλυση έχει ιδέες από [21][9].)

Εστω κβαντικό σύστημα στο χώρο  $\mathcal{H}$ , με τελεστή-μήτρα-πυκνότητας  $\rho$  και χρονική εξέλιξη που περιγράφεται από το μοναδιαίο τελεστή  $U$ .

$$\rho(t - t') = U(t - t')\rho(t')U^*(t - t')$$

Μέτρηση είναι η εφαρμογή ενός τελεστή (ορθής) προβολής  $P$ . Πιθανότητα θα αναφέρεται στην εύρεση σε ένα υπόχωρο καταστάσεων,  $\mathcal{H}_P$  (χώρος προβολής).

Εστω  $p$  η πιθανότητα επιβίωσης (μη-αποσύνθεσης) σε μια χρονική στιγμή  $t$ .

$$p(t) = \text{Tr}[\rho(t)P] = \langle \rho(t) | P \rangle$$

Εστω τώρα  $p$  η πιθανότητα επιβίωσης σε ένα χρονικό διάστημα  $\Delta = [0, t]$ .

Η εξέλιξη του συστήματος και υπό ιδεατή μετρήση θα είναι

$$\rho = U\rho_0U^* \rightarrow \rho' = PU\rho_0U^*P$$

Εξ επαγωγής, η τελική κατάσταση μετά από  $n$  μετρήσεις

$$\rho(n, t) = V_n(t) \rho_0 V_n^*(t)$$

$$V_n(t) = [PU(t/n)P]^n = [P \exp(-iHt/n)P]^n$$



Η πιθανότητα επιβίωσης—υπό επαναλλειπόμενες μετρήσεις—γράφεται

$$p(n, \Delta; \rho) = \text{Tr}[V_n(t)\rho_0 V_n^*(t)]$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} p(n, \Delta; \rho) &= \text{Tr}[\rho(n, t)P] \\ &= \text{Tr}[V_n(t)\rho_0 P^n \exp(iHt)P^n P] \quad P^n P = P^{n-1}P^2 = P^{n-1}P = P^n \\ &= \text{Tr}[V_n(t)\rho_0 P^n \exp(iHt)P^n] \\ &= \text{Tr}[V_n(t)\rho_0 V_n^*(t)] \end{aligned}$$

όέδ

Είναι

$$\begin{aligned} V(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(t) = PU(t)P \\ V^*(t) &= V(-t) \Rightarrow V^*(t)V(t) = P \end{aligned}$$

Απόδειξη

Εκτενής. Δίνεται στο άρθρο των Misra και Sudarshan[22].

Τότε, για τη τελική κατάσταση

$$\rho(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n, t) = V(t)\rho V^*(t)$$

και άρα

$$p(\Delta; \rho) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(n, \Delta; \rho) = \text{Tr}[V(t)\rho V^*(t)]$$

$$\Rightarrow p(\Delta; \rho) = \text{Tr}[\rho V^*(t)V(t)] = \text{Tr}[\rho P]$$

Εστω η αρχική κατάσταση ανήκει στον  $\mathcal{H}_P$ .

$$\text{Tr}[\rho_0 P] = 1 \Rightarrow p(\Delta; \rho_0) = 1$$

Η μετάβαση μεταξύ κβαντικών καταστάσεων καταστέλλεται υπό συνεχείς μετρήσεις.

Οι Misra και Sudarshan του απέδωσαν την ονομασία παράδοξο (αργότερα γνωστό ως φαινόμενο) Ζήνωνα, λόγω του Ζήνωνα της αρχαιότητας, ο οποίος είπε πως ένα αντικείμενο (ένα βέλος) που κινείται σε κάθε απειροστή χρονική στιγμή είναι ακίνητο, και, εφόσον ο χρόνος είναι σύνολο αυτών των στιγμών, δεν θα έπρεπε να κινείται.

## 5 Κβαντική δυναμική Ζήνωνα

Το σύστημα δεν απαιτείται να είναι 1d

- Εστω  $|0\rangle = |\text{in}\rangle, |1\rangle$ , και γίνονται μετρήσεις του  $|0\rangle$ .
- Εστω  $|0\rangle, |1\rangle$ , και γίνονται μετρήσεις του  $|m\rangle$ .

Για μετρήσεις–προβολές–σε πολυδιάστατο υπόχωρο, το σύστημα εξελίσσεται πέρα από την αρχική κατάσταση, αλλά παραμένει στον υπόχωρο που ορίζεται από τη μέτρηση.

Δυναμική είναι η συνεχιζόμενη χρονική εξέλιξη εντός του προβαλλόμενου υπόχωρου Ζήνωνα.

### Φορμαλισμός [9][8][7]

- Ημιτελής μέτρηση, δηλαδή ο τελεστής  $P$  είναι πολυδιάστατος.

$$V_n(t) = [P (1 - iHt/n + \mathcal{O}(1/n^2))P]^n \simeq P[1 - iPHPt/n]^n$$

$$V(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(t) = P \exp(-iH_Z t), \quad H_Z = PHP$$

Το σύστημα παραμένει στον υπόχωρο  $\mathcal{H}_P$  και εξελίσσεται υπό τη δράση του  $V(t)$ .

- Μη-επιλεκτική μέτρηση, καταστροφή τη συνοχή φάσης μεταξύ κάποιων καταστάσεων, προκαλώντας τη μετάβαση μιας καθαρής κατάστασης σε μικτή.

Εστω ένα πεπερασμένο σύνολο τελεστών προβολής,  $\{P_i\}_i, P_i P_j = \delta_{ij} P_i, \sum P_i = 1$ .

Προκαλείται διαίρεση του ολικού χώρου, ώστε  $\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_i, \mathcal{H}_i = P_i \mathcal{H}$ .

Η σχετική μη-επιλεκτική μέτρηση περιγράφεται από τον υπερτελεστή

$$\hat{P}\rho = \sum P_i \rho P_i$$

Η ελεύθερη εξέλιξη και η εξελίξη Ζήνωννα τότε είναι

$$\hat{U}\rho = U(t)\rho U^*(t), \quad \hat{V}^{(n)} = (\hat{P}\hat{U}(t/n))^n$$

Ομοια με το μονοδιάστατο πρόβλημα, μπορεί να δειχθεί

$$\rho(t) = \hat{V} \rho_0 = \sum V_i(t)\rho_0 V_i^*(t), \quad \sum V_i^*(t)V_i(t) = \sum P_i = 1$$

$$p_i(t) = \text{Tr}[\rho(t)P_i] = \text{Tr}[\rho_0 P_i] = p_i(0), \forall i$$

Η πιθανότητα διατηρείται σε κάθε υπόχωρο.

