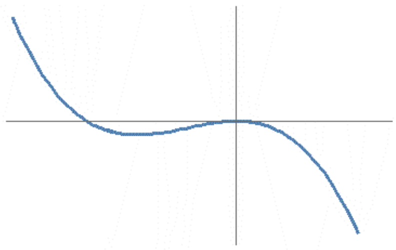
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι
ΘΕΜΑΤΑ & ΛΥΣΕΙΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ 2016

ΘΕΜΑ 1^o.

Υλικό σημείο μάζας m κινείται υπό την επίδραση του δυναμικού $V=-x^3-ax^2$, όπου a θετική σταθερά.
α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και την ευστάθειά τους
β) Σχεδιάστε το διάγραμμα των φάσεων
γ) Αν τοποθετήσουμε το υλικό σημείο στη θέση $x=-a$ με αρχική ταχύτητα μηδέν, σε πόσο χρόνο θα φτάσει στη θέση $x=0$;

Λύση



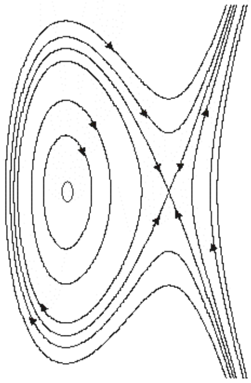
α) Σημεία ισορροπίας : ακρότατα του δυναμικού

$$\frac{dV}{dx}=-3x^2-2ax=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad \& \quad x=-\frac{2a}{3}$$

Είναι $\dfrac{d^2V}{dx^2}=-6x-2a$, οπότε

για $x=0$, $\left.\dfrac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=0}=-2a<0$ δηλαδή μέγιστο και άρα αστάθεια.

για $x=-\dfrac{2a}{3}$, $\left.\dfrac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=0}=2a>0$ δηλαδή ελάχιστο και άρα ευστάθεια.



β) Το φασικό διάγραμμα δίνεται στο διπλανό σχήμα

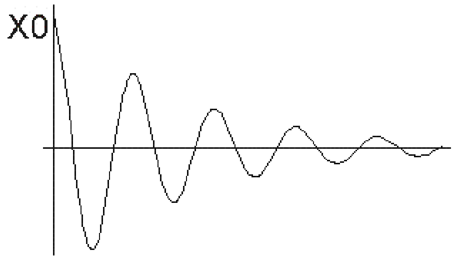
γ) Για την τροχιά με αρχικές συνθήκες $x=-a,\ \dot{x}=0$ αντιστοιχεί ενέργεια E=0, δηλαδή ίση με την ενέργεια του ασταθούς σημείου ισορροπίας. Άρα το υλικό σημείο βρίσκεται πάνω στη διαχωριστική καμπύλη και συνεπώς θα προσεγγίσει τη θέση x=0 ασυμπτωτικά (για $t\to\infty$).

ΘΕΜΑ 2^o.

α) Ένα σώμα μάζας m=1 είναι συνδεμένο με γραμμικό ελατήριο σταθεράς k=1 και μπορεί να εκτελεί ταλαντώσεις πάνω στον άξονα $x'Ox$ όπου O το σημείο ισορροπίας του ελατηρίου. Στο σώμα δρα επίσης δύναμη αντίστασης ανάλογης της ταχύτητας, $R(\dot{x})=-\frac{1}{2}\dot{x}$. Εξηγήστε γιατί το σώμα κάνει φθίνουσες ταλαντώσεις, βρείτε την κυκλική τους συχνότητα και σχεδιάστε πρόχειρα τη θέση του σώματος x ως συνάρτηση του χρόνου αν $x(0)=x_0>0$ και $\dot{x}(0)=0$.
β) Αν στο σώμα δρα εξωτερική περιοδική δύναμη πλάτους F_0 και κυκλικής συχνότητα ω, πόση πρέπει να είναι η συχνότητα ω για να έχουμε εξαναγκασμένη ταλάντωση με μέγιστο πλάτος; Βρείτε το μέγιστο πλάτος και την περίοδο της εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σχεδιάστε την ποιοτικά.

