



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ



Πτυχιακή Εργασία

Παγίδευση Εξωηλιακών Αστεροειδών σε Ανάδρομες Τροχιές

-

Αριθμητικές προσομοιώσεις

Γιαννόπουλος Αθανάσιος

Επιβλέπων Καθηγητής: Βουγιατζής Γεώργιος

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ, Οκτώβριος 2023

Περίληψη

Σε αυτήν την πτυχιακή εργασία πραγματοποιούμε μια μελέτη των παγιδεύσεων των εξωηλιακών αστεροειδών στο ηλιακό σύστημα. Έχοντας σαν βάση την περίπτωση του (BZ 509) ο οποίος φαίνεται να υπάρχει παγιδευμένος στο ηλιακό σύστημα από την εποχή της γένεσης των πλανητών, εξετάζουμε μέσα από αριθμητικές προσομοιώσεις τη πιθανότητα (αν) και τους μηχανισμούς (πώς) που επιτρέπουν στους εξωηλιακούς αστεροειδείς να παραμείνουν δυναμικά ευσταθείς εντός του ηλιακού μας συστήματος. Ξεκινάμε κάνοντας μια αναφορά στις ανακαλύψεις και τους χρόνους ζωής των ανάδρομων αστεροειδών, εστιάζοντας ιδιαίτερω στον (BZ 509) και τις ιδιότητες του. Στη συνέχεια παρέχουμε μια πλήρη περιγραφή του δυναμικού μοντέλου για το το επίπεδο ηλιακό σύστημα, και εισάγουμε τις απωλεστικές δυνάμεις που περιγράφουν τον περιαστρικό δίσκο. Κατόπιν εξετάζουμε τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων και σχολιάζουμε τη στατιστική συμπεριφορά των τροχιών των αστεροειδών. Στο τελευταίο κεφάλαιο αναλύουμε τα αποτελέσματα μας.

Abstract

In this thesis we carry out a study of trapping of extrasolar asteroids trapping in the solar system. Having the case of (BZ 509) as a basis, which seems to be trapped in the solar system since the era of the formation of the planets, we examine through numerical simulations both the possibility (if) and the mechanisms (how) that allow extrasolar asteroids to remain dynamically stable within our solar system. We begin by referencing the discoveries and lifetimes of retrograde asteroids, focusing particularly on (BZ 509) and its properties. Subsequently, we provide a comprehensive description of the dynamical model for the planar solar system, and we introduce friction forces to simulate the circumstellar disc. Next, we examine the results of the simulations and comment on the statistics of the asteroid orbits. In the last chapter we analyze our computational results.

Περιεχόμενα

Περίληψη	2
Abstract.....	3
1. Εισαγωγή.....	5
1.1 Γενικά.....	5
1.2 Χρόνος ζωής ανάδρομων αστεροειδών.....	9
1.3 Η περίπτωση του Ka`eraoka`awela (2015 BZ509) και η προέλευση των ανάδρομων αστεροειδών.....	12
1.4 Σκοπός της εργασίας.....	14
2. Περιγραφή του δυναμικού συστήματος.....	15
2.1 Οι διαφορικές εξισώσεις.....	15
2.2 Ο Ήλιος και οι πλανήτες.....	18
2.2.1 Κανονικοποίηση.....	20
2.3 Εισαγωγή απωλεστικών δυνάμεων.....	21
2.3.1. Γενικά.....	21
2.3.2. Οι νέες εξισώσεις.....	21
2.3.3. Σκόνη στο εσωτερικό του ηλιακού συστήματος.....	22
3.2.3. Σκόνη στο εξωτερικό του ηλιακού συστήματος.....	23
2.4 Ο αστεροειδής και οι αρχικές συνθήκες.....	25
2.5 Συνθήκες της παγίδευσης.....	28
2.6 Μέθοδος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης.....	29
3. Προσομοιώσεις και αποτελέσματα.....	30
3.1 Αστεροειδείς σε ορθή τροχιά.....	30
3.3 Προσομοιώσεις με σκόνη/αέρια στο εσωτερικό του ηλιακού συστήματος.....	53
3.4 Προσομοιώσεις με σκόνη στο εξωτερικό του ηλιακού συστήματος.....	68
4. Συμπεράσματα.....	74
Βιβλιογραφία.....	76
Παραρτήματα.....	78
Παράρτημα Α.....	78
Παράρτημα Β.....	82

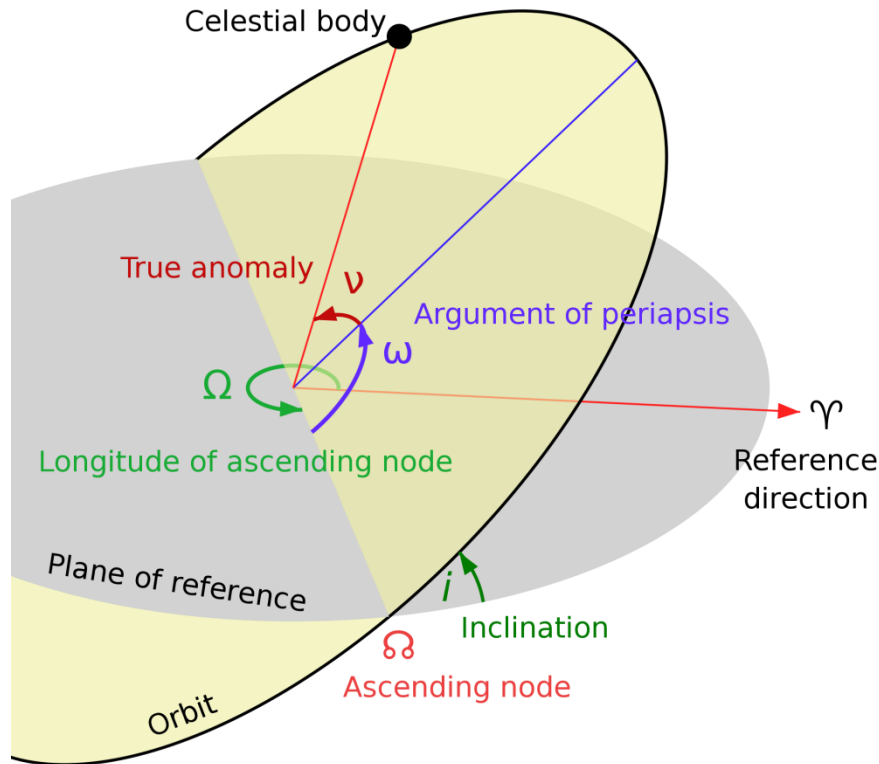
1. Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Αστεροειδής (μικρός πλανήτης) ονομάζεται ένα μικρό αστρικό σώμα το οποίο είναι δεν πληρεί τα κριτήρια του πλανήτη και δεν κατηγοριοποιείται ως κομήτης (NASA JPL Glossary). Επίσης οι αστεροειδείς βρίσκονται σε ηλιοκεντρική τροχιά, δεν αποτελούν δηλαδή δορυφόρους κάποιου πλανήτη.