Ο ολικός χώρος διασπάται σε αμετάβλητους υπόχωρους και οι διάφορες συνιστώσες του τελεστή πυκνότητας εξελίσσονται ανεξάρτητα εντός κάθε τομέα.

Ο περιορίζων τελεστής εξέλιξης έχει τη μορφή

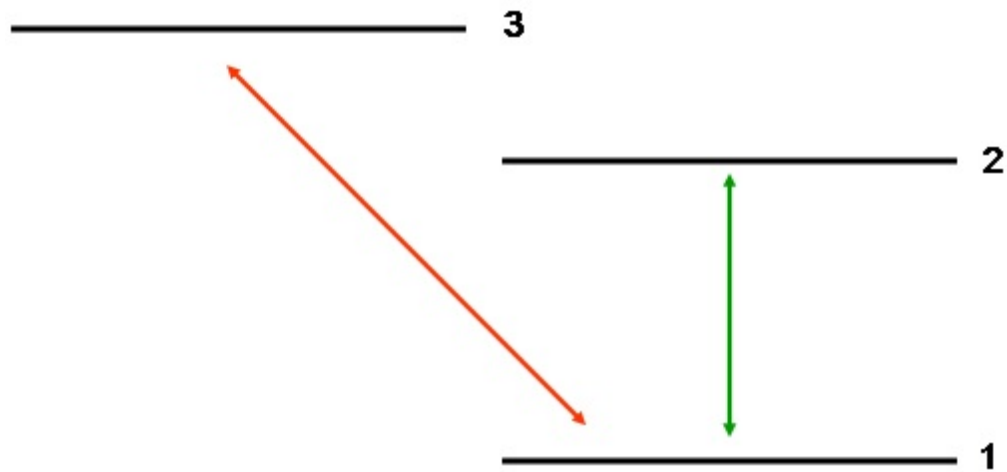
$$V_i(t) = P_i \exp(-i H_{Z,i} t), \quad H_{Z,i} = P_i H P_i$$

## 6 Πειράματα

- Itano et al., 1990 [14]

Βασίστηκε σε πείραμα που προτάθηκε από το Cook, 1988 [4]

Εστω ένα τριών-επιπέδων σύστημα, που μπορεί να μεταβεί από το επίπεδο 1 στο 2. Εστω ακόμη πως είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί στιγμιαία μέτρηση της κατάστασης αυτού. Για να γίνει παρακολούθηση των τοπικών πληθυσμών, το επίπεδο 1 συνδέεται στο 3 που αποσυντίθεται μόνο στο 1.



πηγή: [30] (τροποποιημένη)

Δεν υπάρχει αυθόρμητη αποσύνθεση ενός ασταθούς συστήματος αλλά επαγόμενη μετάβαση.

Τα επίπεδα 1,2 είναι υποεπίπεδα της βασικής  $^2S_{1/2}$  κατάστασης του  $\text{Be}^+$  ιόντος, ενώ το 3 είναι υποεπίπεδο της  $^2P_{3/2}$  διεγερμένης κατάστασης που αποσυντίθεται μόνο στο 1.

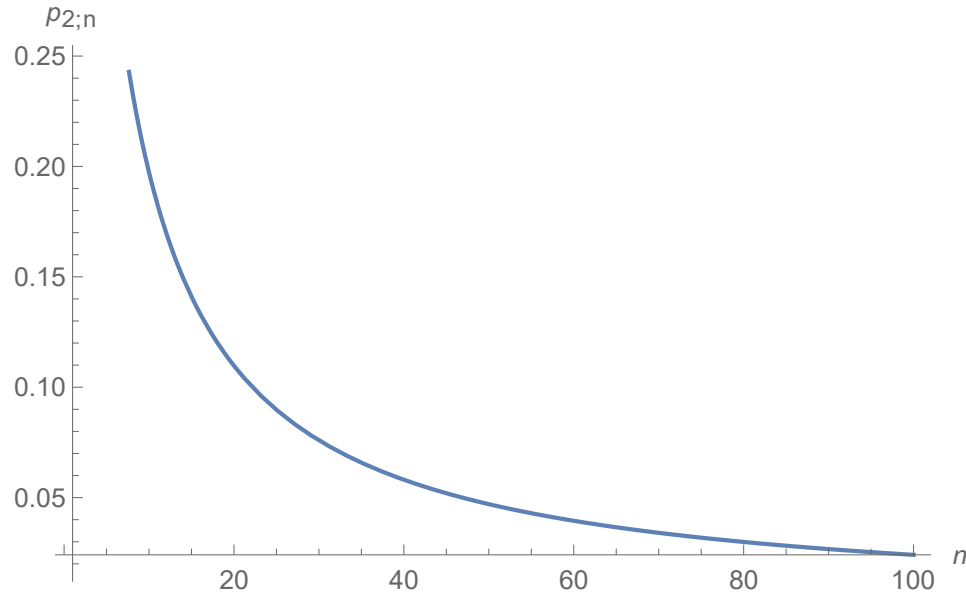
Εφαρμόζεται πεδίο με συχνότητα συντονισμού  $\Omega = E_2 - E_1$  (συχνότητα Rabi), το οποίο δημιουργεί μια κατάσταση υπέρθεσης των καταστάσεων 1,2.

$$p_2(t) = \sin^2(\Omega t / 2) = 1/2[1 - \cos(\Omega t)]$$

Για  $T = \pi/\Omega$  (εν συντονισμό π-παλμός),  $p_2(T) = 1$ , που αποτελεί το αποτέλεσμα όταν δεν υπάρχουν “μετρήσεις”. Δηλαδή όλα ιόντα θα βρεθούν στο επίπεδο 2.

Εστω πολλαπλοί παλμοί διάρκειας  $t = \pi/(n\Omega)$ , ώστε  $t = T/n$ .

$$p_{2;n}(T) = 1/2[1 - \cos^n(\pi/n)] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_{2;n}(T) = 0$$



Δηλαδή συχνές μετρήσεις οδηγούν τα ιόντα να παραμείνουν στην αρχική κατάσταση. Η μείωση του  $p_2(T)$  με αύξηση του  $n$  αποδεικνύει το φαινόμενο Ζήνωνα.

