Κ. Φουτζόπουλος <kfoutzop@auth.gr>, 05/06/2020

Ασκηση: Να υπολογιστεί η Χαμιλτονιανή του επίπεδου κυκλικού περιορισμένου προβλήματος στο περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων.

Οι συντεταγμένες του αδρανειακού και περιστρεφόμενου συστήματος συνδέονται

$$(\xi,\eta) = R(t)(x,y) = x\,(\cos t, \sin t) + y\,(-\sin t, \cos t)$$

$$(x,y) = R^{-1}(t)(\xi,\eta) = \xi(\cos t, -\sin t) + \eta\,(\sin t, \cos t)$$

και

$$(\dot{\xi},\dot{\eta}) = (\dot{x} - y, \dot{y} + x)\cos t - (\dot{y} + x, y - \dot{x})\sin t$$

$$(\dot{x},\dot{y}) = (\dot{\xi} + \eta, \dot{\eta} - \xi)\cos t - (\xi - \dot{\eta}, \dot{\xi} + \eta)\sin t$$

Για τα μεγάλα σώματα, από τη κανονικοποίηση (δηλαδή χρήση αδιάστατων συντεταγμένων)

$$x_2 - x_1 = 1$$

κι από τη διατήρηση της ορμής (σταθερή ταχύτητα του κέντρου μάζας)

$$(1-\mu)x_1 + \mu x_2 = 0$$

Επιλύοντας το σύστημα

$$(x_1, x_2) = (-\mu, 1-\mu)$$

Στο επίπεδο περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα, οι τροχιές αυτών είναι

$$(\xi_1,\eta_1) = x_1\,(\cos t, \sin t) \quad (\xi_2,\eta_2) = x_2\,(\cos t, \sin t)$$

και οι αποστάσεις του μικρού σώματος από τα προηγούμενα είναι

$$r_1^2 = (\xi + \mu\cos t)^2 + (\eta + \mu\sin t)^2$$

$$r_2^2 = (\xi - (1-\mu)\cos t)^2 + (\eta - (1-\mu)\sin t)^2$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις μετασχηματισμού οι αποστάσεις γράφονται

$$r_1^2 = (x+\mu)^2 + y^2$$

$$r_2^2 = (x - (1-\mu))^2 + y^2$$

Το βαρυτικό δυναμικό γράφεται

$$V = -\frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$

και άρα η Λαγκρατζιανή γράφεται

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - V$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις μετασχηματισμούς, αυτή γράφεται

$$L = \frac{1}{2}((\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2) - V$$

Οι ορμές τότε υπολογίζονται διαφορίζοντας αυτή ως προς τις γενικευμένες ταχύτητες

$$(p_x, p_y) = (\partial_{\dot{x}}, \partial_{\dot{y}})L = (\dot{x} - y, \dot{y} + x)$$

Και άρα Λαγκρατζιανή γράφεται

$$L = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - V$$

Η Χαμιλτονιανή βρίσκεται από το μετασχηματισμό Legendre

$$H = \dot{x}\, p_x + \dot{y}\, p_y - L$$

Αντικαθιστώντας και προσθαφαιρόντας τη κινητική ενέργεια

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + p_x\,(\dot{x} - p_x) + (\dot{y} - p_y)p_y + V$$

Τελικά

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + p_x y - x\, p_y - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$