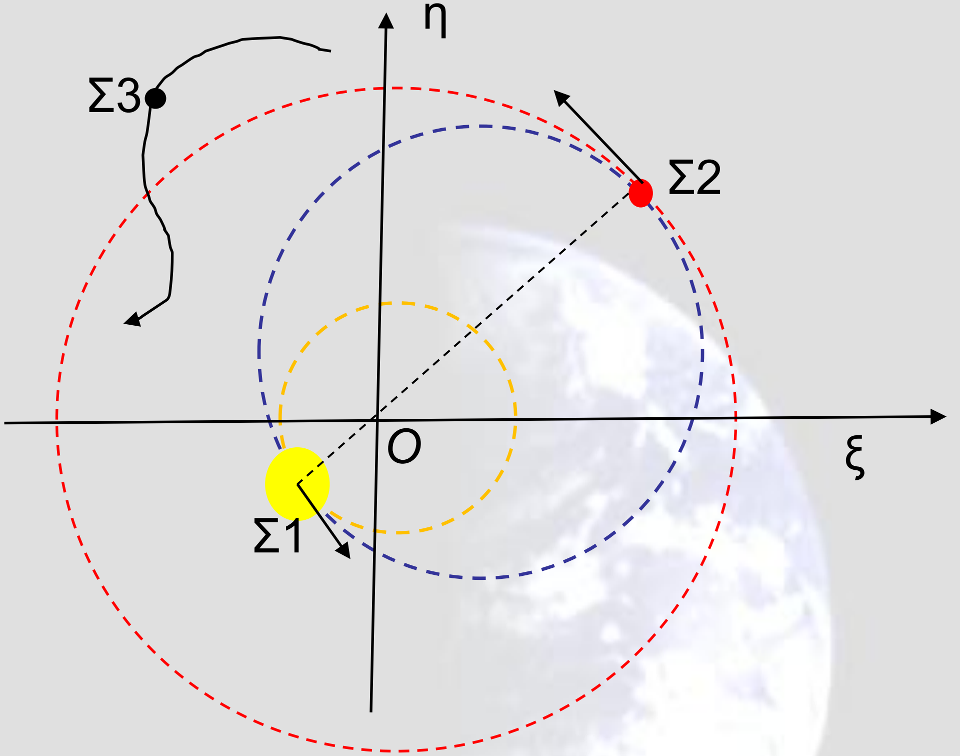
Το περιορισμένο Πρόβλημα των Τριών Σωμάτων

Οξη : Αδρανειακό σύστημα
(Ο το κέντρο μάζας των $Σ_1$ $Σ_2$)

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = -Gm_2\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -Gm_1\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}_3}{dt^2} = -Gm_1\frac{\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|^3} - Gm_2\frac{\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|^3}$$



* Το $Σ_3$ δεν επηρεάζει την κίνηση των $Σ_1$, $Σ_2$

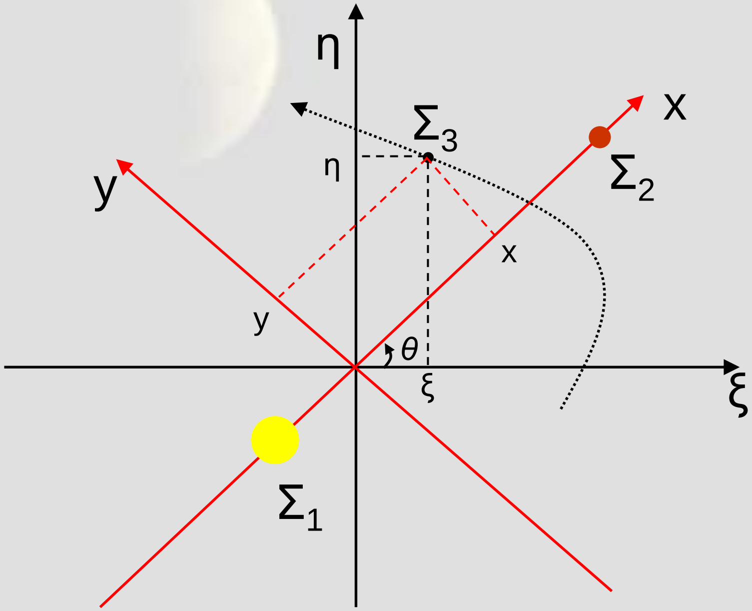
* Θεωρούμε $Σ_1$ και $Σ_2$ σε <u>κυκλική τροχιά</u> με ακτίνες R_1 και R_2, όπου $R_1/R_2=m_2/m_1$ και $d\theta/dt=\omega$, ω=σταθ. ή $\theta=\omega t+\theta_0$

Oξη : αδρανειακό σύστημα με κέντρο το κέντρο μάζας

Σχετική κυκλική τροχιά : $R=R_1+R_2$, ω

Fitzpatrick, chapter 9
Murray&Dermott, 3.1-3.11

Το περιστρεφόμενο σύστημα Oxy



$$x_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}R, \quad y_1 = 0, \quad \dot{x}_1 = 0, \quad \dot{y}_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}R, \quad y_2 = 0, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad \dot{y}_2 = 0$$

$$\dot{\theta} = \omega = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{R^3}}$$

$$\xi = \cos\omega t \cdot x - \sin\omega t \cdot y$$
$$\eta = \sin\omega t \cdot x + \cos\omega t \cdot y$$

$$\text{d/dt} \Downarrow \dot{\theta} = \omega = \sigma\tau\alpha\theta$$

$$\dot{\xi} = (\dot{x} - y\cdot\omega)\cdot\cos\omega t - (\dot{y} + x\cdot\omega)\cdot\sin\omega t$$
$$\dot{\eta} = (\dot{y} + x\cdot\omega)\cdot\cos\omega t - (y\cdot\omega - \dot{x})\cdot\sin\omega t$$

$$x = \cos\omega t \cdot \xi + \sin\omega t \cdot \eta$$
$$y = -\sin\omega t \cdot \xi + \cos\omega t \cdot \eta$$

$$\text{d/dt} \Downarrow \dot{\theta} = \omega = \sigma\tau\alpha\theta$$

$$\dot{x} = (\dot{\xi} + \eta\cdot\omega)\cdot\cos\omega t - (\xi\cdot\omega - \dot{\eta})\cdot\sin\omega t$$
$$\dot{y} = (\dot{\eta} - \xi\cdot\omega)\cdot\cos\omega t - (\dot{\xi} + \eta\cdot\omega)\cdot\sin\omega t$$

Κανονικοποίηση Μονάδων

$$\Sigma_1\Sigma_2 = R = a = 1, \quad G(m_1 + m_2) = 1$$

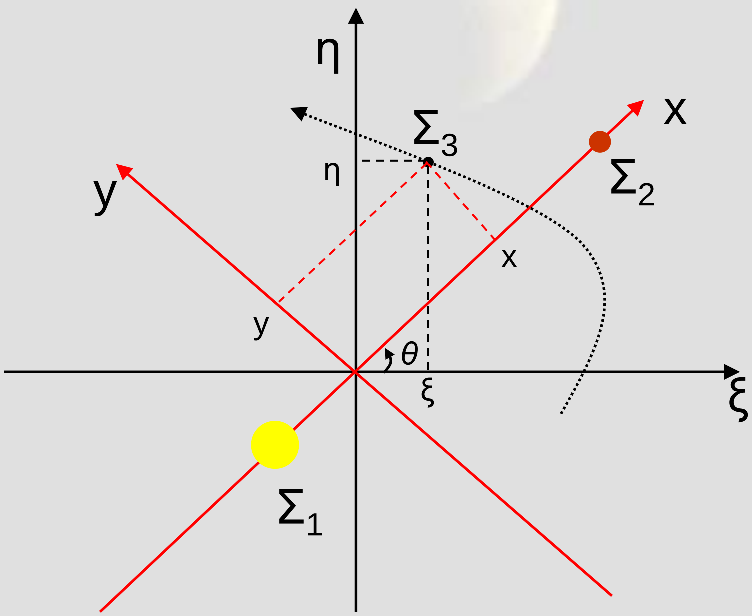
$$\Rightarrow \quad T = 2\pi, \quad \left(T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \right)$$

$$(Gm_1 = 1 - \mu, \quad Gm_2 = \mu, \quad \mu < 0.5)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \omega = 1$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = -\mu \\ x_2 = 1 - \mu \end{array}$$

Εξισώσεις Κίνησης: Από αδρανειακό στο περιστρεφόμενο



$$\ddot{\xi} = Gm_1 \frac{\xi_1 - \xi}{R_1^3} + Gm_2 \frac{\xi_2 - \xi}{R_2^3}$$

$$\ddot{\eta} = Gm_2 \frac{\eta_1 - \eta}{R_1^3} + Gm_1 \frac{\eta_2 - \eta}{R_2^3}$$

$$R_1 = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2}, \quad R_2 = \sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2}$$

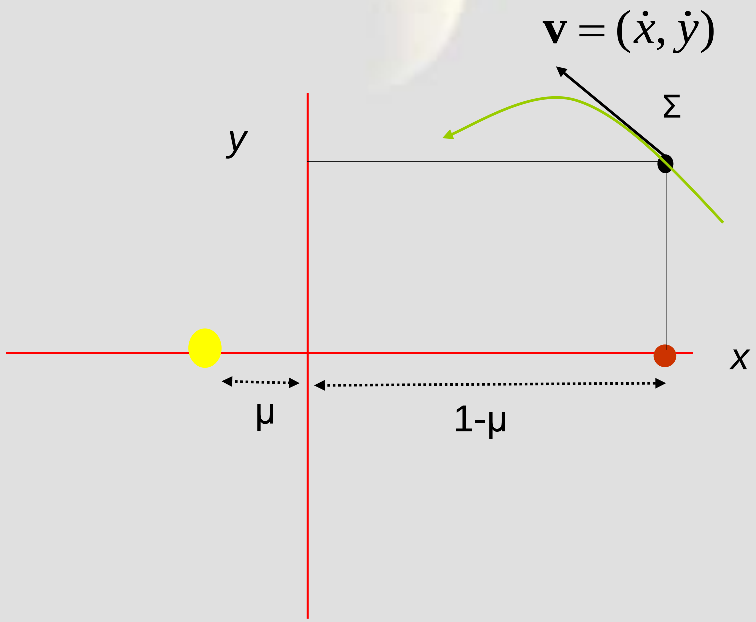
$\downarrow$

Εξισώσεις μετασχηματισμού
&
Κανονικοποίηση μονάδων

$\downarrow$

$$\boxed{\ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\left((1-\mu)\frac{x+\mu}{r_1^3} + \mu \frac{x-1+\mu}{r_2^3} \right), \qquad \ddot{y} + 2\dot{x} - y = -y\left((1-\mu)\frac{1}{r_1^3} + \mu \frac{1}{r_2^3} \right)}$$

Εξισώσεις Κίνησης στο περιστρεφόμενο Σύστημα



$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - \left((1-\mu)\frac{x+\mu}{r_1^3} + \mu \frac{x-1+\mu}{r_2^3} \right),$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - y\left((1-\mu)\frac{1}{r_1^3} + \mu \frac{1}{r_2^3} \right)$$

$$r_1 = R_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}, \quad r_2 = R_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2},$$