Υπάρχουν επικρίσεις σχετικά με την ερμηνεία του πειράματος.[13][21]

Μήπως είναι απλά αποτέλεσμα της μοναδιαίας δυναμικής της κβαντομηχανικής, χωρίς να απαιτείται η μη-μοναδιαία κατάρευση της κβαντικής μέτρησης;[30]

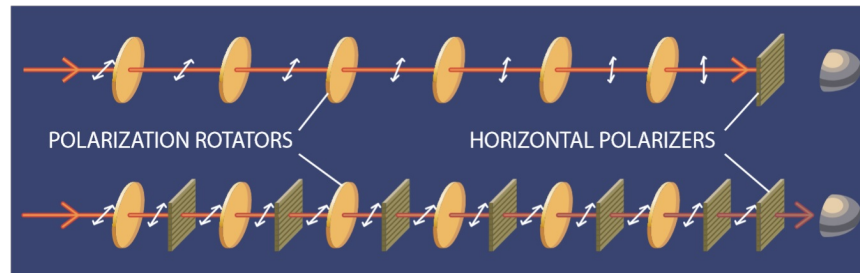
- Kwiat et al., 1995 [18][19]

Βασίστηκε σε παράδειγμα που προτάθηκε από το Peres, 1980 [26]

Εστω πολωμένο φως, το οποίο κατευθύνεται σε μια σειρά από στροφείς (rotators), όπου ο καθένας ελάχιστα στρέφει τη διεύθυνση πόλωσης, ώστε τελικά  $|1\rangle = R(\pi/2)|0\rangle$ .

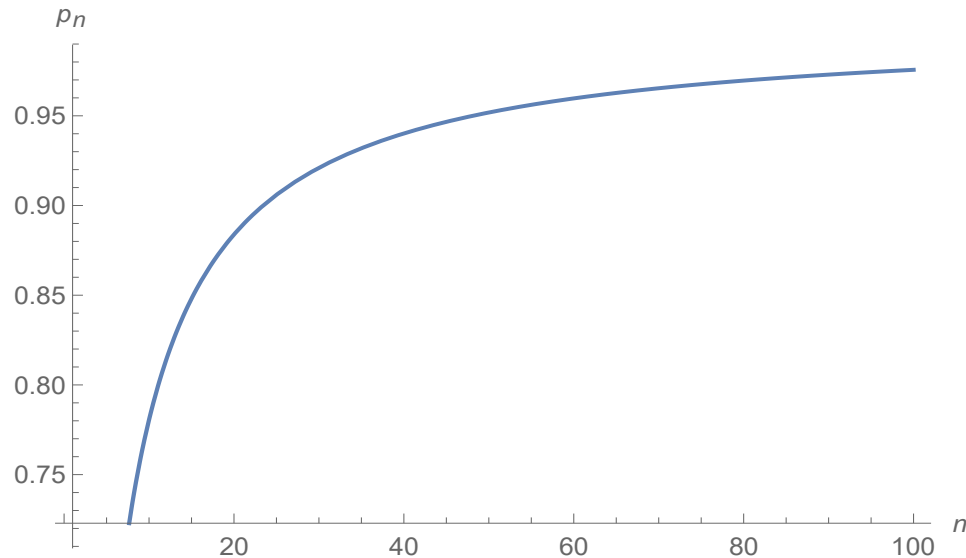
Η βηματική περιστροφή της πόλωσης, ή διαφορετικά η εξέλιξη της κατάστασης πόλωσης, μπορεί να κατασταλλεί με συνεχείς μετρήσεις της κατάστασης πόλωσης.

Πειραματικά πραγματοποιήθηκε με εισαγωγή ενός πολωτή (polarizer) μεταξύ κάθε στροφέα.



Μετά από κάθε στροφή γωνίας  $d\vartheta = a$  ο πολωτής θα επαναφέρει την αρχική πόλωση με πιθανότητα  $p(a) = \cos^2 a$ . Τελικά

$$p_n(a) = \cos^{2n} a \Rightarrow p(n) = \cos^{2n}(\pi/2n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = 1$$



Γενικά, το φαινόμενο Ζήνωνα εμφανίζεται όταν γίνεται μέτρηση μιας μετασταθής κβαντικής κατάστασης και η οποία επαναφέρεται επαρκώς συχνά.



- Raizen et al., 2001 [10][12]

Ατομα νατρίου παγιδευμένα μαγνητοπτικά—μπορούν να διαφύγουν μόνο μέσω σήραγγας.

Όταν ο πληθυσμός ατόμων παρατηρήθηκε ανά χρονικό διάστημα

- $1/10^6$  s ο ρυθμός διαφυγής μειώθηκε, δηλ. κβαντικό φαινόμενο Ζήνωνα
- $5/10^6$  s ο ρυθμός διαφυγής αυξήθηκε, δηλ. αντίστροφο φαινόμενο Ζήνωνα

Αποτέλεσε τη πρώτη παρατήρηση σε ασταθές σύστημα, στο πνεύμα της αρχικής διατύπωσης, και το πρώτο πείραμα που εμφανίζονται και τα δύο φαινόμενα ταυτόχρονα.

- Schäfer et al, 2014 [27]
- Signoles et al, 2014 [29]

Αποτελούν τα πρώτα πειράματα που δείχνουν το πολυδιάστατο φαινόμενο, δηλαδή εμφάνιση της δυναμικής Ζήνωνα που συζητήθηκε προηγουμένως.

Και τα δύο πειράματα προκαλούν ισχυρή σύζευξη η οποία δυναμικά διαχωρίζει τις κβαντικές καταστάσεις σε ομάδες, περιορίζοντας τα άτομα να εξελίσσονται εν συμφωνία σε υποπεριοχές (υπόχωρους στη γλώσσα του φορμαλισμού).

Αρκετές εφαρμογές του φαινομένου βασίζονται πάνω σ' αυτή τη δυναμική, συνεπώς η πειραματική πραγματοποίηση της είναι το πρώτο στάδιο στην υλοποίηση τους.