Λύση

α) Η συχνότητα του ταλαντωτή χωρίς την αντίσταση είναι $\omega_0=\sqrt{k/m}=1$. Ο συντελεστής αντίστασης είναι b=1/2 και $\gamma=b/(2m)$=1/4. Επειδή $\gamma<\omega_0$ έχουμε την



περίπτωση της μικρής αντίστασης και το σώμα θα εκτελεί φθίνουσες ταλαντώσεις με κυκλική συχνότητα

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{3}/2$$

β) Υπό την επίδραση της εξωτερικής διέγερσης θα έχουμε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με πλάτος

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{b^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{\omega^2/4 + (1-\omega^2)^2}}$$

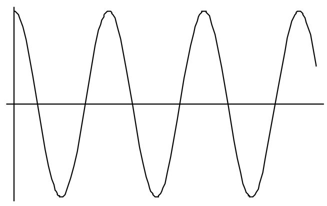
Το πλάτος γίνεται μέγιστο όταν το υπόριζο του παρανομαστή, $a = \omega^2/4 + (1-\omega^2)^2$ γίνει ελάχιστο. Βρίσκουμε

$$da/dt = \frac{\omega}{2} - 4\omega(1-\omega^2) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{7}{8}}$$

το οποίο είναι το μοναδικό ακρότατο για $\omega>0$ και οφείλει να είναι ελάχιστο (το a αποτελεί πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού ως προς το ω με θετικό συντελεστή στον όρο ω^4). Το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι για την παραπάνω τιμή του ω ίση με

$$A = \frac{8F_0}{\sqrt{15}}$$

και η εξαναγκασμένη ταλάντωση θα είναι αρμονική ταλάντωση με το παραπάνω πλάτος και συχνότητα.



ΘΕΜΑ 3^o.

α) Αποδείξτε ότι σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων $\mathbf{F} = F(r)\mathbf{e}_r$ η εξίσωση της τροχιάς $r=r(\theta)$ στο επίπεδο της κίνησης ενός υλικού σημείου μάζας m ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mr^2}{L^2}F(r), \qquad \text{οπου} \quad u = \frac{1}{r}$$

β) Αποδείξτε ότι για ελκτικές κεντρικές δυνάμεις $F(r) = -k/r^2$ η τροχιά που ακολουθεί το σώμα δίνεται από μια σχέση της μορφής

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

όπου p, e θετικές σταθερές

Λύση

α) Είναι $L = mr^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = L^2/mr^2$. Η εξίσωση για το $r=r(t)$ είναι $m\ddot{r} = F(r) + L^2/mr^3$ (1). Είναι

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{L}{m}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{d(1/r)}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d(\dot{r})}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{L}{m}\frac{d(1/r)}{d\theta}\right)\dot{\theta} = -\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} = -\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε τη ζητούμενη σχέση.

β) Για τη δοθείσα δύναμη η διαφορική εξίσωση της τροχιάς γράφεται

$$\frac{d^2u}{d\theta} + u = a, \qquad \text{οπου} \quad a = \frac{mk}{L^2} > 0 \text{ (σταθ).}$$

Η διαφορική είναι γραμμική μη ομογενής με λύση το άθροισμα της ομογενούς (αρμονικός ταλαντωτής με ω=1), που είναι η $u_0 = A\cos(\theta - \theta_0)$ με $A>0$ το πλάτος της ταλάντωσης και θ_0 η αρχική φάση. Μια μερική λύση της πλήρους είναι προφανώς η σταθερά $u_\mu = a$, άρα

$u = a + A\cos(\theta - \theta_0)$ ή

$$r = \frac{1}{a + A\cos(\theta - \theta_0)} = \frac{a}{1 + (A/a)\cos(\theta - \theta_0)}$$

η οποία είναι της ζητούμενης μορφής για $p = a, \quad e = A/a$

ΘΕΜΑ 4ο.

Υλικό σημείο μάζας m κινείται σε οριζόντιο επίπεδο Oxy πάνω στην επιφάνεια της περιστρεφόμενης Γης (γωνιακή ταχύτητα ω) και στο βόρειο ημισφαίριο με γεωγραφικό πλάτος φ, $0<\varphi<\pi/2$. Αρχικά το σώμα βρίσκεται στο O και έχει ταχύτητα υ_0 ως προς την επιφάνεια της Γης με φορά από βορρά προς νότο. Αφού ορίσετε κατάλληλα το σύστημα συντεταγμένων

α) υπολογίστε την κοριόλειο δύναμη και αποδείξτε ότι το σώμα θα εκτραπεί προς τη Δύση.