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\ddot{y} + 2\cdot\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

run_rtbp0.nb

$$U = \frac{\left(x^2 + y^2\right)}{2} + \frac{1\text{-}\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

Συνάρτηση Δυναμικού

Το ολοκλήρωμα Jacobi

$$\ddot{x} - 2\cdot\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\ddot{y} + 2\cdot\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

,

$$U = \frac{\left(x^2+y^2\right)}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

$$\Downarrow$$

$$h = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)}_{T} \underbrace{-\left(\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}\right)-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}_{(-U)}$$

<u>ολοκλήρωμα της ενέργειας</u>

h = T + (-U)

$$\boxed{C = -2h \quad \text{Jacobi integral}}$$

Χαμιλτονιανή περιγραφή

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2) + p_x y - x p_y - \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad \equiv h$$

$$p_x = \dot{x} - y, \quad p_y = \dot{y} + x$$

(γενικευμένες ορμές)

Σημεία ισορροπίας (σημεία Lagrange)

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

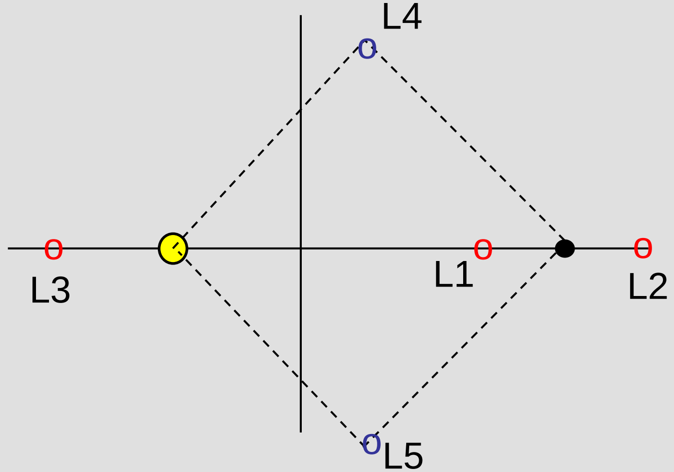
$$x - \left((1-\mu)\frac{x+\mu}{r_1^3} + \mu\frac{x-1+\mu}{r_2^3} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\ddot{y} + 2\cdot\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

$$y\left[1-(1-\mu)\frac{1}{r_1^3} - \mu\frac{1}{r_2^3}\right] = 0 \qquad (2)$$

$$U = \frac{\left(x^2+y^2\right)}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2+y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2+y^2},$$



L4, L5 $\quad x = \frac{1}{2} - \mu, \quad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

L1, L2, L3 : $y=0$, $x=\mathrm{x}(\mu)$ root of

$$x-(1-\mu)\frac{x+\mu}{|x+\mu|^3} - \mu\frac{x-1+\mu}{|x-1+\mu|^3} = 0$$

eqp1.nb

Γραμμική Ευστάθεια σημείων Lagrange

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad \xrightarrow{\mathbf{X}'=\mathbf{X}+\xi,|\xi|<<1} \quad \dot{\xi} = \mathbf{A}(\mathbf{X})\xi, \qquad \mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}\right)$$ Γραμμικοποιημένες εξισώσεις

$$\mathbf{A}_L = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}\right)_{(\mathbf{X}=\text{LagrangePoint } L)}$$

Ευστάθεια αν για όλα τα λ (ιδιοτιμές του A_L) είναι Re(λ)<=0
αλλιώς το σημείο είναι ασταθές.

Αφού το σύστημα είναι Χαμιλτονιανό, ευστάθεια προκύπτει αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές είναι καθαρά φανταστικές

$$\dot{x} = v_x$$

$$\dot{y} = v_y$$

$$(\ddot{x} =)\ \dot{v}_x = 2v_y + \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$(\ddot{y} =)\ \dot{v}_y = -2v_x + \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & 0 & 2 \\ U_{xy} & U_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ευστάθεια
L_1, L_2, L_3 : Ασταθή
L_4, L_5 : Ευσταθή για μ<0.0385

eqp1.nb

approximate solutions for Lagrangian points ,
valid for μ<<1

$$
\begin{array}{llll}
L_{4,5}: & x = 1/2 - \mu \;,\; y = \pm\sqrt{3}/2 & ; & C_{4,5} = 3 - \mu \\
L_1: & x = 1 - \mu - \alpha + \alpha^2/3 & ; & C_1 = 3 + 3^{4/3}\mu^{2/3} - 10\mu/3 \\
L_2: & x = 1 - \mu + \alpha + \alpha^2/3 & ; & C_2 = 3 + 3^{4/3}\mu^{2/3} - 14\mu/3 \\
L_3: & x = -1 - \mu + \frac{7\mu}{12(1-\mu)} & ; & C_3 = 3 + \mu
\end{array}
$$

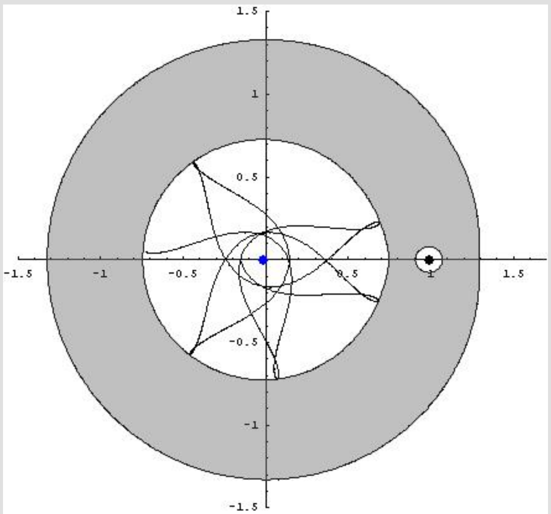
$$a = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} \qquad \text{(Hill radius)}$$

Καμπύλες Μηδενικής Ταχύτητας – Επιτρεπτές περιοχές κίνησης

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=h+\left(\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\geq 0$$

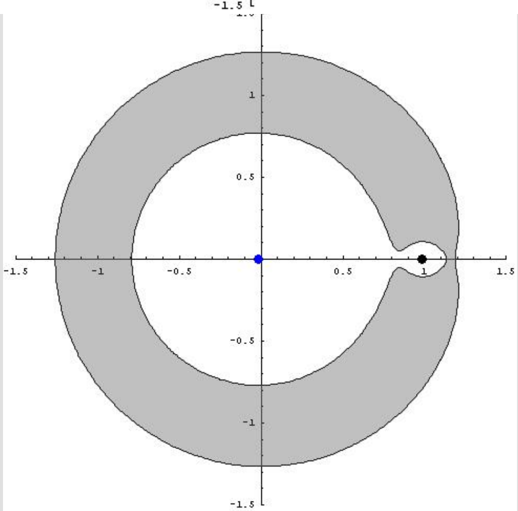
Παράδειγμα Γη – Σελήνη
μ=0.0123

rtbp_zvc.nb



$$h=-1.63343$$

Δεν υπάρχει η δυνατότητα μετάβασης από τη Γη στη Σελήνη ή το αντίστροφο



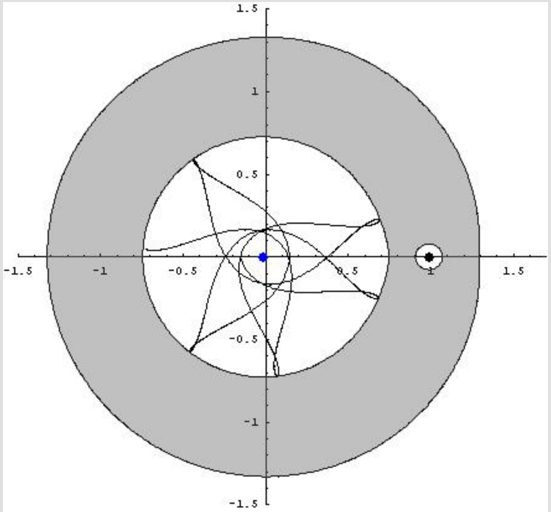
$$h=-1.589$$

Οι χαμηλότερες ενέργειες για τις οποίες μπορεί να συμβεί μετάβαση

Καμπύλες Μηδενικής Ταχύτητας – Επιτρεπτές περιοχές κίνησης

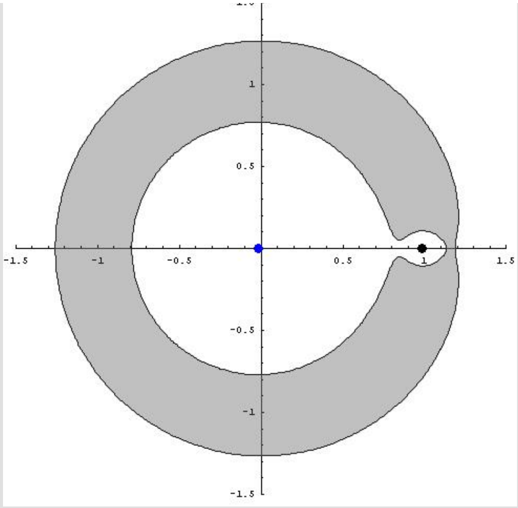
Παράδειγμα Γη – Σελήνη
μ=0.0123

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=h+\left(\frac{1\text{-}\mu}{R_1}+\frac{\mu}{R_2}\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\geq 0$$



$$h=-1.63343$$

Δεν υπάρχει η δυνατότητα μετάβασης από τη Γη στη Σελήνη ή το αντίστροφο



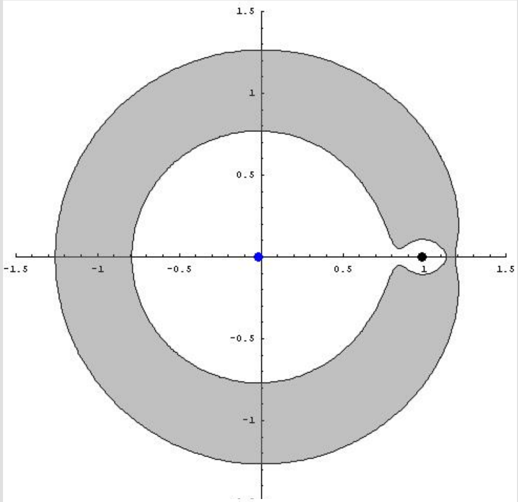
$$h=-1.589$$

Οι χαμηλότερες ενέργειες για τις οποίες μπορεί να συμβεί μετάβαση

Καμπύλες Μηδενικής Ταχύτητας – Επιτρεπτές περιοχές κίνησης

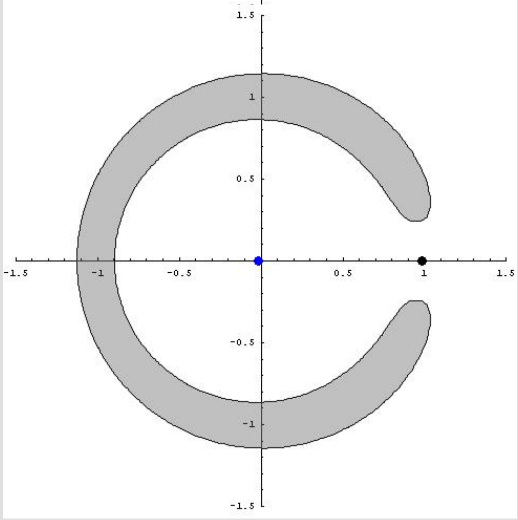
Παράδειγμα Γη – Σελήνη
μ=0.0123

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=h+\left(\frac{1-\mu}{R_1}+\frac{\mu}{R_2}\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\geq 0$$