## 7 Εφαρμογές

- Προστασία διεμπλοκής, π.χ. Maniscalco et al [20]

Γίνεται μελέτη της ακριβής δυναμικής διεμπλοκής δύο ατόμων σε ένα συντονιστή με απώλεια. Στο πεδίο ισχυρής σύζευξης εμφανίζεται αναδημιουργία της διεμπλοκής. Προτείνεται ένα σχήμα για τη καταπολέμηση της αλλοίωσης.

- Δημιουργία διεμπλοκής, π.χ. Wang, You and Nori [31]
- Προστασία από αποσυμφωνία (decoherence), π.χ. Kondo et al [16]
- Γρηγορότερες κβαντικές πύλες, π.χ. Shao et al [28]
- Νέο πρότυπο κβαντικών υπολογιστών, π.χ. Franson, Jacobs and Pittman [11]

Το φαινόμενο Ζήνωνα χρησιμοποιείται για τη κατασταλή αρνητικών γεγονότων που θα συνέβαιναν σε μια προσέγγιση γραμμικής οπτικής σε κβαντικούς υπολογιστές. Τα φωτόνια συμπεριφέρονται σαν φερμιόνια στη παρουσία ισχυρού φαινομένου Ζήνωνα!

- Προσομοίωση ανοιχτών-κβαντικών συστημάτων, Patsch, Maniscalco and Koch [25]
- Έλεγχο αλληλεπιδρώντος πολλών-σωμάτων σύστημα, π.χ. Patil et al [24]
- Πρόληψη και διορθωση σφαλμάτων, π.χ. Erez et al [6]
- Ανίχνευση κι αφόπλιση “κβαντικής βόμβας”, π.χ. Kwiat et al [17]

## 8 Προσομοίωση σε κβαντικό κύκλωμα

### Θεωρία

Ταλάντωση Rabi συστήματος δύο-επιπέδων

$$H = \Omega(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \Rightarrow H(|0\rangle, |1\rangle) = \Omega(|1\rangle, |0\rangle)$$

$$U = \exp(-iHt) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & -i \sin(\Omega t) \\ -i \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle \Rightarrow |\psi\rangle = U|0\rangle = \cos(\Omega t)|0\rangle - i \sin(\Omega t)|1\rangle$$

Πιθανότητα επιβίωσης, δηλαδή παραμονής στη κατάσταση  $|0\rangle$

$$p_s = \cos^2(\Omega t) \simeq 1/2[1 + \cos(2\Omega t)] \simeq 1 - \Omega^2 t^2$$

$$t = T/n \rightarrow p_s(T) \simeq 1 - (1/n)\Omega^2 T^2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_s(T) = 1$$

## Μέτρηση[23]

Μια μέτρηση αναφέρεται στη προβολική μέτρηση του γενικού φορμαλισμού. Γενικές μετρήσεις μπορούν να μετατραπούν σε προβολικές μετρήσεις με μοναδιαίες μετατροπές.

Αρχή έμμεσης μέτρησης

*Χωρίς χάσιμος της γενικότητας, κάθε ελεύθερο κβαντικό καλώδιο στο τέλος του κυκλώματος μπορεί να θεωρηθεί πως έχει μετρηθεί.*

Αρχή αναβαλλόμενης μέτρησης

*Κάθε μέτρηση που γίνεται σε ενδιάμεσο στάδιο στο κβαντικό κύκλωμα μπορεί να μεταφερθεί στο τέλος, με τις ενδιάμεσες μετρήσεις να αντικαθίστανται με κβαντικούς τελεστές.*

Η μέτρηση σε ενδιάμεσο στάδιο έχει την έννοια της διαταραχής.

Όλες οι ενδιάμεσες μετρήσεις–διαταραχές–μπορούν να μιμηθούν με μοναδιαίους τελεστές.

## Υλοποίηση

Η πύλη  $U3$  αποτελεί το γενικό μοναδιαίο τελεστή, κι έχει τη μορφή

$$U3(\vartheta, \varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) & -e^{i\lambda} \sin(\vartheta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\vartheta/2) & e^{i(\lambda+\varphi)} \cos(\vartheta/2) \end{pmatrix}$$

Επιλέγοντας  $(\vartheta, \varphi, \lambda) = (2\Omega t, -\pi/2, \pi/2)$  θα είναι  $U3(\vartheta, \varphi, \lambda) = U$ .

Εστω πως η προσομοίωση θα πραγματοποιηθεί με  $\vartheta = 2\Omega t = \pi/m$ .

Οι ακόλουθες διαδικασίες θα χρησιμοποιηθούν.

- Διαίρεση του χρόνου “μέτρησης”

Είναι

$$U3(\vartheta_1, -\pi/2, \pi/2) = [U3(\vartheta_n, -\pi/2, \pi/2)]^n, \quad \vartheta_n = \pi/(nm), \quad n, m \in \mathbb{N}$$

Δηλαδή, η λειτουργία μιας πύλης  $\vartheta_1$  είναι ισοδύναμη με  $n$  διαδοχικές  $\vartheta_n$ .

Απόδειξη

Ο τελεστής στροφής γράφεται

$$U3(\vartheta, -\pi/2, \pi/2) = \exp(-iH\vartheta/2), \quad H = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$

Τότε

$$\begin{aligned} [U3(\vartheta_n, -\pi/2, \pi/2)]^n &= [\exp(-iH\vartheta_n/2)]^n \\ &= \exp(-iHn\vartheta_n/2) \\ &= \exp(-iH\vartheta_1/2) \\ &= U3(\vartheta_1, -\pi/2, \pi/2) \end{aligned}$$

όεδ

- Εισαγωγή ενδιάμεσων διαταραχών

Το αποτέλεσμα εφαρμογής μιας CNOT είναι ίδιο με αυτό μιας διαταραχής.

Βασίζεται στην αρχή της έμμεσης κι αναβαλλόμενης μέτρησης.

## Προσομοίωση

Το ακόλουθο κομμάτι βασίζεται σε άρθρο των Panigrahi et al [3]

Ομοια με τη προηγούμενη ομάδα πραγματοποιείται χρήση του IBM QE.