Η θέση πάνω σε μια ελλειπτική τροχιά ενός αστρικού σώματος ορίζεται με τα 6 κεπλεριανά στοιχεία της τροχιάς του (Εικόνα 1):

- Μεγάλος ημιάξονας (a) : Το άθροισμα του μήκους του περιηλίου και του αφηλίου (του κοντινότερου και του μακρινότερου σημείου ως προς τον ήλιο) διαιρεμένο διά 2
- Εκκεντρότητα (e) : Αποτελεί ένδειξη του πόσο κυκλική είναι η τροχιά. Παίρνει τιμές $0 < e < 1$ για τις ελλείψεις, με το 0 να είναι ο κύκλος και όσο μεγαλύτερη η τιμή έχει τόσο πιο πεπλατυσμένη είναι η έλλειψη.
- Κλίση (i) : Η γωνία που σχηματίζει η ελλειπτική τροχιά με το επίπεδο αναφοράς (το επίπεδο της εκλειπτικής)
- Μήκος του αναβιβάζοντος συνδέσμου (Ω) : Το τόξο μεταξύ του εαρινού σημείου ισημερίας και του αναβιβάζοντος συνδέσμου, του σημείου δηλαδή όπου η τροχιά τέμνει το επίπεδο της ελλειπτικής κινούμενη προς το περιήλιο
- Όρισμα του περιηλίου (ω) : Το τόξο μεταξύ του αναβιβάζοντος συνδέσμου και του περιηλίου, το οποίο ορίζει τον προσαντολισμό της έλλειψης στο επίπεδο της τροχιάς
- Αληθής ανωμαλία (v ή θ) : Το τόξο μεταξύ του περιηλίου και του σημείου του σώματος



Εικόνα 1: Απεικόνιση τροχιακών χαρακτηριστικών. Πηγή: Galileo GNSS

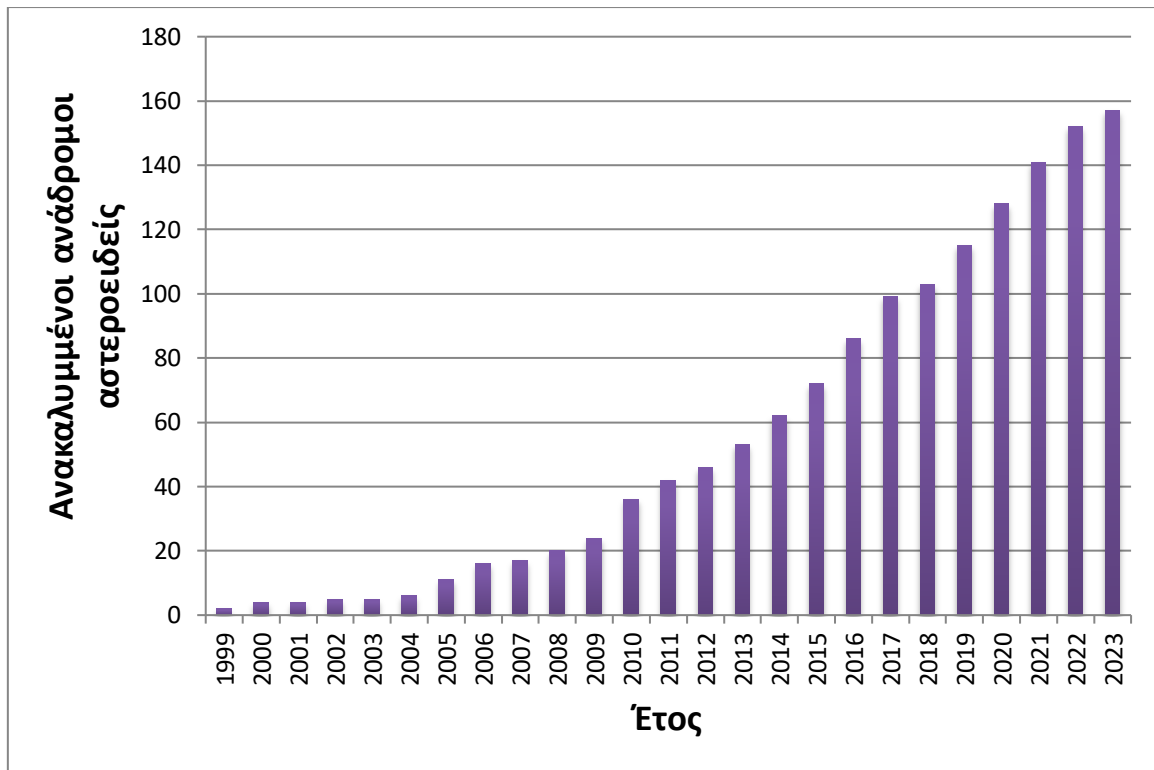
Μία τροχιά θεωρείται ανάδρομη όταν κινείται κατά τη φορά το ρολογιού αν παρατηρηθεί το ηλιακό σύστημα από τον βόρειο ουράνιο πόλο. Όσον αφορά τα κεπλεριανά στοιχεία τις τροχιάς, αυτό μεταφράζεται σε μία μόνο συνθήκη όσον αφορά την κλίση: για να έχουμε ανάδρομη τροχιά πρέπει να ισχύει $90^\circ < i < 180^\circ$.