$$C_J=-1.589$$

Οι χαμηλότερες ενέργειες για τις οποίες μπορεί να συμβεί μετάβαση



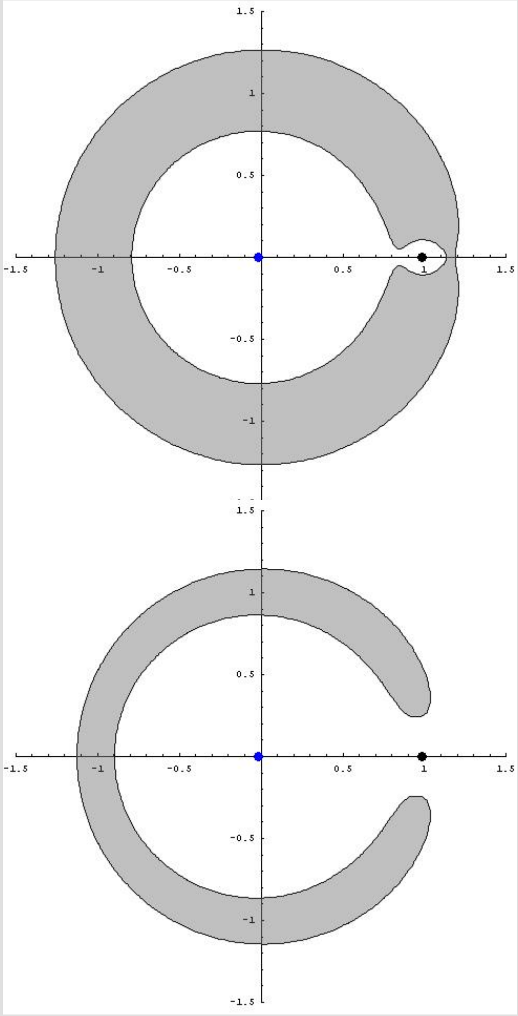
$$h=-1.526$$

Το σώμα μπορεί να διαφύγει από το σύστημα Γη – Σελήνη από την πλευρά της Σελήνης

Καμπύλες Μηδενικής Ταχύτητας – Επιτρεπτές περιοχές κίνησης

Παράδειγμα Γη – Σελήνη
μ=0.0123

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=h+\left(\frac{1\text{-}\mu}{R_1}+\frac{\mu}{R_2}\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\geq 0$$



$$h=-1.589$$

Οι χαμηλότερες ενέργειες για τις οποίες μπορεί να συμβεί μετάβαση

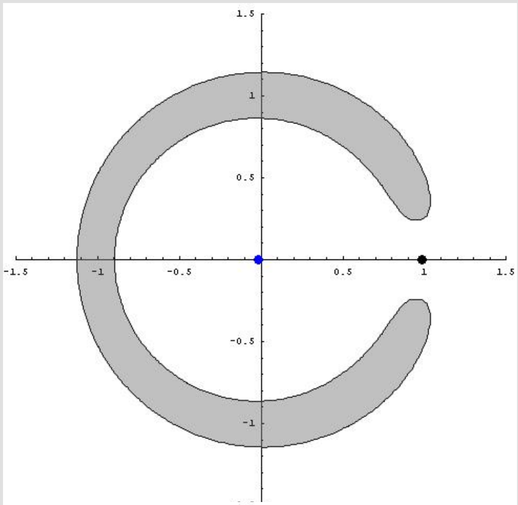
$$h=-1.526$$

Το σώμα μπορεί να διαφύγει από το σύστημα Γη – Σελήνη από την πλευρά της Σελήνης

Καμπύλες Μηδενικής Ταχύτητας – Επιτρεπτές περιοχές κίνησης

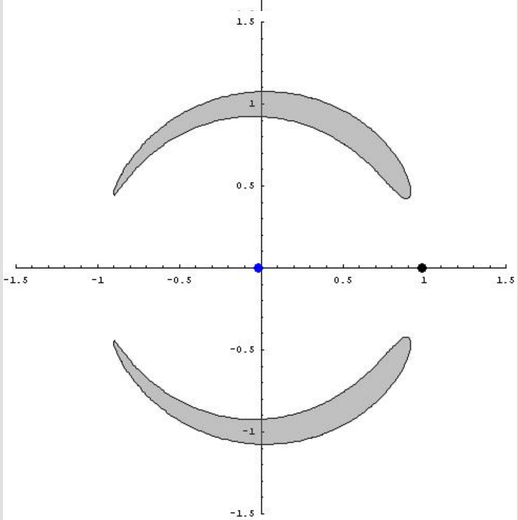
Παράδειγμα Γη – Σελήνη
μ=0.0123

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=h+\left(\frac{1\text{-}\mu}{R_1}+\frac{\mu}{R_2}\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\geq 0$$



$$h=-1.526$$

Το σώμα μπορεί να διαφύγει από το σύστημα Γη – Σελήνη από την πλευρά της Σελήνης



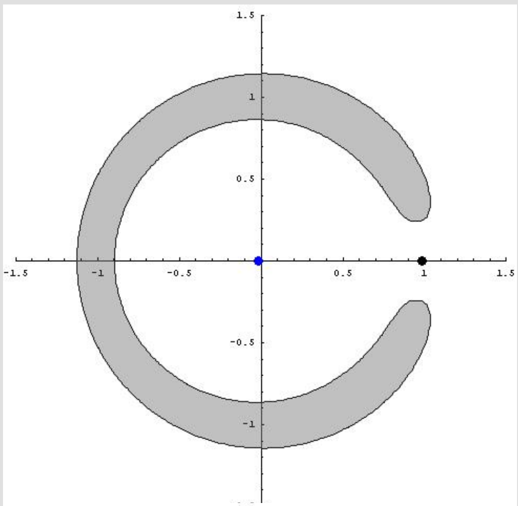
$$h=-1.505$$

Το σώμα μπορεί να διαφύγει από το σύστημα Γη – Σελήνη και από την πλευρά της Γης

Καμπύλες Μηδενικής Ταχύτητας – Επιτρεπτές περιοχές κίνησης

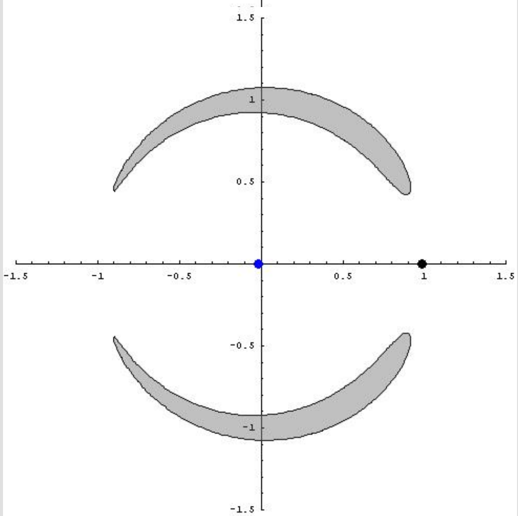
Παράδειγμα Γη – Σελήνη
μ=0.0123

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=h+\left(\frac{1\text{-}\mu}{R_1}+\frac{\mu}{R_2}\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\geq 0$$



$$h=-1.526$$

Το σώμα μπορεί να διαφύγει από το σύστημα Γη – Σελήνη από την πλευρά της Σελήνης



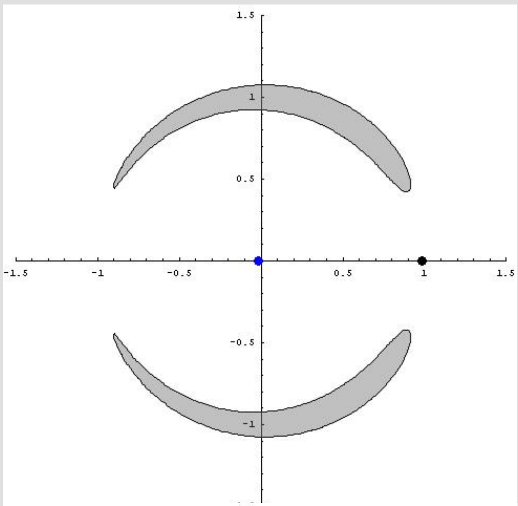
$$h=-1.505$$

Το σώμα μπορεί να διαφύγει από το σύστημα Γη – Σελήνη και από την πλευρά της Γης

Καμπύλες Μηδενικής Ταχύτητας – Επιτρεπτές περιοχές κίνησης

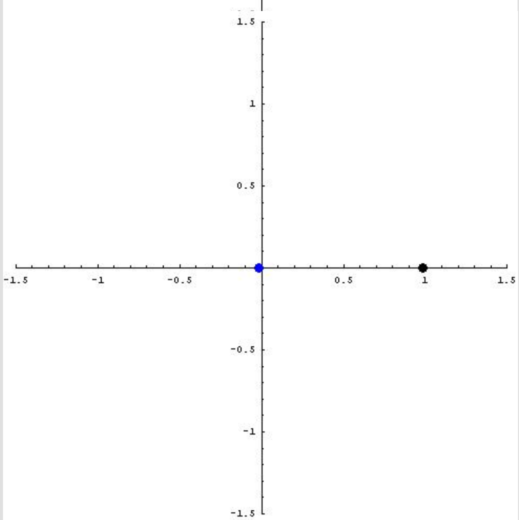
Παράδειγμα Γη – Σελήνη
μ=0.0123

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=h+\left(\frac{1\text{-}\mu}{R_1}+\frac{\mu}{R_2}\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\geq 0$$