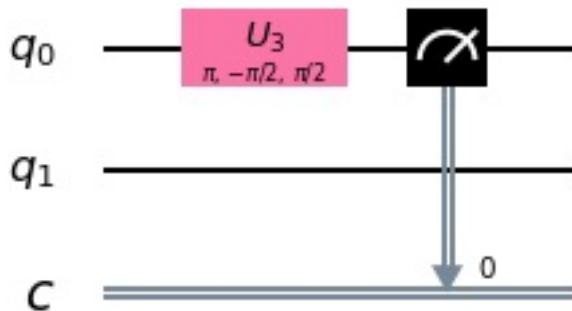
Για τις καταστάσεις είναι  $|1\rangle = R_z(\pi)|0\rangle$ , άρα  $m = 1 \Rightarrow \vartheta = \vartheta_n = \pi/n$ .

$$U3(\vartheta_n, -\pi/2, \pi/2) = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2n) & -i \sin(\pi/2n) \\ -i \sin(\pi/2n) & \cos(\pi/2n) \end{pmatrix}$$

Οι αρχικές καταστάσεις των qubit είναι  $|q_{i,0}\rangle = |0\rangle$ , όπου  $i$  ο αριθμός του qubit.

Γίνεται μέτρηση μόνο του  $q_0$  άρα  $p = p(|q_0\rangle = |\psi\rangle)$ .

- Βασικό κύκλωμα, μοναδική  $U3$  στροφής  $\vartheta = \pi$

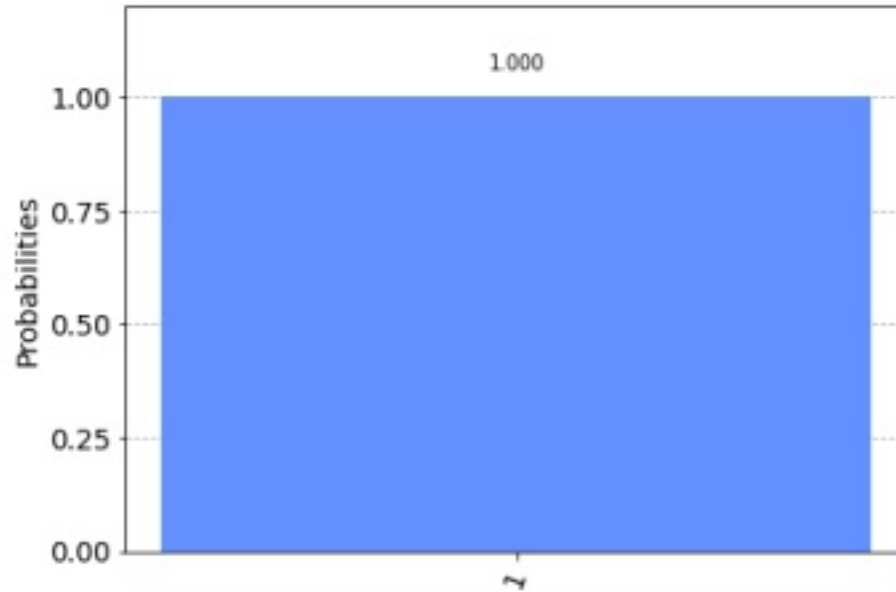


$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= |0\rangle \\ \Rightarrow |\psi\rangle &= U3(\pi, -\pi/2, \pi/2)|0\rangle \\ &\Rightarrow |\psi\rangle = -i|1\rangle \end{aligned}$$

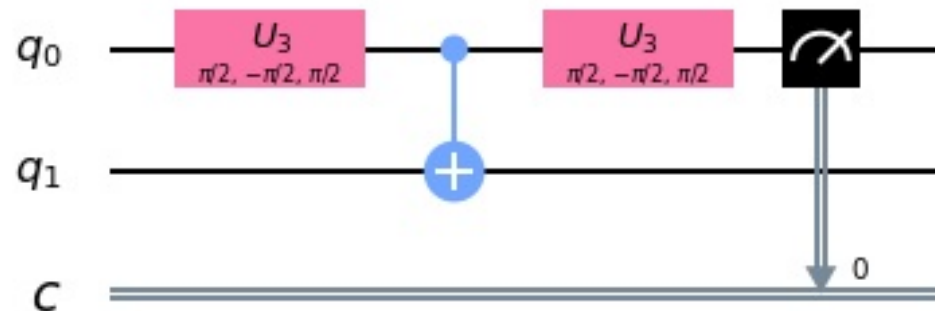
$$p_s = p(|0\rangle) = 0$$

$$p_d = p(|1\rangle) = 1$$

Τρέχοντας το κύκλωμα στο προσομοιωτή (backend: 'qasm\_simulator', shots: 1024)



- Κύκλωμα  $U_3$ /CNOT  $\vartheta = \pi/2$





Είναι

$$U3(\vartheta, -\pi/2, \pi/2) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) & -i \sin(\vartheta/2) \\ -i \sin(\vartheta/2) & \cos(\vartheta/2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} U3|0\rangle &= a|0\rangle + b|1\rangle & a &= \cos(\vartheta/2) \\ U3|1\rangle &= b|1\rangle + a|0\rangle & b &= -i \sin(\vartheta/2) \end{aligned}$$

Με αρχική κατάσταση  $|\psi_0\rangle = |0\rangle$

1:  $|\psi_1\rangle = U3|\psi_0\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$

2:  $|\psi_2\rangle = \text{CNOT}(|\psi_1\rangle \otimes |0\rangle) = \text{CNOT}(a|00\rangle + b|10\rangle)$   
 $\Rightarrow |\psi_2\rangle = a|00\rangle + b|11\rangle$