Ο πρώτος ανάδρομος αστεροειδής ανακαλύφθηκε σχετικά πρόσφατα, το 1999, ακόμα αργότερα και από την ανακάλυψη των πρώτων εξωπλανητών η οποία έγινε το 1992. Παρ' όλο που η πρώτη παρατήρηση είχε γίνει σχεδόν έναν χρόνο νωρίτερα, δεν ήταν μέχρι τις 08/06/1999 όταν ανακαλύφθηκε από το project LINEAR (Lincoln Near Earth Asteroid Research) πως η τροχιά του αστεροειδή είναι ανάδρομη. Το όνομα που επιλέχθηκε για τον αστεροειδή είναι πολύ ταιριαστά το "Dioresta", δηλαδή η λέξη "Asteroid" γραμμένη ανάποδα.^[1] Μέχρι αυτήν την παρατήρηση δεν υπήρχε καταγραφή αστεροειδών σε ανάδρομες τροχιές, καθώς τα μικρά σώματα σε τροχιές με $i > 90^\circ$ παρουσίαζαν έντονη συμπεριφορά κομητών.^[2] Ύστερα από την ανακάλυψη του Dioresta ο αριθμός των ανάδρομων αστεροειδών σταθερά αυξάνεται (γράφημα 1), και πλέον υπάρχουν 161 καταγεγραμμένοι αστεροειδείς με $i > 90^\circ$, 158 από τους οποίους βρίσκονται σε τροχιά στο ηλιακό σύστημα, και οι υπόλοιποι 3 έχουν υπερβολικές τροχιές.

Πίνακας I: Σύντομη λίστα μερικών ανάδρομων αστεροειδών και των αντίστοιχων τους τροχιακών στοιχείων (πηγή: NASA JPL Small Body Database)

Όνομα	a (AU)	e	i (deg)
20461 Dioretsa (1999 LD31)	23.8	0.9016	160.42
65407 (2002 RP120)	54.05	0.9539	119.55
330759 (2008 SO218)	8.121	0.5625	170.34
336756 (2010 NV1)	290	0.9674	140.77
342842 (2008 YB3)	11.57	0.4418	105.11
343158 Marsyas (2009 HC82)	2.527	0.8066	154.35
434620 (2005 VD)	6.685	0.2536	172.19
459870 (2014 AT28)	10.93	0.4015	165.55
468861 (2013 LU28)	187.8	0.9534	125.32
471325 (2011 KT19)	35.75	0.332	110.3
514107 Ka`epaoka`awela (2015 BZ509)	5.134	0.3769	163.13
518151 (2016 FH13)	24.52	0.6155	93.63
523797 (2016 NM56)	72.08	0.8535	144
523800 (2017 KZ31)	54.18	0.798	161.7
528219 (2008 KV42)	41.99	0.4961	103.44
582301 (2015 RM306)	246	0.9534	175.98
585899 (2020 HM98)	84.13	0.8425	137.91
594872 (2019 CR)	14.4	0.5912	160.37
606187 (2017 QO33)	34.93	0.8586	148.83
612093 (1999 LE31)	8.174	0.4683	151.52
614592 (2009 YS6)	20.23	0.919	147.77
(2000 DG8)	10.78	0.7915	129.4
(2000 HE46)	23.6	0.9014	158.52
(2004 NN8)	100.7	0.977	165.56