$$h=-1.505$$

Το σώμα μπορεί να διαφύγει από το σύστημα Γη – Σελήνη και από την πλευρά της Γης

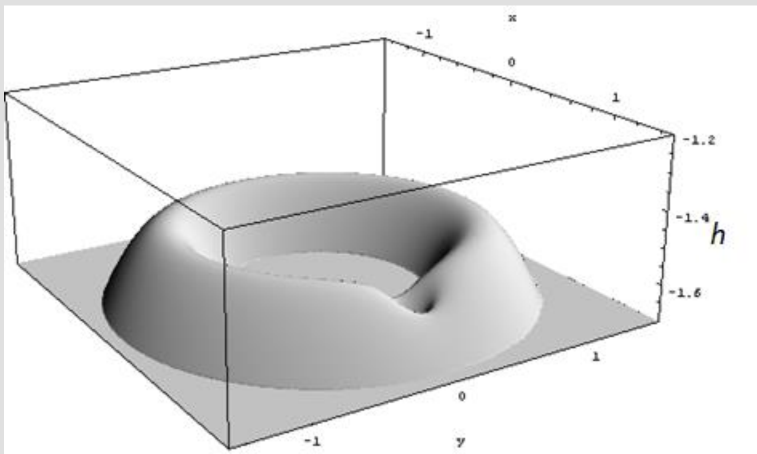


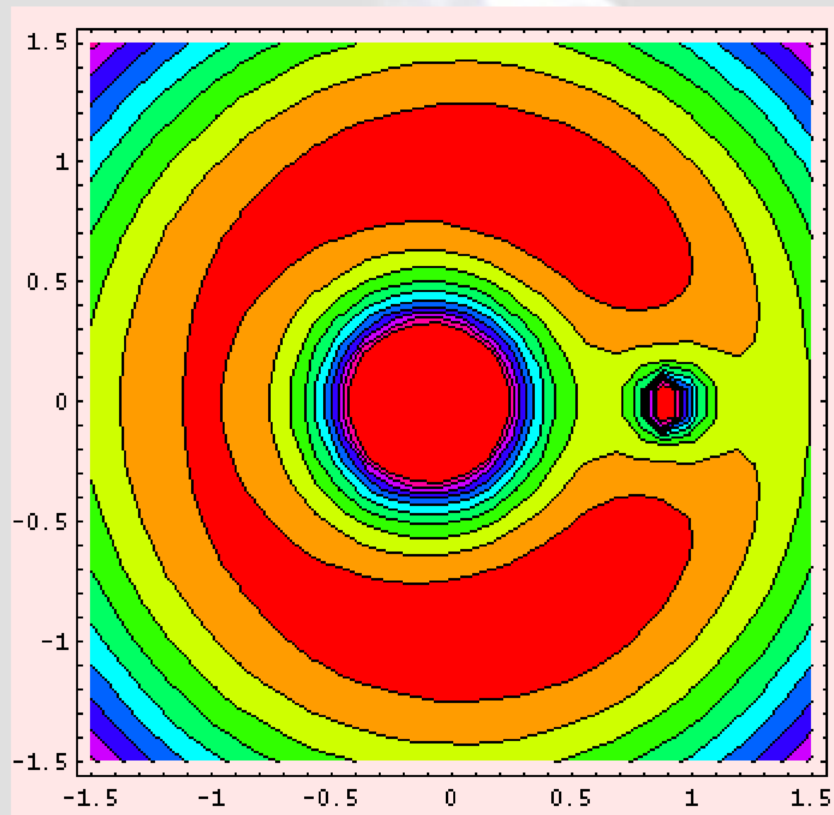
$$h\geq\text{-}1.494$$

Το σώμα μπορεί να κινείται οπουδήποτε στο χώρο

Ισοδυναμικές Καμπύλες Μηδενικής Ταχύτητας

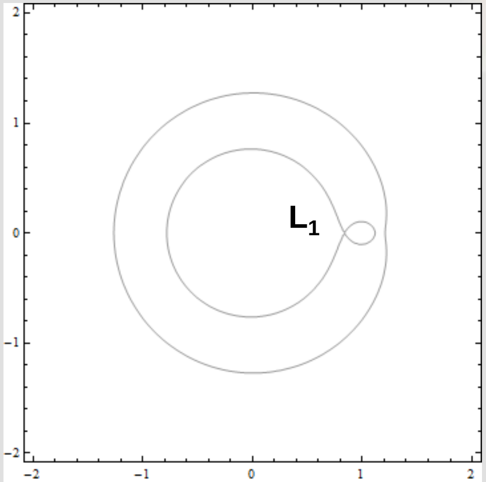
$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=h+\left(\frac{1-\mu}{R_1}+\frac{\mu}{R_2}\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)=0$$

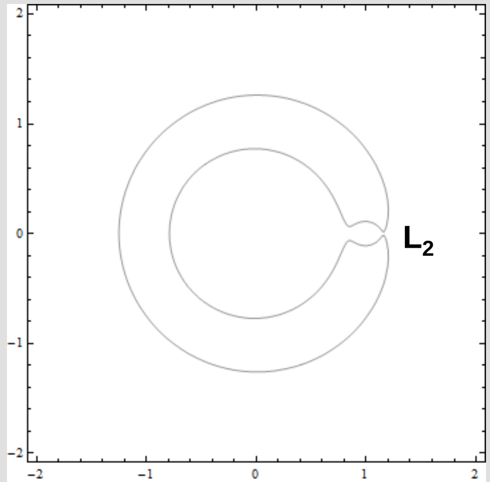


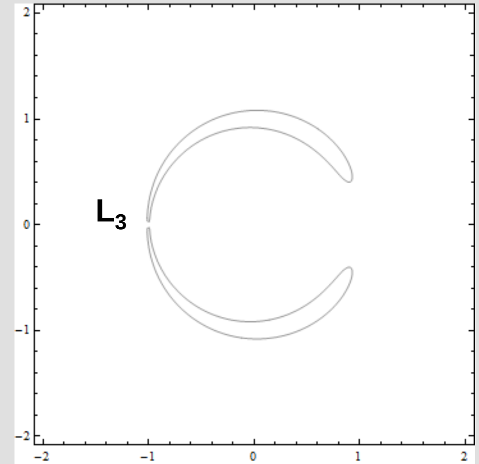


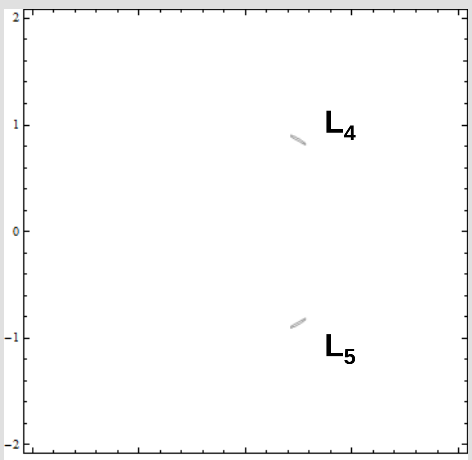
Σημεία Ισορροπίας & ZVC

Στα Σ.Ι. ανοίγουν οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας





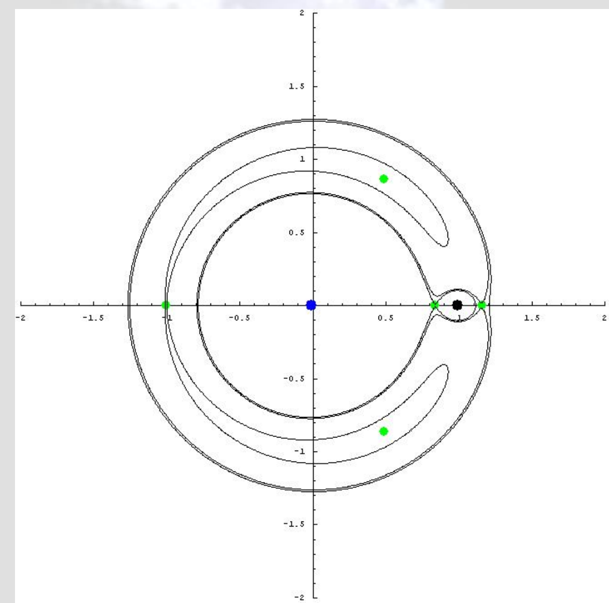




Για το σύστημα Γη - Σελήνη

- L1 $h =$ -1.594775
- L2 $h =$ -1.586575
- L3 $h =$ -1.506395
- L4 $h =$ -1.49385
- L5 $h =$ -1.49385

*approximate values



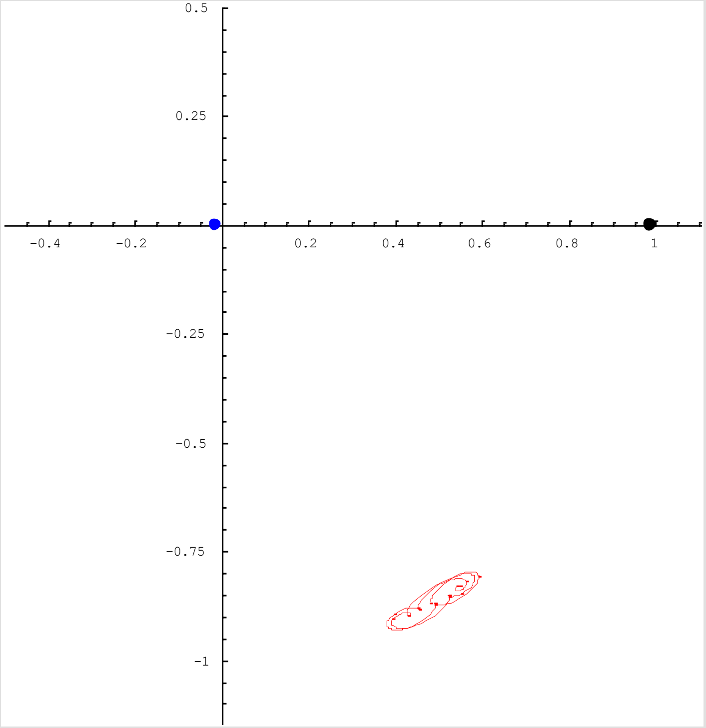
Σημεία Ισορροπίας

Παράδειγμα Γη – Σελήνη
μ=0.0123

Ευστάθεια

Ευσταθή Σ.Ι (L4, L5)

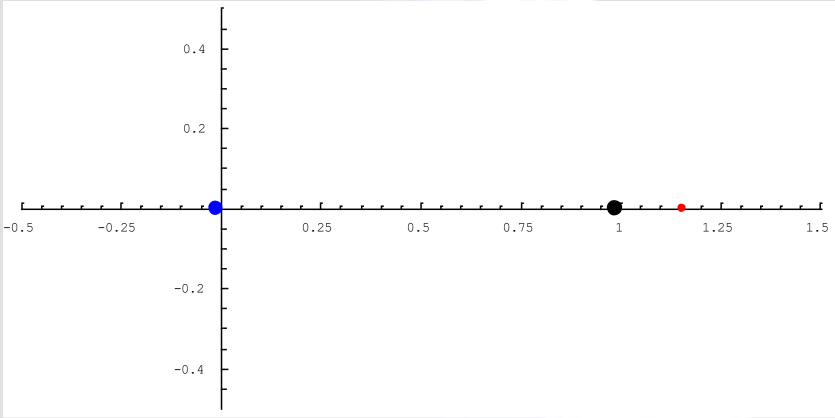
Με αρχικές συνθήκες 3017 km από το L4



217 ημέρες μετά

Ασταθή Σ.Ι (L1, L2, L3)

Με αρχικές συνθήκες 8.34 m από το L2



26 ημέρες μετά

Ευστάθεια

L_1, L_2, L_3 : Ασταθή

L_4, L_5 : Ευσταθή (για μ<μ*)