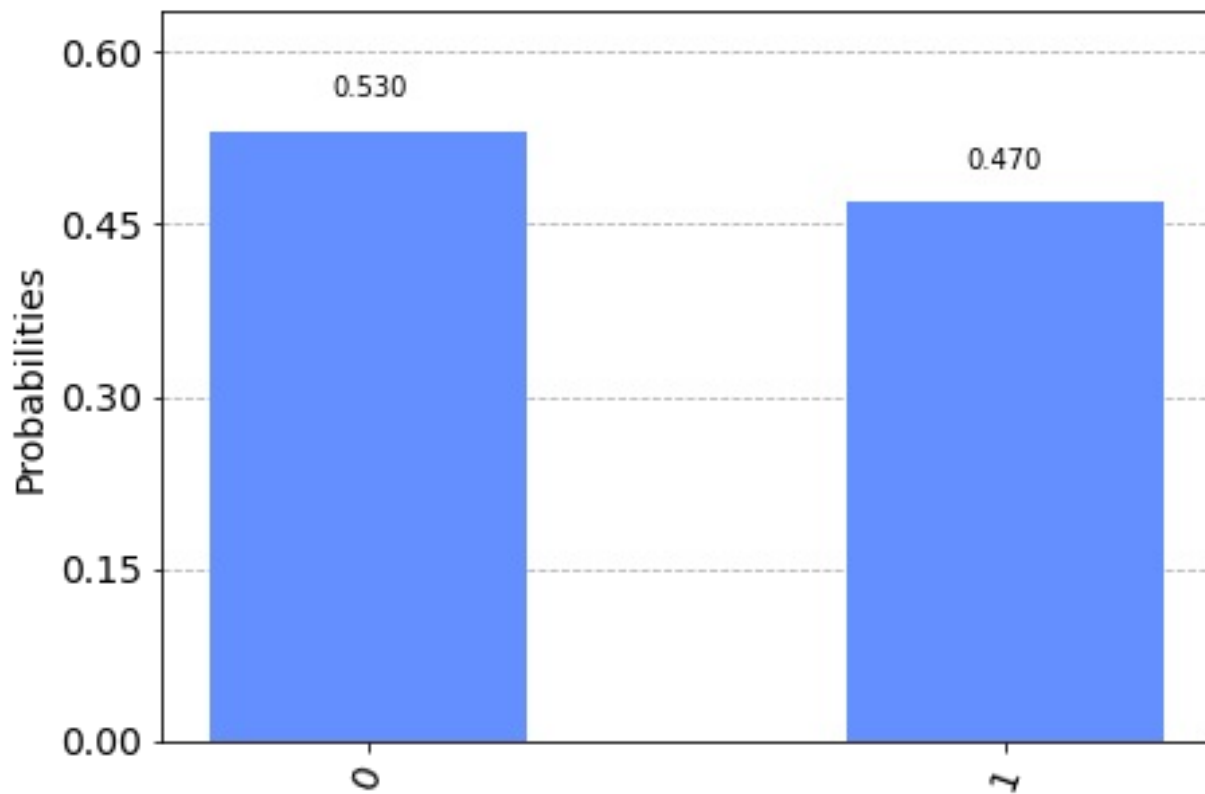
3:  $|\psi_3\rangle = U3|\psi_2\rangle = aU3|0\rangle \otimes |0\rangle + bU3|1\rangle \otimes |1\rangle$   
 $\Rightarrow |\psi_3\rangle = a^2|00\rangle + ab|10\rangle + ab|11\rangle + b^2|01\rangle$

Πιθανότητα επιβίωσης, δηλαδή παραμονής στη κατάσταση  $|0\rangle$

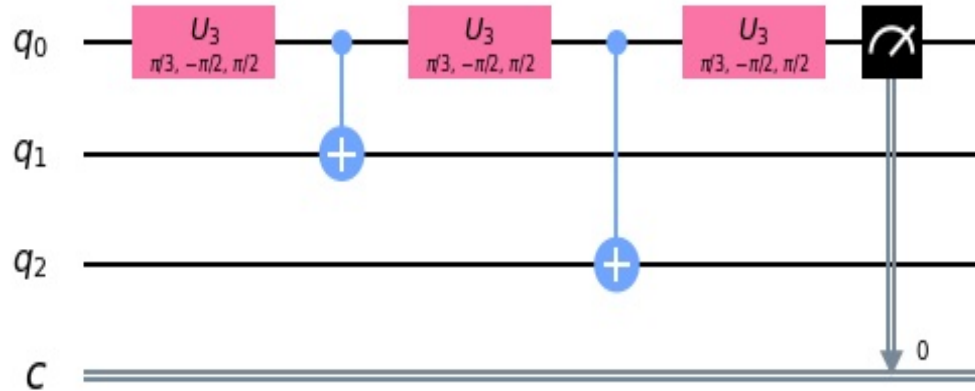
$$p_s = |a^2|^2 + |b^2|^2 = a^4 + b^4 = \cos^4(\vartheta/2) + \sin^4(\vartheta/2)$$

$$\vartheta = \pi/2 \rightarrow p_s = 0.5$$

Τρέχοντας το κύκλωμα στο προσομοιωτή (backend: 'qasm\_simulator', shots: 1024)



- Κύκλωμα U3/CNOT  $\vartheta = \pi/3$



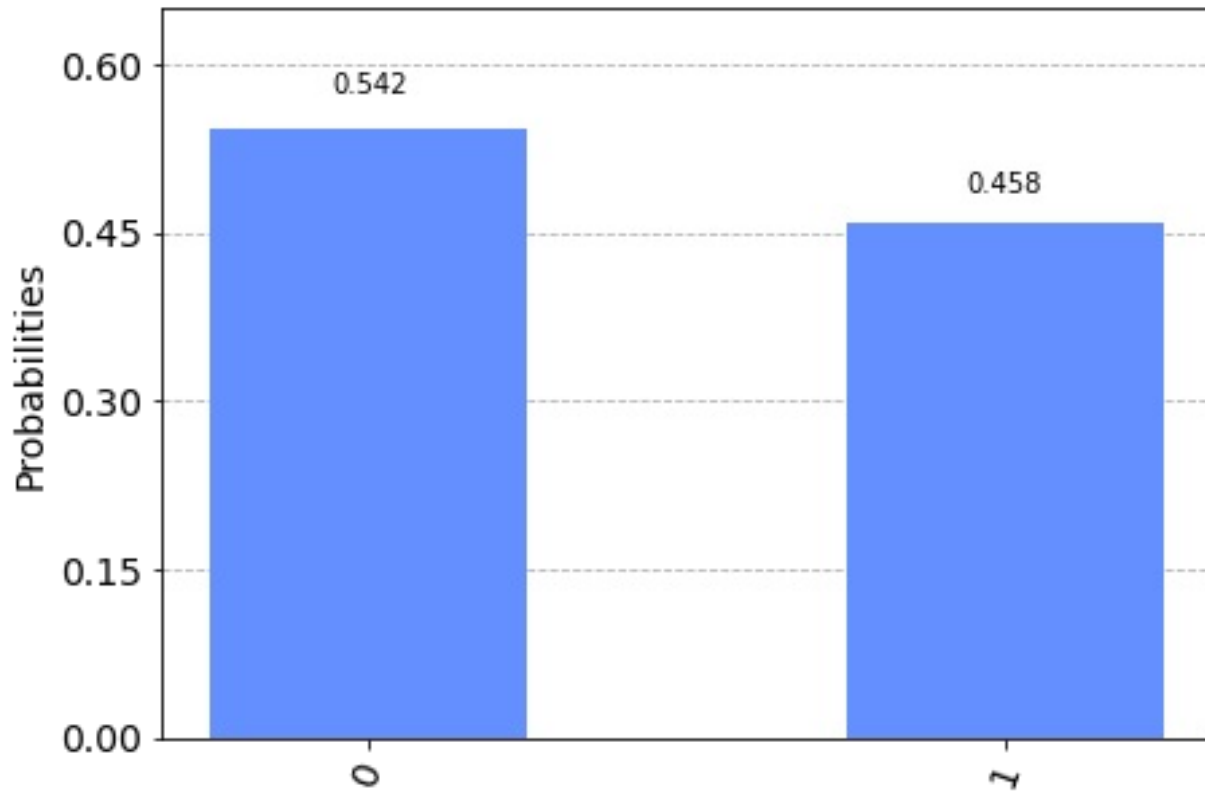
Η προηγούμενη ανάλυση μπορεί να συνεχιστεί για τρεις πύλες U3.