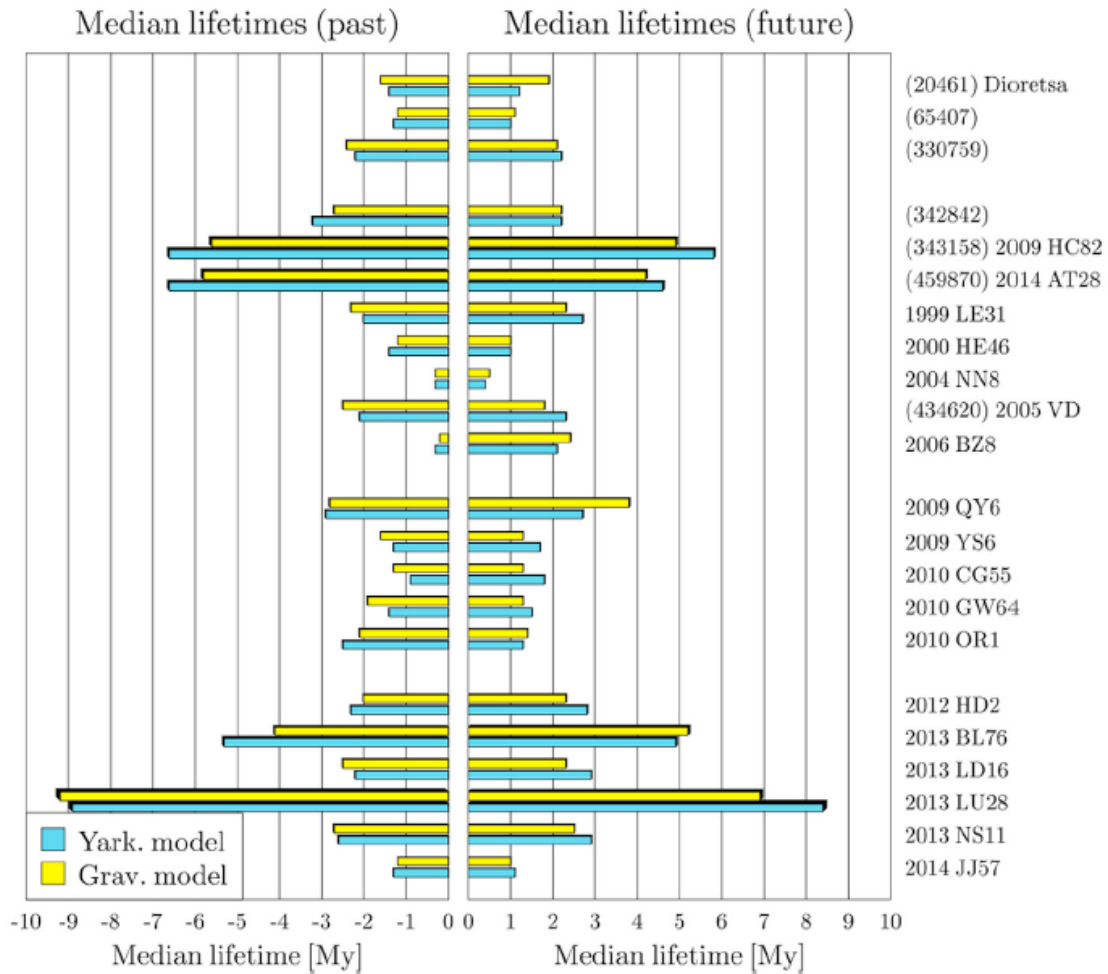
Ο πραγματικός τους πληθυσμός εικάζεται ότι είναι αρκετά μεγαλύτερος, αλλά υπεισέρχονται οι προκλήσεις παρατήρησης μακρινών αντικειμένων. Σύμφωνα με την ταξινόμηση του MPC (Minor Planet Center) οι περισσότεροι από αυτούς τους αστεροειδείς ανήκουν είτε στους κενταύρους, δηλαδή σε αυτούς με τροχιές μεταξύ του Δία και του Ποσειδώνα, είτε στα Υπερποσειδώνια Αντικείμενα (TNOs- Trans-Neptunian Objects), αλλά δυναμικά δεν φαίνεται να ανήκουν σε κάποια συγκεκριμένη ομάδα ή οικογένεια, όπως π.χ. στους Τρωικούς του Δία ή την οικογένεια Nysa.^[2] Αν και αποτελούν την μικρότερη σε πληθυσμό υποκατηγορία αστεροειδών, δεν αποκλείεται, με το αυξημένο ενδιαφέρον για τους ανάδρομους αστεροειδείς να συνεχίσουν να ανακαλύπτονται όλο και περισσότεροι και τελικά να φανεί ότι δεν αποτελούν τόσο σπάνιο φαινόμενο, όπως έγινε με τους εξωπλανήτες. Ήδη ο αριθμός τους, αλλά και ο ρυθμός ανακάλυψής τους αυξάνεται ραγδαία (γράφημα 1).



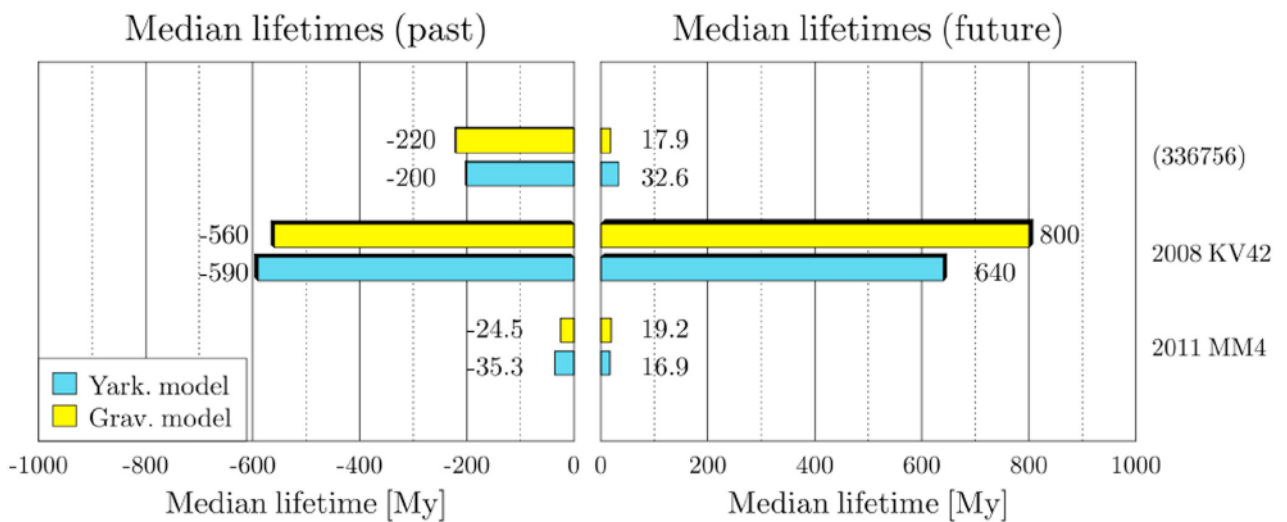
Γράφημα 1: Πλήθος αστεροειδών που έχουν ανακαλυφθεί ανά έτος