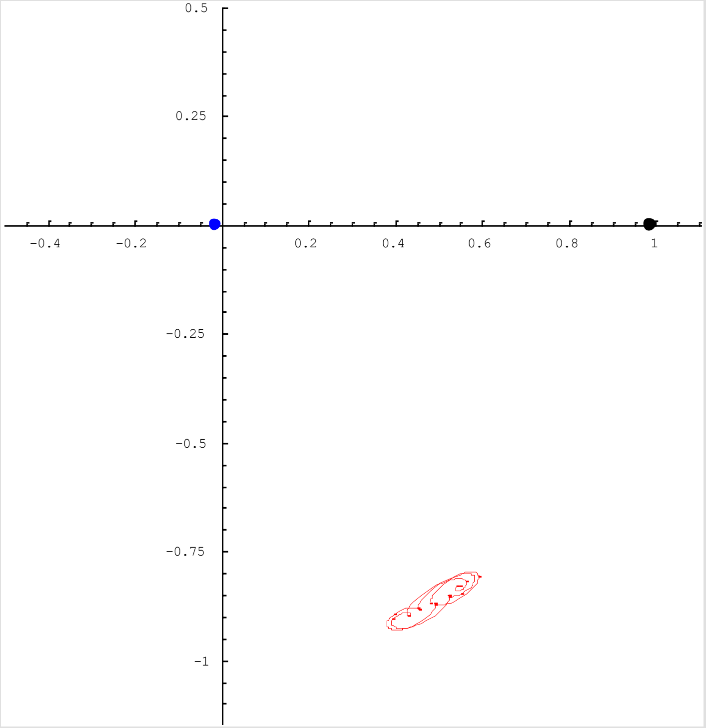
Σημεία Ισορροπίας

Παράδειγμα Γη – Σελήνη
μ=0.0123

Ευστάθεια

Ευσταθή Σ.Ι (L4, L5)

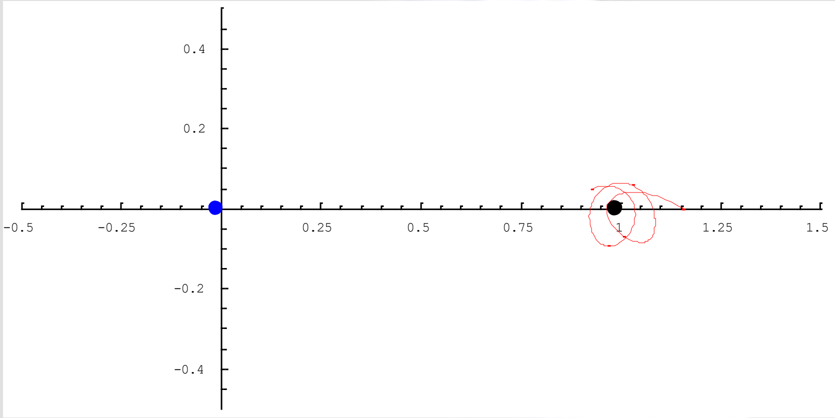
Με αρχικές συνθήκες 3017 km από το L4



217 ημέρες μετά

Ασταθή Σ.Ι (L1, L2, L3)

Με αρχικές συνθήκες 8.34 m από το L2



43 ημέρες μετά

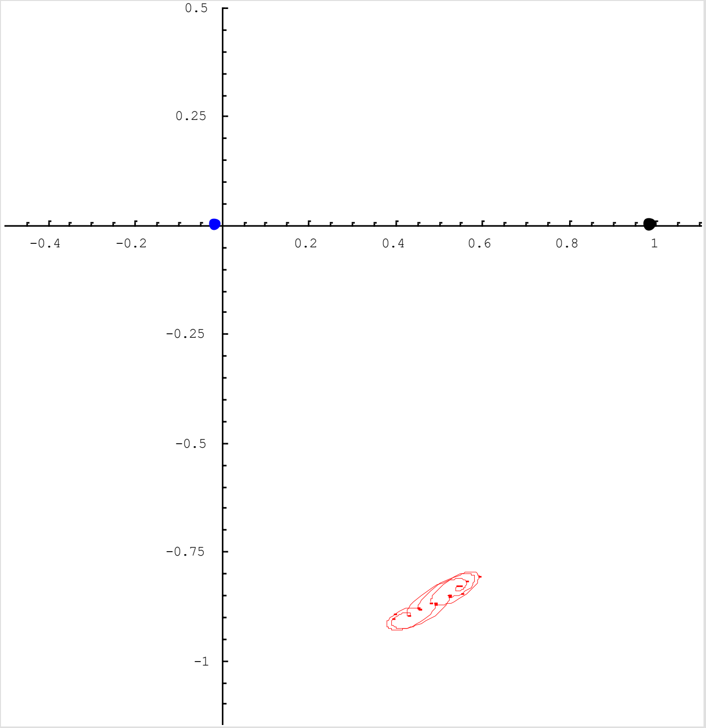
Ευστάθεια
L_1, L_2, L_3 : Ασταθή
L_4, L_5 : Ευσταθή (για $\mu<\mu^*$)

Σημεία Ισορροπίας

Ευστάθεια

Ευσταθή Σ.Ι (L4, L5)

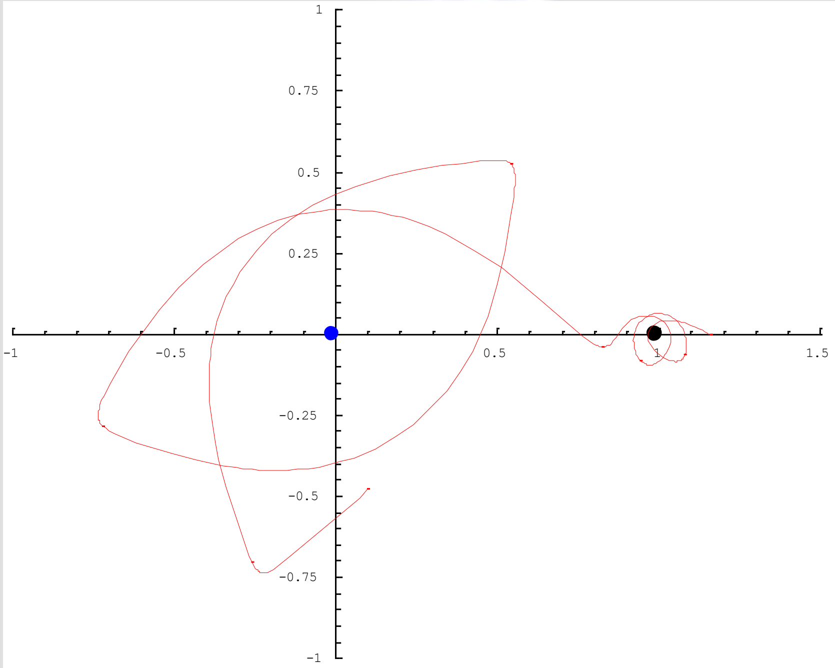
Με αρχικές συνθήκες 3017 km από το L4



217 ημέρες μετά

Ασταθή Σ.Ι (L1, L2, L3)

Με αρχικές συνθήκες 8.34 m από το L2



87 ημέρες μετά

Η Τομή Poincare

Κατασκευάζεται ως εξής:

- Τα $x, \dot{x}$ προσδιορίζονται σαν συντεταγμένες της 2D- επιφάνειας τομής
- Οι τροχιές που απεικονίζονται σε μία τομή αντιστοιχούν σε *h*=σταθ.
- Θεωρώντας επίσης *y*=0 θα είναι:

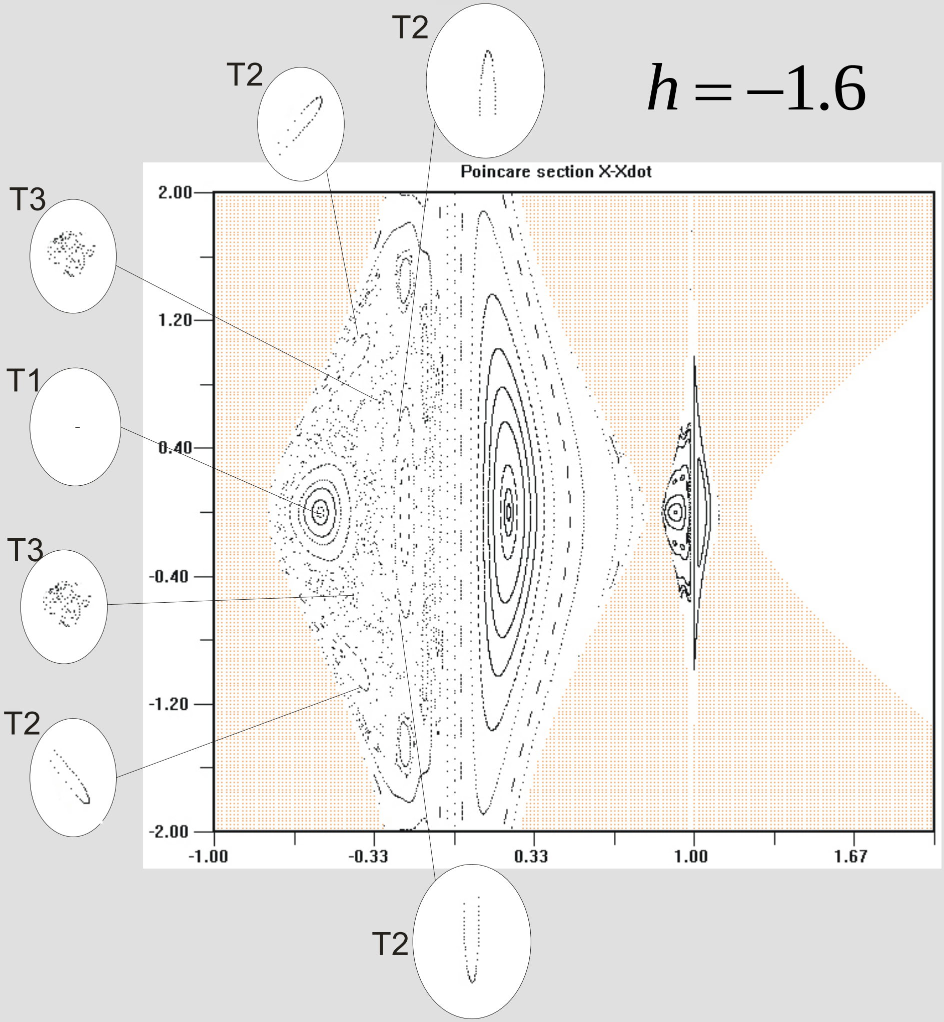
$$\dot{y} = \pm\sqrt{2h + 2\cdot\left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right) + x^2 - \dot{x}^2}$$