Αντίστοιχα, η πιθανότητα επιβίωσης βρίσκεται

$$p_s = a^6 + 3a^2b^4 = \cos^6(\vartheta/2) + 3\cos^2(\vartheta/2)\sin^4(\vartheta/2)$$

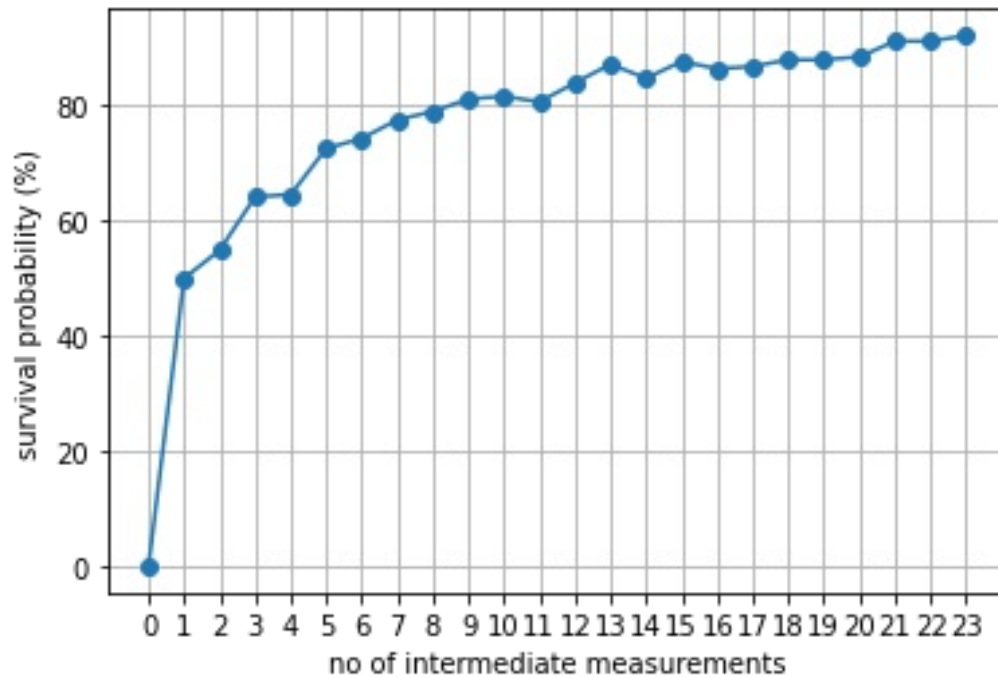
$$\vartheta = \pi/3 \rightarrow p_s = 0.5625$$

Τρέχοντας το κύκλωμα στο προσομοιωτή (backend: 'qasm\_simulator', shots: 1024)



Πραγματοποιείται η προσομοίωση για  $n$  πύλες U3.

Η προηγούμενη ανάλυση μπορεί να συνεχιστεί για να δώσει τη θεωρητική πιθανότητα.



## Συμπέρασμα

Δείχνεται πως η πιθανότητα επιβίωσης αυξάνει με ενδιάμεσες μετρήσεις-διαταραχές.

Δηλαδή για  $n \rightarrow \infty$  καταστέλλεται η μετάβαση  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ .

Αποτελεί αυτό μια έγκυρη εμφάνιση ΚΦΖ;

# Βιβλιογραφία

- [1] Ioannis Antoniou, Evgueni Karpov, G Pronko, και Evgeny Yarevsky. Quantum zeno and anti-zeno effects in the friedrichs model. *Physical Review A*, 63(6):62110, 2001.
- [2] Ioannis Antoniou, Evgueni Karpov, G Pronko, και Evgeny Yarevsky. Decoherence and zeno time in quantum computations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 17(2-3):311–315, 2003.
- [3] Subhashish Barik, Dhiman Kalita, Bikash Behera, και Prasanta Panigrahi. Demonstrating quantum zeno effect on ibm quantum experience. 12 2019.
- [4] Richard J Cook. What are quantum jumps? *Physica Scripta*, 1988(T21):49, 1988.
- [5] AT Dellis και IK Kominis. The quantum zeno effect immunizes the avian compass against the deleterious effects of exchange and dipolar interactions. *Biosystems*, 107(3):153–157, 2012.
- [6] Noam Erez, Yakir Aharonov, Benni Reznik, και Lev Vaidman. Correcting quantum errors with the zeno effect. *Physical Review A*, 69(6):62315, 2004.
- [7] Paolo Facchi, Giuseppe Marmo, και Saverio Pascazio. Quantum zeno dynamics and quantum zeno subspaces. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 196, σελίδα 12017. IOP Publishing, 2009.
- [8] Paolo Facchi και Saverino Pascazio. Quantum zeno dynamics: mathematical and physical aspects. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(49):493001, 2008.
- [9] Paolo Facchi και Saverio Pascazio. Quantum zeno subspaces and dynamical superselection rules. In *The Physics of Communication*, pages 251–286. World Scientific, 2003.
- [10] MC Fischer, Braulio Gutiérrez-Medina, και MG Raizen. Observation of the quantum zeno and anti-zeno effects in an unstable system. *Physical review letters*, 87(4):40402, 2001.
- [11] JD Franson, BC Jacobs, και TB Pittman. Quantum computing using single photons and the zeno effect. *Physical Review A*, 70(6):62302, 2004.
- [12] Braulio Gutiérrez-Medina, Martin C Fischer, και Mark G Raizen. Observation of the quantum zeno and anti-zeno effects in an unstable system. In *The Physics Of Communication*, pages 219–232. World Scientific, 2003.
- [13] Wayne M Itano. Perspectives on the quantum zeno paradox. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 196, σελίδα 12018. IOP Publishing, 2009.