1.2 Χρόνος ζωής ανάδρομων αστεροειδών

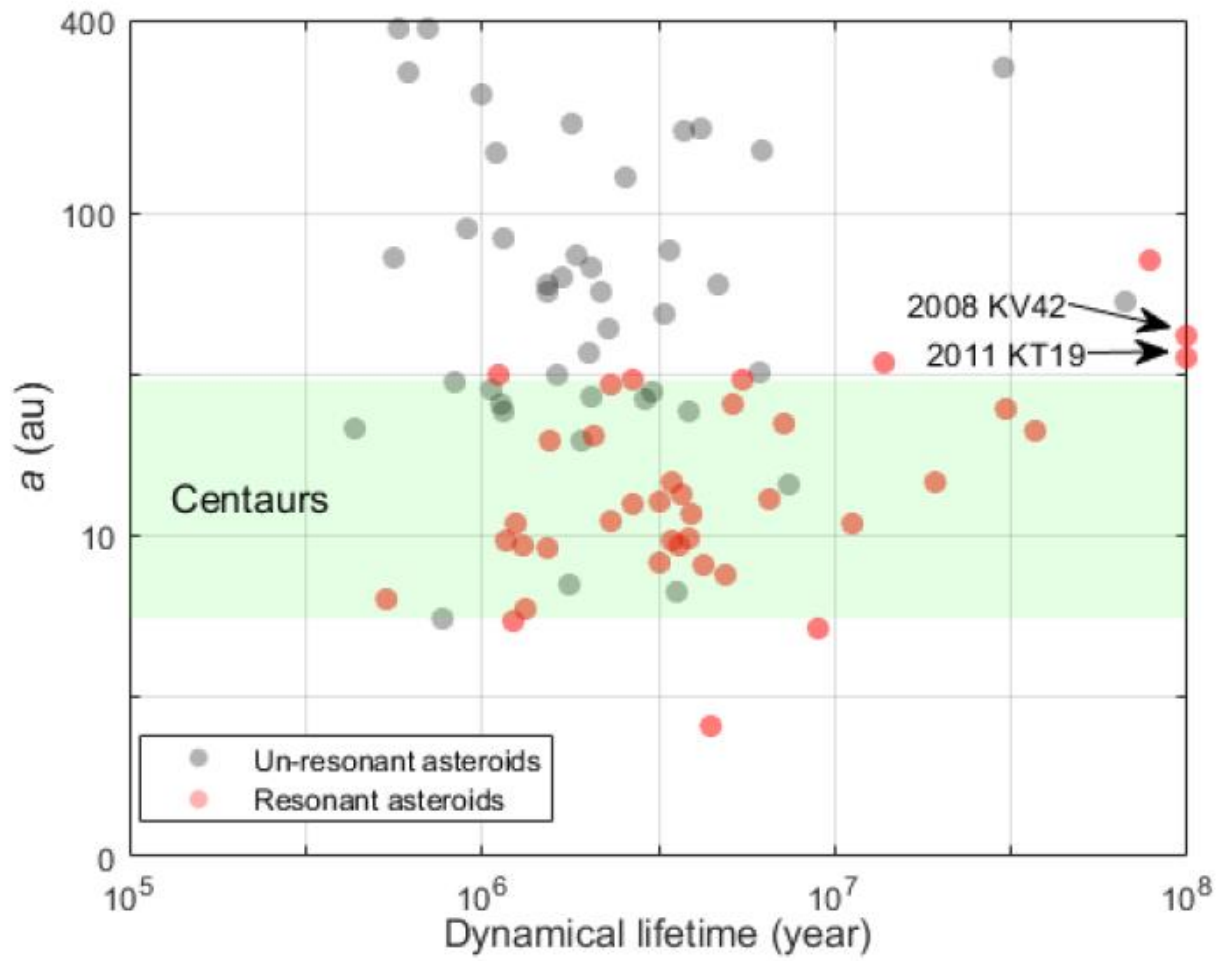
Παρά το γεγονός ότι ο αριθμός τους συνεχίζει να αυξάνεται, το σύνολο τους αποτελεί το μικρότερο υποσύνολο αστεροειδών που υπάρχει, όντας μόνο το 0.012% των αστεροειδών που έχουν εντοπισθεί. Ως μέτρο σύγκρισης παραθέτουμε το γεγονός ότι περίπου το 55% των κομητών έχουν ανάδρομες τροχιές.^[1] Ο μικρός τους αριθμός οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο χρόνος ζωής τους είναι μικρός, (συγκριτικά με τη χρονική κλίματα των υπόλοιπων σωμάτων), κάτι που υποδεικνύει ότι ίσως ο μηχανισμός παραγωγής τους δεν είναι αποδοτικός. Πιο συγκεκριμένα, οι προσπάθειες να γίνουν εκτιμήσεις για τους χρόνους ζωής γνωστών ανάδρομων αστεροειδών μέσα από αριθμητικές προσομοιώσεις, με βάση τα παρατηρούμενα τροχιακά τους χαρακτηριστικά, δίνουν χρόνους ζωής της τάξης των μερικών Myr, ενώ ακόμα και οι 3 περιπτώσεις που έχουν μεγαλύτερους χρόνους ζωής, δεν ξεπερνούν το 1 Gyr. (Εικόνες 2,3) Σημειώνουμε ότι οι χρόνοι αυτοί δεν έχουν υπολογιστεί μόνο για το μέλλον, αλλά και για το παρελθόν, καθώς το δυναμικό σύστημα είναι αντιστρέψιμο ως προς το χρόνο, το οποίο οδηγεί στην εικασία ότι οι αστεροειδείς αυτοί δεν προέρχονται από το ηλιακό σύστημα και τον πρωτοπλανητικό δίσκο, αλλά έχουν καταλήξει σε αυτές τις τροχιές πολύ μεταγενέστερα συγκριτικά με τους υπόλοιπους αστεροειδείς.^[3] Τα αποτελέσματα αυτά φαίνεται να επιβεβαιώνονται, αν και όχι πλήρως, όταν γίνεται μελέτη των ανάδρομων αστεροειδών οι οποίοι βρίσκονται σε συντονισμό τροχιάς με τους πλανήτες του ηλιακού συστήματος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι χρόνοι ζωής φαίνεται να εκτείνονται σε μία περίπτωση (2008 KV42) πέρα από το 1Gyr στο παρελθόν και πέρα των 100 Myr στο μέλλον. Τονίζουμε ότι πρόκειται για τον ίδιο αστεροειδή που έδωσε μέγιστο χρόνο ζωής και στη προηγούμενη περίπτωση. Το γεγονός παραμένει ότι σύμφωνα με τις αριθμητικές προσομοιώσεις, οι αστεροειδείς έχουν στην πλειοψηφία τους στατιστικά μικρούς χρόνους ζωής, ενώ οι μόνοι εξ' αυτών που επιβιώνουν για περισσότερη διάρκεια είναι αυτοί που έχουν μικρές τιμές εκκεντρότητας (0.3-0.5), τιμές κλίσης που τους τοποθετεί κοντά σε πολικές τροχιές ($103^\circ < i < 110^\circ$) και το minimum orbit intersection distance (MOID) με τους πλανήτες με τους οποίους βρίσκονται σε συντονισμό είναι μεγάλο.^[4]