β) Δείξτε ότι κατά την κίνηση το μέτρο της ταχύτητας διατηρείται σταθερό.

γ) Δείξτε ότι η σχετική τροχιά ως προς το O την οποία ακολουθεί το σώμα είναι τόξο κύκλου. Υπολογίστε την ακτίνα του κύκλου.

Λύση

Ορίζουμε πάνω στο επίπεδο τον άξονα των x από βορρά προς νότο (με μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{i}$) και τον άξονα y από δύση προς ανατολή (με μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{j}$). Είναι z=0.

α) Η κοριόλειος δύναμη θα είναι

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_0 = -2m(-\omega\cos\varphi\vec{i} + \omega\sin\varphi\vec{k})\times\upsilon_0\vec{i} = -2m\omega\sin\varphi\vec{j}$$

Η κοριόλειος έχει φορά προς την δύση και συνεπώς εκτρέπει την πορεία του υλικού σημείου προς αυτή τη διεύθυνση.

β) Οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης γράφονται

$$\ddot{x} = a\dot{y}, \quad \ddot{y} = -a\dot{x} \qquad (a = 2\omega\sin\varphi)$$

Πολλαπλασιάζοντας με x και y αντίστοιχα παίρνουμε

$$\begin{matrix} \dot{x}\ddot{x} = a\dot{y}\dot{x} \\ \dot{y}\ddot{y} = -a\dot{x}\dot{y} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Άρα το μέτρο της σχετικής ταχύτητας $\upsilon = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ θα είναι σταθερό και ίσο με υ_0.

γ) Η σχετική επιτάχυνση είναι $\vec{\gamma} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$ και έχουμε

$$\vec{\gamma}\cdot\vec{\upsilon} = (\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j})(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\gamma} \perp \vec{\upsilon}$$

άρα η $\vec{\gamma}$ αποτελεί τη κεντρομόλο συνιστώσα της επιτάχυνσης και αφού $\upsilon=\upsilon_0$ (σταθερό) θα είναι και $\gamma = \dfrac{\upsilon_0^2}{R} = \text{σταθ.}$ δηλαδή η τροχιά έχει σταθερή ακτίνα καμπυλότητας και άρα είναι πάνω σε κύκλο ακτίνας R.

Επίσης από τις εξισώσεις κίνησης έχουμε $\gamma = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(a\dot{y})^2 + (-a\dot{x})^2} = a\upsilon_0$. Άρα

$$R = \frac{\upsilon_0^2}{\gamma} = \frac{\upsilon_0}{a} = \frac{\upsilon_0}{2\omega\sin\varphi}$$

β' τρόπος. Χρησιμοποιούμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης

$\ddot{y} = -a\dot{x} \quad \overset{\int}{\Rightarrow} \quad \dot{y} = -ax + c$. Λόγω αρχικών συνθηκών για x=0 είναι $\dot{y} = 0$ και άρα c=0.

Αντικαθιστούμε το $\dot{y}$ στην πρώτη διαφορική $\ddot{x} = a\dot{y}$ και παίρνουμε

$$\ddot{x} = -a^2x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + a^2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = c_1\cos at + c_2\sin at$$

Λόγω αρχικών συνθηκών, $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \upsilon_0$ βρίσκουμε c_1=0, $c_2=\upsilon_0/a$. Άρα

$$x = (\upsilon_0/a)\sin at$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση για το $\dot{y}$

$\dot{y} = -\upsilon_0 \sin at \quad \Rightarrow \quad y = -(\upsilon_0 / a)\cos at + c$. Επειδή $y(0)=0$ θα είναι $c=-\upsilon_0/a$ και άρα

$$y + \upsilon_0 / a = -(\upsilon_0 / a)\cos at$$

Άρα, από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$x^2 + (y + \frac{\upsilon_0}{a})^2 = \left(\frac{\upsilon_0}{a}\right)^2$$

Δηλαδή κύκλος με κέντρο το $(0, -\upsilon_0/a)$ και ακτίνα $R=\upsilon_0/a$