επιλέγοντας π.χ $\dot{y} < 0$ το σύστημα προσδιορίζεται πλήρως

Η Τομή Poincare

Ποιοτική κατηγοριοποίηση Τροχιών

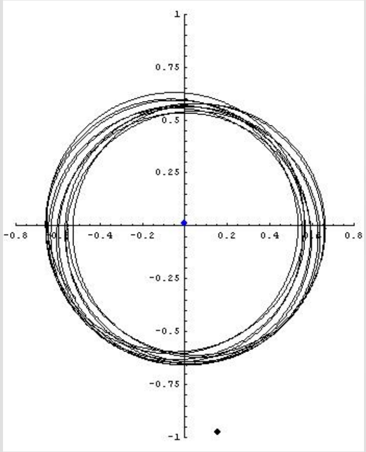
$$h = -1.6$$



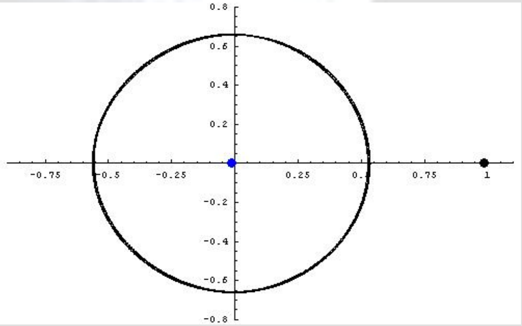
<u>Περιοδικές Τροχιές</u>

απεικονίζονται με πεπερασμένο αριθμό σημείων (T1)

αδρανειακό

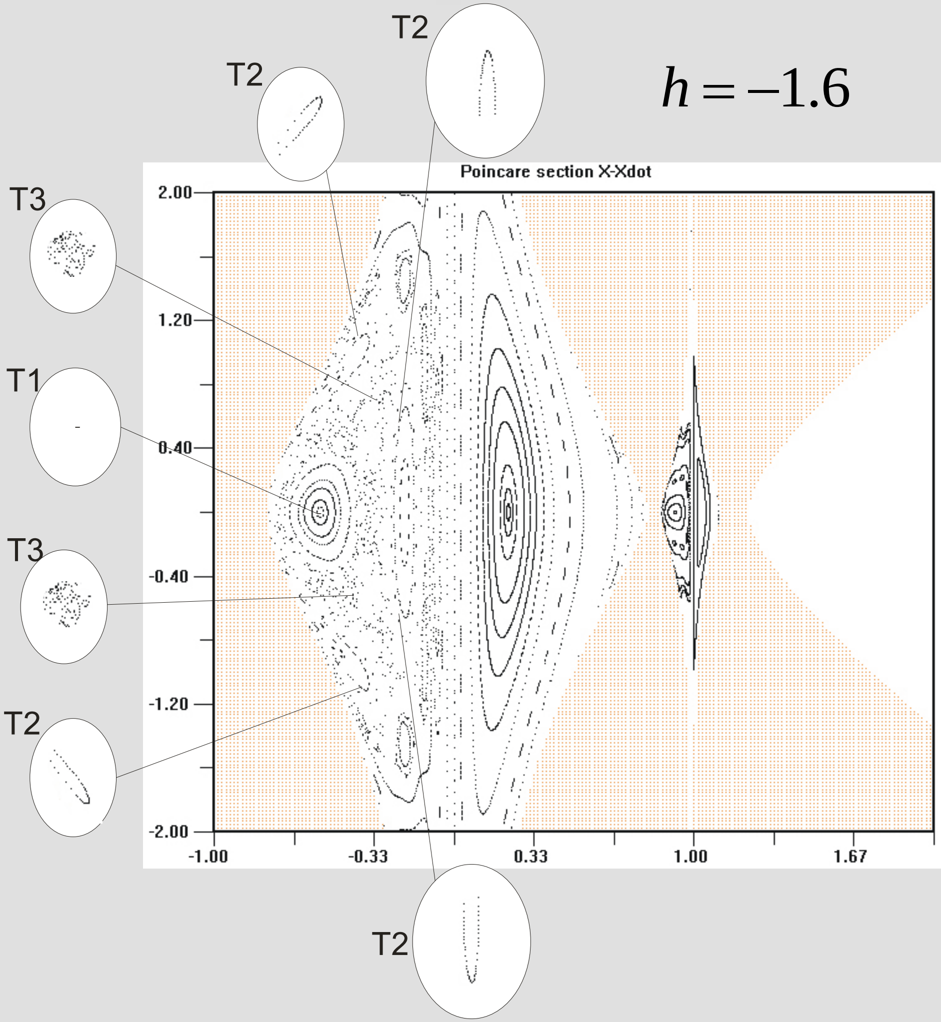


περιστρεφόμενο



Η Τομή Poincare

Ποιοτική κατηγοριοποίηση Τροχιών

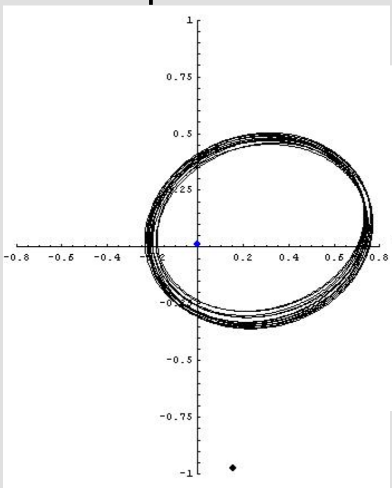


$h = -1.6$

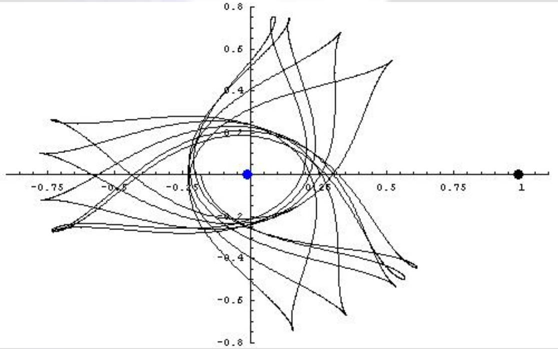
<u>Ημιπεριοδικές Τροχιές</u>

απεικονίζονται με άπειρα σημεία τα οποία για $t \to \infty$ σχηματίζουν κλειστή καμπύλη (T2)

αδρανειακό



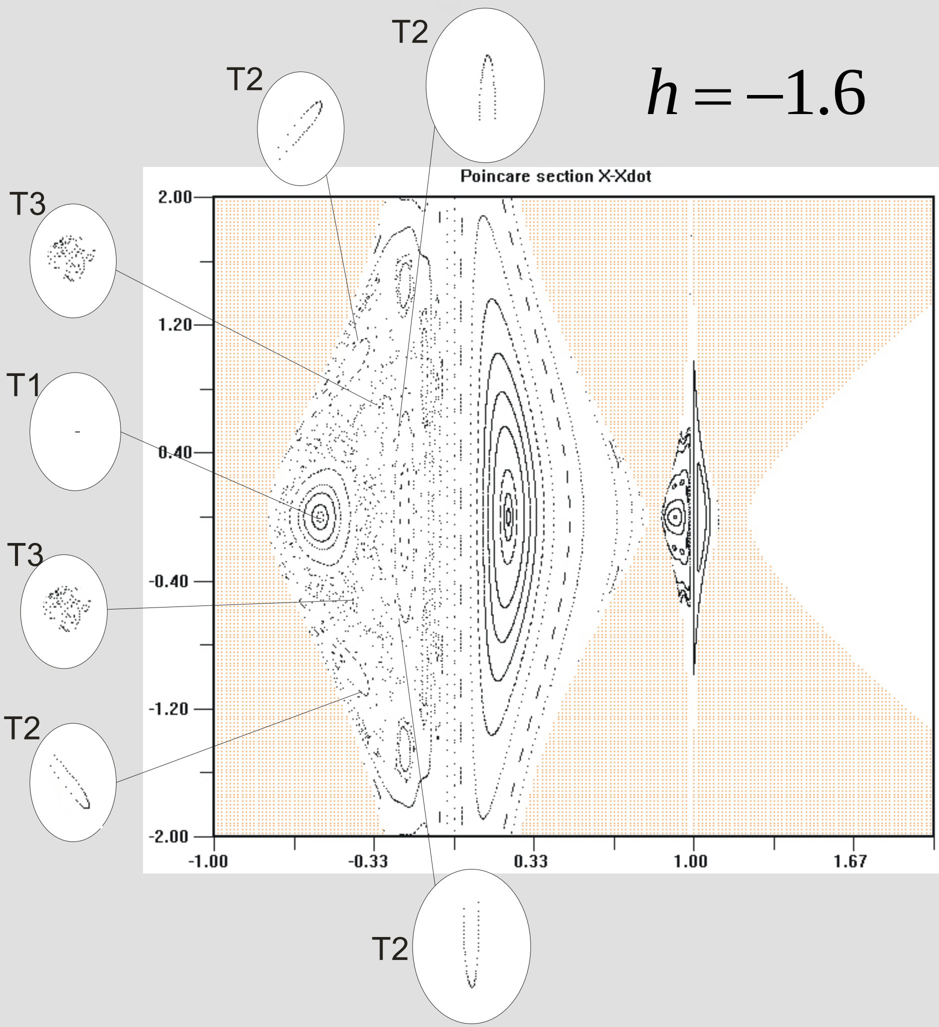
περιστρεφόμενο



Η Τομή Poincare

Ποιοτική κατηγοριοποίηση Τροχιών

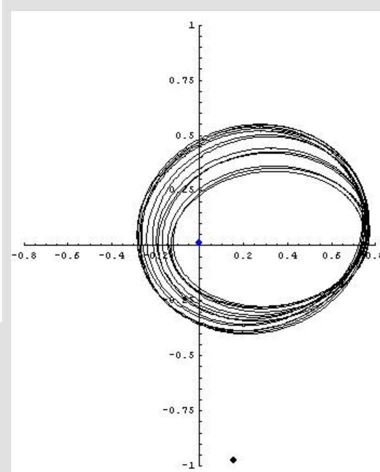
$$h = -1.6$$



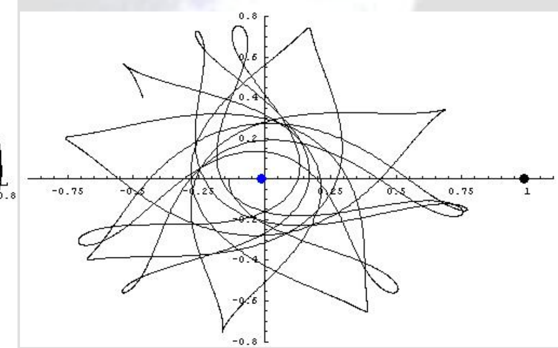
<u>Χαοτικές Τροχιές</u>

απεικονίζονται με άτακτα διασκορπισμένα σημεία (T3)