Εικόνα 2: Χρόνοι ζωής <10 My για ανάδρομους αστεροειδείς (πηγή:[3])



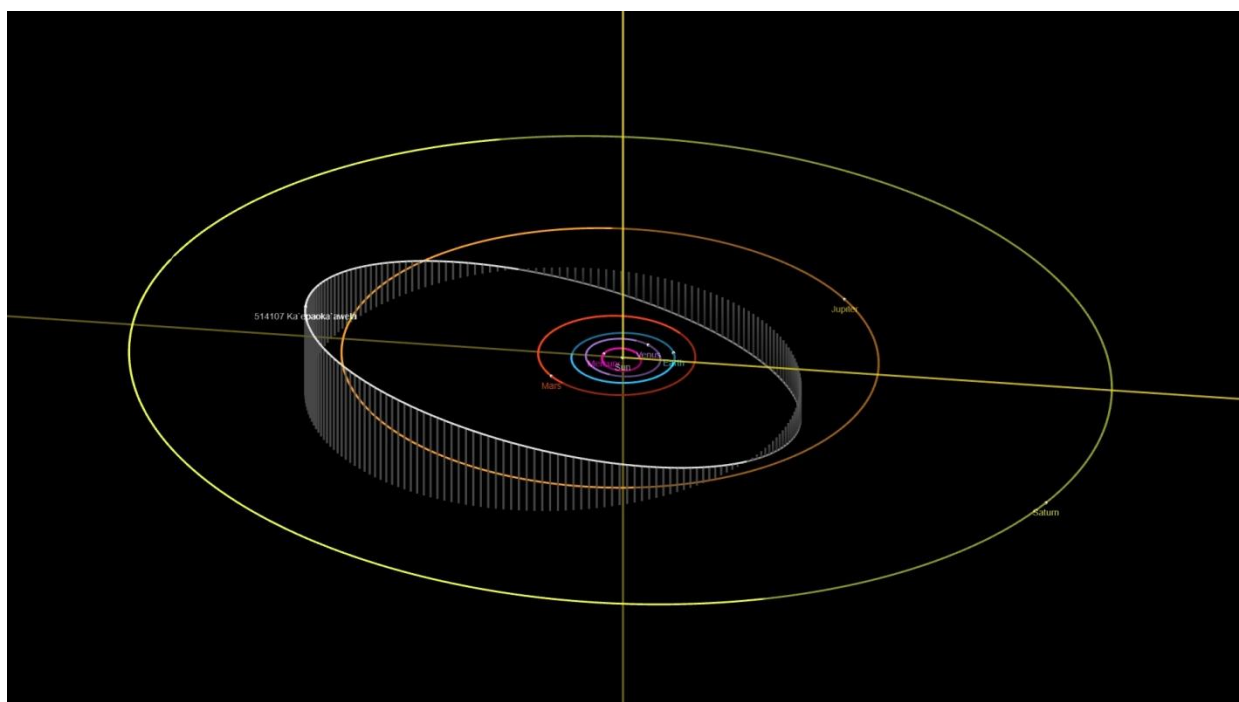
Εικόνα 3: Χρόνοι ζωής >10 My για ανάδρομους αστεροειδείς (πηγή: [3])



Εικόνα 4: Χρόνος ζωής ανάδρομων αστεροειδών (πηγή: [4])

1.3 Η περίπτωση του Κα'εραοκα'αwela (2015 BZ509) και η προέλευση των ανάδρομων αστεροειδών

Το 2015 ανακαλύφθηκε ο ανάδρομος αστεροειδής BZ509, ο οποίος φέρει πολύ ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Συγκεκριμένα, βρίσκεται συντονισμό 1:-1 με το Δία, με το αρνητικό πρόσημο να υποδηλώνει ότι η τροχιά του είναι ανάδρομη. Αν και βρίσκεται στη μέγιστη πιθανότητα παγίδευσης από το Δία, θεωρούνταν αρχικά ότι η παγίδευση ήταν προσωρινή, καθώς η συνήθης προέλευση των κενταύρων από το διασκορπισμένο δίσκο ή από το νέφος του Oort^[5] υποδεικνύουν ότι ο αστεροειδής θα έπρεπε να διαπεράσει τη τροχιά του Δία και να παγιδευτεί προσωρινά, σε χαοτικές τροχιές, για μικρούς χρόνους ζωής. Αυτός θεωρείται ότι είναι κατά κύριο λόγο ο μηχανισμός προέλευσης των περισσότερων κενταύρων, λόγω του μικρού τους χρόνου ζωής από την έλλειψη συντονισμού, δηλαδή προέλευση από κάποια δεξαμενή αντικειμένων τα οποία όταν πλησίασαν σχετικά πρόσφατα στο εσωτερικό του ηλιακού συστήματος παγιδεύτηκαν προσωρινά σε χαοτικές τροχιές. Όμως ο BZ509 δεν φαίνεται να υπακούει απαραίτητα σε αυτήν την εικασία. Όταν μελετήθηκαν 100 κλώνοι του για διάστημα 1 Myr βρέθηκε ότι έχει σταθερή εξέλιξη, και θεωρήθηκε πιθανότερος ο ανάδρομος συντονισμός.^[6]



Εικόνα 5: Η τροχιά του BZ509 (πηγή: [1])