- [14] Wayne M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, και D. J. Wineland. Quantum zeno effect. *Phys. Rev. A*, 41:2295–2300, Mar 1990.
- [15] I. K. Kominis. Quantum zeno effect explains magnetic-sensitive radical-ion-pair reactions. *Phys. Rev. E*, 80:56115, Nov 2009.
- [16] Yasushi Kondo, Yuichiro Matsuzaki, Kei Matsushima, και Jefferson G Filgueiras. Using the quantum zeno effect for suppression of decoherence. *New Journal of Physics*, 18(1):13033, 2016.
- [17] Paul G Kwiat, AG White, JR Mitchell, O Nairz, G Weihs, H Weinfurter, και A Zeilinger. High-efficiency quantum interrogation measurements via the quantum zeno effect. *Physical Review Letters*, 83(23):4725, 1999.
- [18] Paul G. Kwiat, Klaus Mattle, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, Alexander V. Sergienko, και Yanhua Shih. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4337–4341, Dec 1995.
- [19] Paul Kwiat, Harald Weinfurter, και Anton Zeilinger. Quantum seeing in the dark. *Scientific American*, 275(5):72–78, 1996.
- [20] Sabrina Maniscalco, Francesco Francica, Rosa L Zaffino, Nicola Lo Gullo, και Francesco Plastina. Protecting entanglement via the quantum zeno effect. *Physical review letters*, 100(9):90503, 2008.
- [21] B Misra και I Antoniou. Quantum zeno effect. In *The Physics Of Communication*, pages 233–250. World Scientific, 2003.
- [22] B Misra και ECG Sudarshan. The zeno’s paradox in quantum mechanics. *J. Math. Phys*, 18:756, 1977.
- [23] Michael A Nielsen και Isaac Chuang. Quantum computation and quantum information. 2002.
- [24] Yogesh Sharad Patil, Srivatsan Chakram, και Mukund Vengalattore. Quantum control by imaging: the zeno effect in an ultracold lattice gas. *ArXiv preprint arXiv:1411.2678*, 2014.
- [25] Sabrina Patsch, Sabrina Maniscalco, και Christiane P. Koch. Simulation of open-quantum-system dynamics using the quantum zeno effect. *Phys. Rev. Research*, 2:23133, May 2020.
- [26] Asher Peres. Zeno paradox in quantum theory. *American Journal of Physics*, 48(11):931–932, 1980.
- [27] Florian Schäfer, Ivan Herrera, Shahid Cherukattil, Cosimo Lovecchio, Francesco Saverio Cataliotti, Filippo Caruso, και Augusto Smerzi. Experimental realization of quantum zeno dynamics. *Nature communications*, 5(1):1–6, 2014.

- [28] Xiao-Qiang Shao, Li Chen, Shou Zhang, και Kyu-Hwang Yeon. Fast cnot gate via quantum zeno dynamics. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 42(16):165507, 2009.
- [29] Adrien Signoles, Adrien Facon, Dorian Grosso, Igor Dotsenko, Serge Haroche, Jean-Michel Raimond, Michel Brune, και Sébastien Gleyzes. Confined quantum zeno dynamics of a watched atomic arrow. *Nature Physics*, 10(10):715–719, 2014.
- [30] Anu Venugopalan. The quantum zeno effect—watched pots in the quantum world. *Resonance*, 12(4):52–68, 2007.
- [31] Xiang-Bin Wang, JQ You, και Franco Nori. Quantum entanglement via two-qubit quantum zeno dynamics. *Physical Review A*, 77(6):62339, 2008.

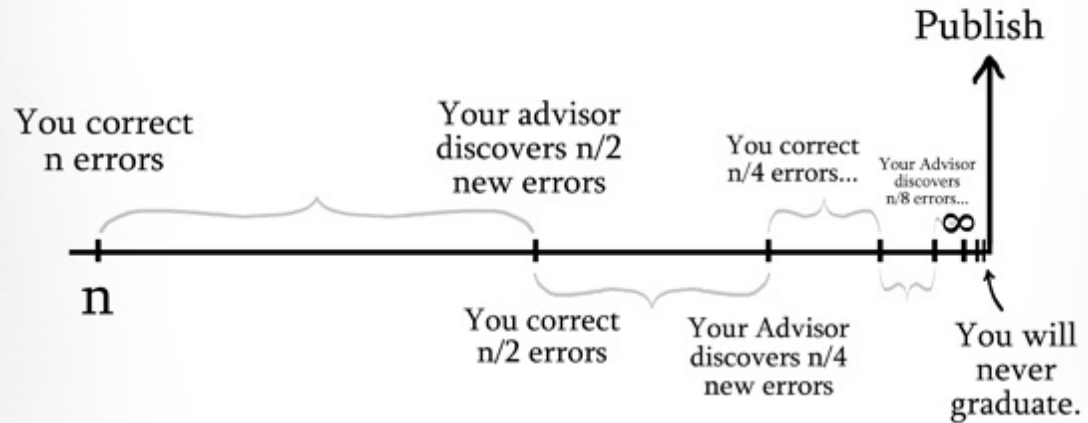


A moment of Academic History

# Zeno's Thesis' Paradox

Around 465 BC, a young Zeno of Elea formulated this paradox in response to interactions with his advisor, Parmenides:

*"If for every  $n$  number of errors you correct on your thesis, your Professor discovers  $n/2$  number of new errors, the number of revisions reaches infinity."*



*fin*



Back then, they used real blood as ink.