αδρανειακό

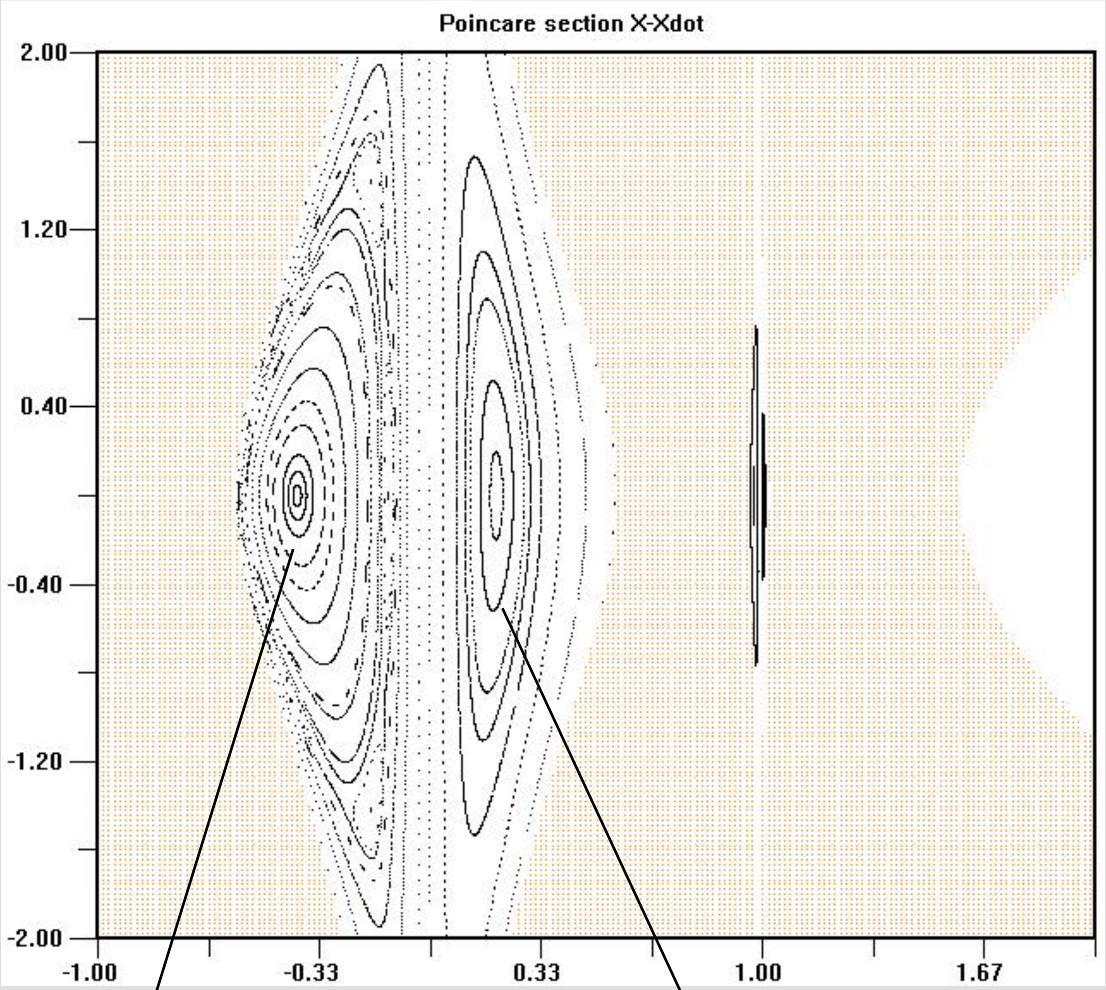


περιστρεφόμενο



Οι Τομές Poincare στο σύστημα Γη - Σελήνη

$h = -1.9$



“direct” τροχιές

“retrograte” τροχιές

<u>Χαρακτηριστικά</u>

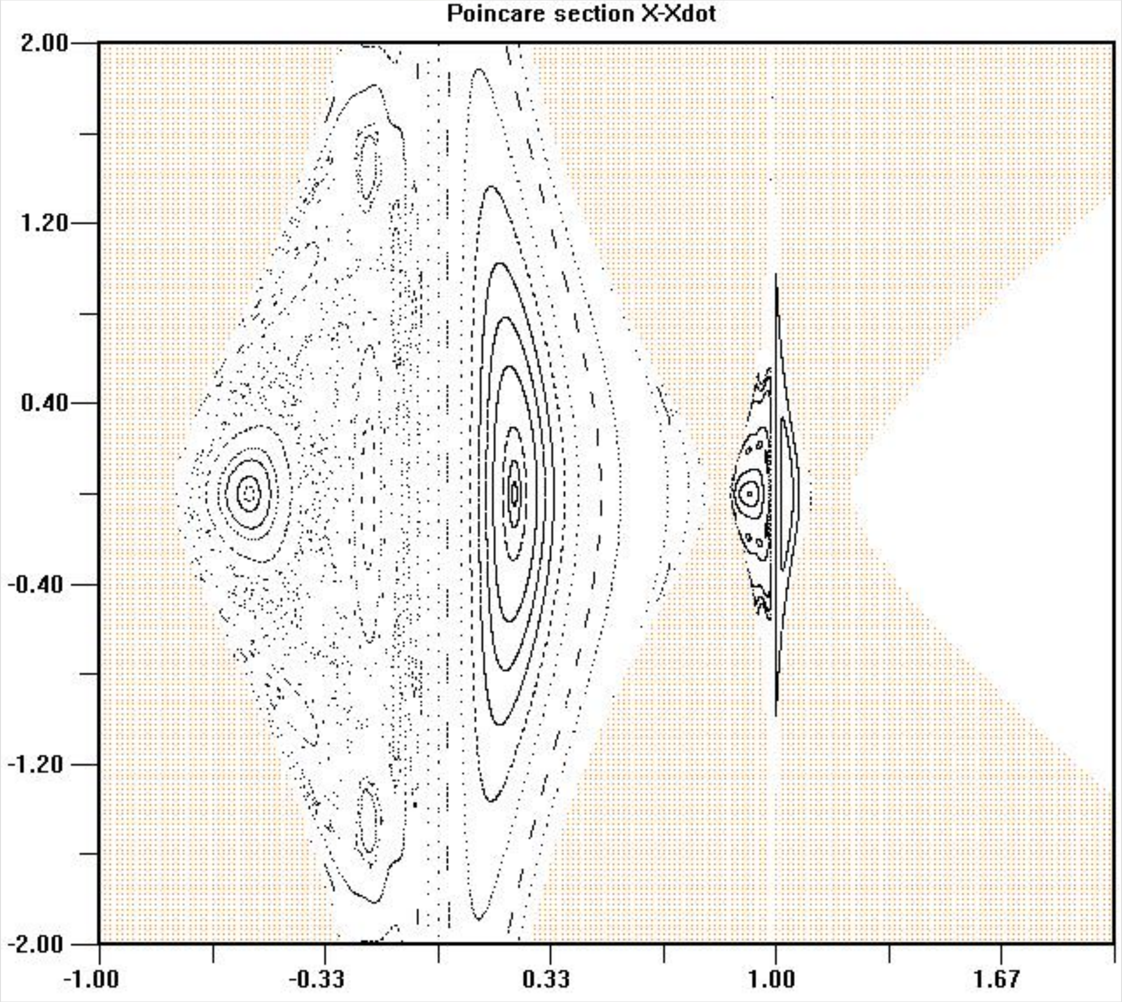
• Αντιπροσωπευτική χαμηλών ενεργειών

• Αδυναμία μετάβασης από τη Γη στη Σελήνη

• Απουσία <u>σημαντικών</u> χαοτικών περιοχών

Οι Τομές Poincare στο σύστημα Γη - Σελήνη

$h = -1.6$



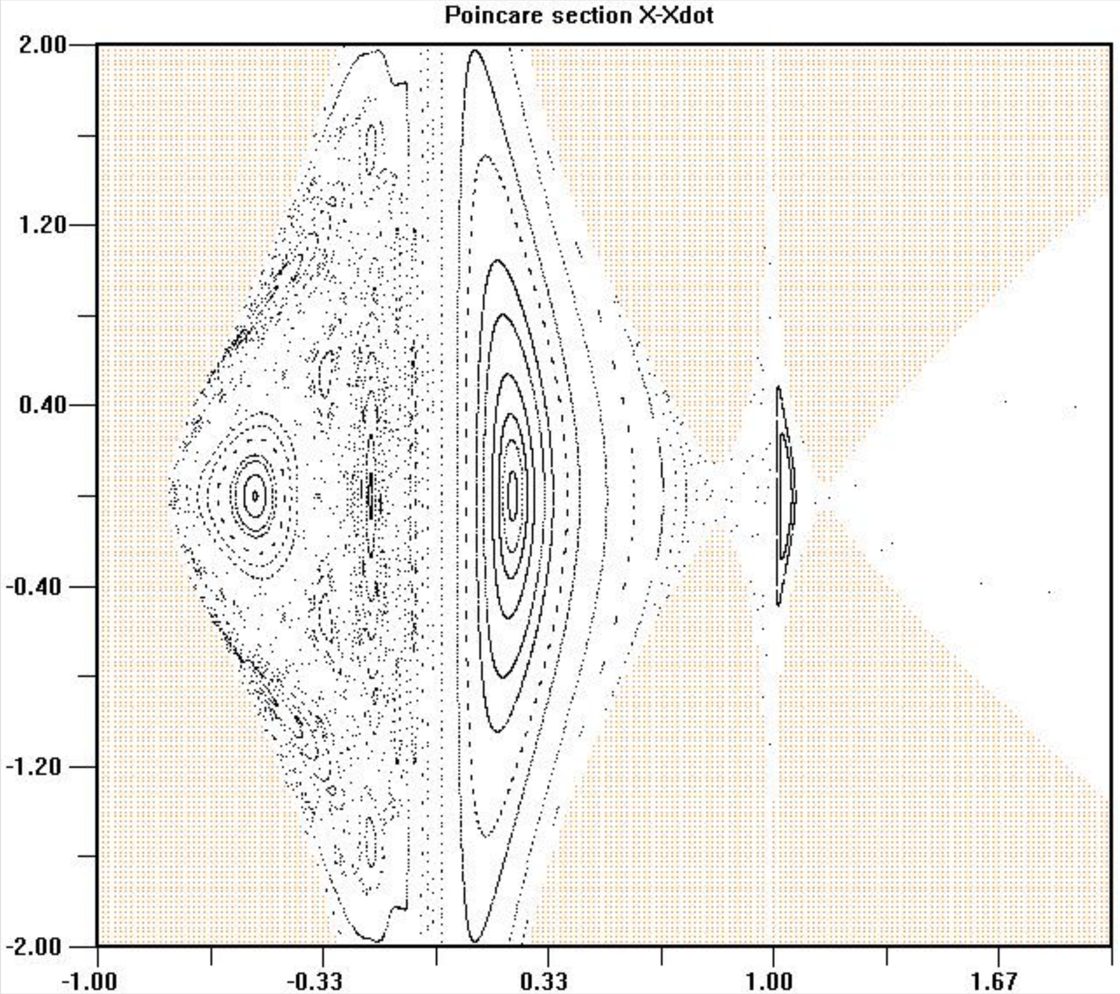
Χαρακτηριστικά

- Εμφάνιση πολλών χαοτικών τροχιών στις direct τροχιές γύρω από τη Γη

- Η περιοχή των direct τροχιών της Σελήνης παρουσιάζει αρκετές νησίδες

Οι Τομές Poincare στο σύστημα Γη - Σελήνη

$h = -1.585$

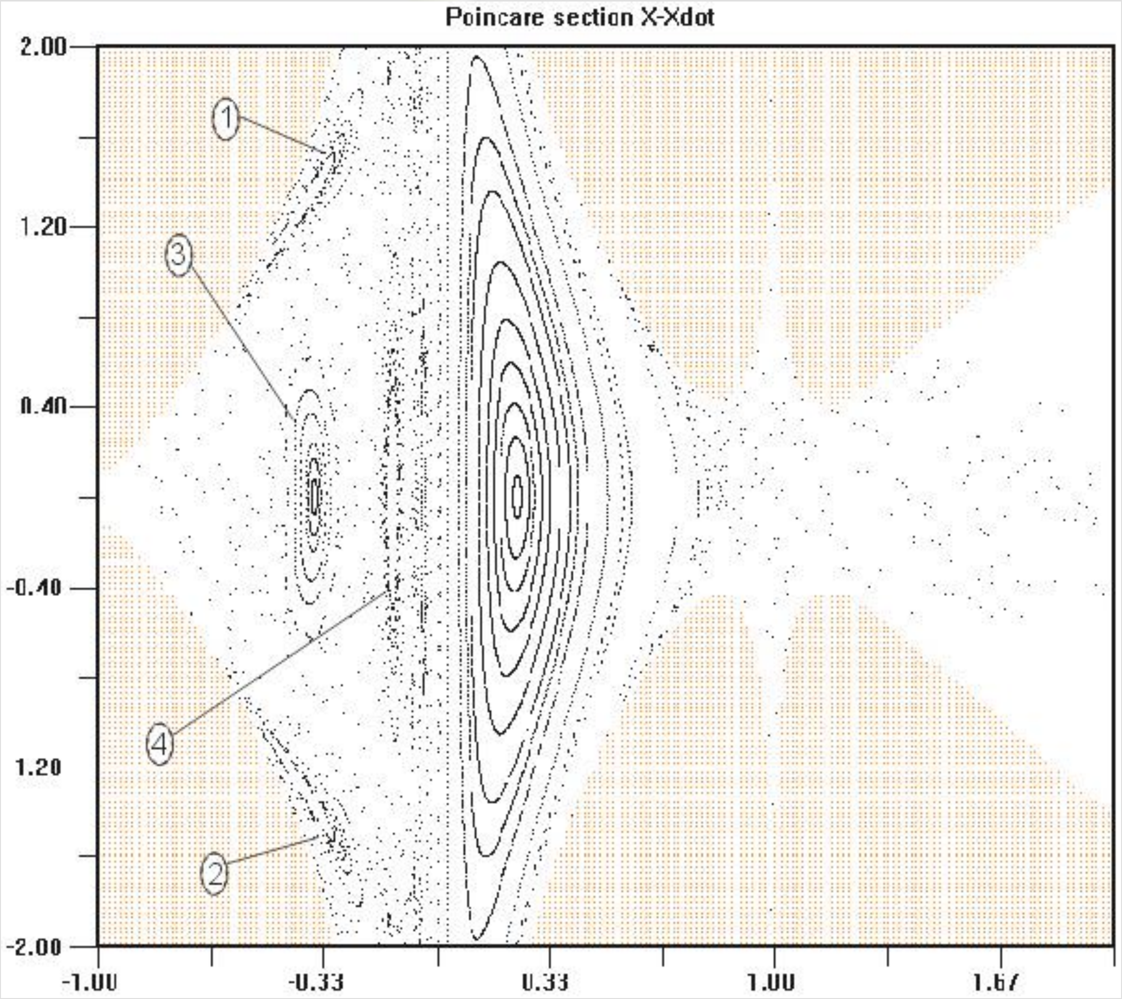


Χαρακτηριστικά

- Ανοίγουν οι ισοδυναμικές καμπύλες στο L2
- Μικρές αλλαγές στην περιοχή δεξιά της Σελήνης

Οι Τομές Poincare στο σύστημα Γη - Σελήνη

$h = -1.5$



<u>Χαρακτηριστικά</u>

- Ανοίγουν οι ισοδυναμικές καμπύλες στο L3

- Οι αναλλοίωτοι κύκλοι στην Σελήνη έχουν ανοίξει

- Έντονη η παρουσία του χάους αριστερά της Γης

- Παραμένουν περιοδικές κ ημιπεριοδικές στις περιοχές

1,2,4 κ 3

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τη θέση των σημείων L_i, i=1..5 στο σύστημα Ηλιος – Δίας (μ=0.001). Επιλέξτε για κάθε σημείο μια αρχική συνθήκη «κοντά» σε αυτό και σχεδιάστε την τροχιά για κατάλληλο χρονικό διάστημα (διαφεύγουν στο άπειρο;) τόσο στο περιστρεφόμενο όσο και στο αδρανειακό σύστημα

2. Υπολογίστε τη θέση (x_0,y_0) του σημείου L_4 στο σύστημα Ηλιος – Δίας (μ=0.001). Ολοκληρώστε τις εξισώσεις του RTBP για το μικρό σώμα αριθμητικά για t=200 t.u. και σχεδιάστε τις τροχιές στο περιστρεφόμενο σύστημα για τις παρακάτω αρχικές συνθήκες
a) $x(0)=x_0+0.0065$, $y(0)=y_0$, (dx/dt)(0)=0, dy/dt(0)=0 (tadpole orbit)
b) x(0)=-0.97668, y(0)=0, (dx/dt)(0)=0, (dy/dt)(0)=-0.06118 (horseshoe orbit)
Σε τι τιμή ενέργειας (h) αντιστοιχούν οι παραπάνω τροχιές.
Για τις παραπάνω τροχιές, αυξήστε την τιμή της αρχικής συνθήκης (dy/dt). Για ποια τιμή της δεν παρατηρούμε πλέον τροχιές της μορφής tadpole ή horseshoe (σχεδιάστε αυτές τις τροχιές για κατάλληλο χρόνο ολοκλήρωσης).

3. Στο σύστημα Ηλιος – Δίας (μ=0.001) θεωρούμε αστεροειδή που (χωρίς την διαταραχή του Δία) κινείται σε έλλειψη με εκκεντρότητα e=0.3 και περίοδο διπλάσια αυτής του Δία. Βρείτε τις αρχικές συνθήκες του αστεροειδή για τις περιπτώσεις που ο αστεροειδής βρίσκεται για t=0, στο περίκεντρο ή στο απόκεντρο της ελλειπτικής τροχιάς.
Για αυτές τις αρχικές συνθήκες ολοκληρώστε τις εξισώσεις του RTBP και σχεδιάστε την χρονική εξέλιξη του μεγάλου ημιάξονα και της εκκεντρότητας της τροχιάς του αστεροειδή.

4. Στο περιορισμένο πρόβλημα Γη – Σελήνη – Σκάφος (μ=0.0123), βρείτε αρχικές συνθήκες (σημείο Α) για μια τροχιά που να ξεκινάει από περιοχή «κοντά στη Γη» και η οποία πλησιάζει κοντά στη Σελήνη (σημείο Β).