Σε μελέτη προσομοίωσης 1,000,000 κλώνων του BZ509 όπου λήφθηκαν υπ' όψη τα σφάλματα στα στοιχεία της τροχιάς, τα αποτελέσματα που προέκυψαν αποκλίνουν απόλυτα από αυτά που κυριαρχούν για τους υπόλοιπους ανάδρομους αστεροειδείς. Από τις μακροχρόνια σταθερές τροχιές της προσομοίωσης, το 60% κατέληξε σε συντονισμό 1:-1 με το Δία. Το σημαντικό στοιχείο στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ότι οι προσομοιώσεις έτρεξαν για χρόνο 4.6 δισεκατομμύρια χρόνια στο παρελθόν. Αυτό δείχνει ότι υπάρχει πιθανότητα ο BZ509 να βρίσκεται στο ηλιακό μας σύστημα από τη γένεση των πλανητών, να έχει παγιδευτεί από τότε σε σταθερή τροχιά συντονισμένη με το Δία, ένα απρόσμενο αποτέλεσμα καθώς όπως αναφέρθηκε οι ανάδρομοι κένταυροι θεωρείται ότι παγιδεύτηκαν στο ηλιακό σύστημα πολύ πιο μετά από όταν οι πλανήτες σταθεροποιηθούν δυναμικά. Επιπλέον, τα μοντέλα σχηματισμού πλανητών δεν μπορούν να παράγουν αντικείμενα σε κλίσεις όπως αυτές του BZ509 με τους πλανήτες σε συνεπίπεδες τροχιές, αλληλεπιδρώντας με τον περιστροφικό δίσκο, παράγοντας ταυτόχρονα σχηματισμούς όπως τη ζώνη των αστεροειδών και τη ζώνη Edgeworth-Kuiper. Η ανακάλυψη αυτή για τον BZ509 έφερε νέο ενδιαφέρον στη μελέτη των ανάδρομων αστεροειδών, καθώς πλέον κυμαίνονται σε ένα φάσμα με το ένα άκρο στις ασταθείς χαοτικές τροχιές με ελάχιστη διάρκεια ζωής, και το άλλο άκρο σε σταθερότητα που μπορεί να διαρκεί από την εποχή γένεσης των πλανητών, με το δεύτερο να σημαίνει την εξωηλιακή προέλευση των σωμάτων αυτών.^[7]

1.4 Σκοπός της εργασίας

Σκοπός της εν λόγω πτυχιακής εργασίας είναι, με αφετηρία όσα έχουν αναφερθεί στην εισαγωγή, να εξετάσουμε αν, και με ποιον μηχανισμό μπορεί να συμβεί παγίδευση εξωηλιακών αστεροειδών. Κάνοντας ένα μεγάλο πλήθος αριθμητικών προσομοιώσεων, ώστε να έχουμε μια ακριβή στατιστική, θα μελετήσουμε τους πιθανούς τρόπους αλληλεπίδρασης του αστεροειδή με τον ήλιο και τους πλανήτες του ηλιακού συστήματος, το χρόνο ζωής των ανάδρομων τροχιών, τους παράγοντες από τους οποίους αυτοί εξαρτώνται, και τα ποιοτικά χαρακτηριστικά τους. Ο ύστατος στόχος είναι να δούμε εάν υπάρχει τρόπος με κάποιον μηχανισμό να αναπαραχθεί ένα αποτέλεσμα αντίστοιχο αυτού του BZ509, μια τροχιά δηλαδή η οποία είναι δυναμικά σταθερή για μεγάλο χρονικό διάστημα, ή αν τα αποτελέσματα θα δώσουν χαοτικές τροχιές με χρόνους ζωής της τάξης μεγέθους των Myr ή Kyr. Θα μελετηθούν ουσιαστικά 2 μοντέλα, ένα στο οποίο έχουμε την επίδραση μόνος της βαρύτητας, και ένα ακόμη, με 2 υποπεριπτώσεις, όπου εισάγουμε μια δομή ανάλογη του περιαστρικού δίσκου, για να προσομοιώσουμε την εποχή του πρώιμου ηλιακού συστήματος, και να δούμε πώς μεταβάλλονται τα αποτελέσματα.

2. Περιγραφή του δυναμικού συστήματος

2.1 Οι διαφορικές εξισώσεις

Θεωρούμε ένα αδρανειακό δισδιάστατο σύστημα αναφοράς με το κέντρο O στο σημείο $(0,0)$, όπου βρίσκεται ο ήλιος. Στο δυναμικό σύστημα που θα μελετήσουμε υπάρχουν μόνο βαρυτικές δυνάμεις από τον ήλιο και τους πλανήτες, προερχόμενες από τα βαρυτικά πεδία κεντρικών δυνάμεων που αυτοί δημιουργούν. Έτσι, η δύναμη που δέχεται ο αστεροειδής από ένα σώμα έχει τη γενική μορφή

$$\vec{f} = -f(r)\hat{e}_r \quad (2.1)$$

ή πιο συγκεκριμένα

$$\vec{f} = -\frac{Gm_i m_*}{r_i^3} \vec{r}_i \quad (2.2)$$

όπου $m_i, i = 0,1,2,3,4$ η μάζα των σωμάτων, με τους δείκτες $0,1,2,3,4$ να υποδεικνύουν τον Ήλιο, το Δία, τον Κρόνο, τον Ουρανό, και τον Ποσειδώνα αντίστοιχα, m_* η μάζα του αστεροειδή, το διάνυσμα \vec{r}_i είναι το διάνυσμα θέσης του αστεροειδή ως προς το αντίστοιχο σώμα, και r_i το μέτρο του διανύσματος αυτού.