Σχεδιάστε την τροχιά στο περιστρεφόμενο και στο αδρανειακό σύστημα από το Α στο Β. (στο αδρανειακό να φαίνεται και η τροχιά της Σελήνης)
Σε ποια ενέργεια h αντιστοιχεί? (απαίτηση της άσκησης h<-1.1)
Κάντε μετατροπή και δώστε σε φυσικές μονάδες τις αρχικές συνθήκες στο Α και τις τελικές στο Β.

Άσκησεις

5. Ένας εξω-πλανήτης κινείται γύρω από ένα διπλό σύστημα αστέρων με μάζες m1 και m2.
Εντοπίστε με την τομή Poincare τις περιοχές με ευσταθή (κανονική) κίνηση για τις παρακάτω παραμέτρους :

a) m1=0.9, m2=0.1 h= -2.0, h= -1.9, h=-1.8 h=-1.6
b) m1=0.8, m2=0.2 h= -2.0, h=-1.9 h=-1.8, h=-1.6
c) m1=0.6, m2=0.4 h= -2.0, hj= -1.9, h=-1.8 h=-1.6
d) m1=0.5, m2=0.5 h= -2.0, h= -1.9, h=-1.8 h=-1.6

Σχεδιάστε κάποιες περιοδικές τροχιές που έχετε εντοπίσει στο περιστρεφόμενο και στο αδρανειακό σύστημα.
Σχολιάστε σύντομα τα αποτελέσματά σας.

6. Το σύστημα Δίδυμος-Δίμορφος είναι ένας διπλός αστεροειδής. Η μάζα του Δίδυμου είναι 5.32 10^{11} Kgr και η μάζα του Δίμορφου 4.94 10^{9} Kgr. Το σύστημα περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά με σχετική ακτίνα r=1.18 Km (απόσταση των κέντρων των δύο σωμάτων). Θεωρούμε τα δύο σώματα σφαιρικά με ακτίνες R_1=325 m και R_2=80 m. Χρησιμοποιώντας το ΠΠ3Σ
α) Υπολογίστε τις θέσεις των σημείων Lagrange (σε κανονικοποιημένες μονάδες και σε φυσικές μονάδες) και βρείτε την ευστάθειά τους. Επίσης υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος ενέργειας h για κάθε σημείο.
β) Υπάρχει ενέργεια (h) που να επιτρέπει να έχουμε τροχιές (ενός μικρού σκάφους) γύρω από τον Δίμορφο? (δικαιολογήστε την απάντηση) ΄Αν ναι δώστε ένα παράδειγμα μιας τέτοιας τροχιάς.
γ) Βρείτε μια τροχιά ενός σκάφους που να εξελίσσεται κανονικά γύρω από το σημείο L4 με όσο το δυνατό μεγαλύτερη απόσταση από αυτό. Σχεδιάστε για ένα χρονικό διάστημα (πχ 100 ωρών) την απόσταση r_1(t) και r_2(t) του σκάφους από τα δύο σώματα σε φυσικές μονάδες (πχ αποστάσεις σε μέτρα, χρόνος σε ώρες). Υπάρχει τέτοια τροχιά που να συγκρούεται με την επιφάνεια του Δίδυμου ή του Δίμορφου?
δ) Υπολογίστε το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχει στη θετική ιδιοτιμή το σημείου ισορροπίας L3. Ξεκινήστε με αρχικές συνθήκες κοντά στο L3 πάνω στη διεύθυνση του ιδιοδιανύσματος. Η τροχιά που ακολουθεί το σώμα προσεγγίζει **την ασταθή πολλαπλότητα** του ασταθούς σημείου L3. Δώστε τις τροχιές για τις ΔΥΟ περιπτώσεις, του παραπάνω διανύσματος και του αντίθετου αυτού (το ιδιοδιάνυσμα εκφράζει μόνο διεύθυνση οπότε θεωρούμε και τις δύο περιπτώσεις φοράς) και σχολιάστε, Συγκρούονται οι τροχιές με κάποιο από τα δύο σώματα? Διαφεύγουν από το σύστημα? ($G=6.674\times10^{-11}$ $N\cdot m^2/kg^2$)
ε) Σχεδιάστε με τη βοήθεια του προγράμματος PoincareCRP.exe τομές (y=0, dy/dx>0) επιλέγοντας κάποιες τιμές ενέργειας λαμβάνοντας υπόψη τις τιμές στα σημεία Lagrange. Δώστε 4-5 παραδείγματα (εικόνες)