Θέλοντας να υπολογίσουμε τη συνισταμένη βαρυτική δύναμη που θα δέχεται ο αστεροειδής, χρειάζεται απλώς να αθροίσουμε διανυσματικά τις επιμέρους δυνάμεις από τα διάφορα σώματα, συνεπώς προκύπτει ότι:

$$\vec{F} = -\sum_{i=0}^4 \frac{Gm_i m_*}{r_i^3} \vec{r}_i \quad (2.3)$$

Για την εξαγωγή του συστήματος διαφορικών εξισώσεων χρειαζόμαστε μια έκφραση της επιτάχυνσης. Χρησιμοποιώντας τη σχέση της κλασικής μηχανικής

$$\vec{F} = \frac{d(m_* \vec{u})}{dt} = \frac{d(m_* \vec{r})}{dt} \quad (2.4)$$

και με την παραδοχή ότι ο αστεροειδής διατηρεί σταθερή μάζα εξάγουμε ότι

$$\vec{F} = m_* \frac{d\vec{u}}{dt} = m_* \ddot{\vec{r}} \quad (2.5)$$

Με τη χρήση της (2.5) στη (2.3) καταλήγουμε τελικά στην εξίσωση

$$m_* \ddot{\vec{r}} = -\sum_{i=0}^4 \frac{Gm_i m_*}{r_i^3} \vec{r}_i \quad (2.6)$$

όπου, απαλείφοντας τη μάζα του αστεροειδή καταλήγουμε στην τελική έκφραση της επιτάχυνσης

$$\vec{\ddot{r}} = - \sum_{i=0}^4 \frac{Gm_i}{r_i^3} \vec{r}_i \quad (2.7)$$

όπου $\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}$ το διάνυσμα θέσης του αστεροειδή ως προς το σημείο Ο αδρανειακού συστήματος αναφοράς, και οι 1^{ης} και 2^{ης} τάξεως παράγωγοί του ως προς το χρόνο.

Στην εργασία αυτή θεωρούμε επίπεδη κίνηση όλων των σωμάτων, δηλαδή όλοι οι πλανήτες καθώς και ο αστεροειδής κινούνται στο επίπεδο Oxy.

Για να μετατρέψουμε τη διαφορική εξίσωση στη μορφή που θα έχει στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή γράφοντας το διάνυσμα \vec{r} ως

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad (2.8)$$

ορίζουμε πρώτα τις θέσεις των σωμάτων ως

$$\vec{d}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} \quad (2.9)$$

το οποίο δίνει στο διάνυσμα \vec{r}_i τη μορφή

$$\vec{r}_i = (x - x_i)\hat{i} + (y - y_i)\hat{j} \quad (2.10)$$

με μέτρο

$$|\vec{r}_i| = r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (2.11)$$

Παραγωγίζοντας χρονικά την (2.8) για να πάρουμε το αριστερό σκέλος της (2.7) καταλήγουμε στην

$$\vec{\ddot{r}} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} \quad (2.12)$$

φτάνοντας έτσι στο σύστημα των εξισώσεων:

$$\dot{x} = u_x \quad (2.13)$$

$$\dot{y} = u_y \quad (2.14)$$

$$\ddot{x} = -\sum_{i=0}^4 \frac{G m_i (x-x_i)}{((x_i-x)^2+(y_i-y)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.15)$$

$$\ddot{y} = -\sum_{i=0}^4 \frac{G m_i (y-y_i)}{((x_i-x)^2+(y_i-y)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.16)$$

2.2 Ο Ήλιος και οι πλανήτες

Θεωρούμε το ηλιακό σύστημα ως ένα σύστημα 2 διαστάσεων (2-D), με τον ήλιο στο σημείο της αρχής των αξόνων στο καρτεσιανό σύστημα, όπως αναφέρθηκε και στην παράγραφο 2.1. Καθώς ο κύριος μηχανισμός παγίδευσης που μελετάται είναι η βαρύτητα, εκτός από τον ήλιο δεν έχουν προστεθεί όλοι οι πλανήτες, αλλά μόνο οι γίγαντες Δίας, Κρόνος, Ουρανός, και Ποσειδώνας, που αποτελούν και την πλειοψηφία της πλανητικής μάζας στο ηλιακό μας σύστημα.

Για απλοποίηση της δυναμικής περιγραφής, με σκοπό την ευκολία στην κατανόηση των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα, αλλά και την οικονομία σε υπολογιστικούς πόρους, τοποθετούμε τον ήλιο πακτωμένο στην αρχή των αξόνων του καρτεσιανού αδρανειακού συστήματος αναφοράς, και τους πλανήτες σε τέλειες κυκλικές τροχιές γύρω από αυτόν, με σταθερές ακτίνες και γωνιακές ταχύτητες. Περαιτέρω, από τη στιγμή που μελετάμε το ηλιακό σύστημα σε 2 διαστάσεις, είναι επόμενο να θεωρήσουμε πως όλες οι τροχιές των πλανητών βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο μεταξύ τους, το οποίο ταυτίζεται και με το δισδιάστατο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Συνεπώς, οι συνιστώσες του δεύτερου σκέλους της (2.9) περιγράφονται πλέον πλήρως από τις

$$x_i = a_i \cos(\omega_i t + M_i) \quad (2.17)$$

$$y_i = a_i \sin(\omega_i t + M_i) \quad (2.18)$$

όπου, όπως είπαμε στην παράγραφο 2.1 και για το υπόλοιπο αυτής της εργασίας, οι δείκτες $i=0,1,2,3,4$ αναφέρονται στον Ήλιο, το Δία, τον Κρόνο, τον Ουρανό και τον Ποσειδώνα αντίστοιχα. Οι σταθερές a_i, ω_i, M_i ταυτίζονται με τα στοιχεία της τροχιάς των πλανητών, όπου a_i ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς, $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$ η συχνότητα περιφοράς του σώματος, και M_i η μέση ανωμαλία, δηλαδή το τόξο της τροχιάς που έχει διαγράψει το σώμα τη στιγμή $t=0$. Η επιλογή της μέσης ανωμαλίας M_i , έναντι της αληθούς ανωμαλίας v , έγινε με καθαρά γεωμετρικό κριτήριο, καθώς η μέση ανωμαλία αντιστοιχεί σε τόξο κυκλικής τροχιάς, και οι τροχιές που μελετάμε στα πλαίσια της εργασίας δεν είναι οι πραγματικές που μεταβάλλονται, ούτε οι στιγμιαία ελλειπτικές που προκύπτουν από τα στοιχεία της τροχιάς για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, αλλά εξιδανικευμένες κυκλικές. Τα a_i, ω_i, M_i επιλέχθηκαν για όλα τα σώματα από τις αντίστοιχες τους εφημερίδες μέσω του Horizons System του JPL (Jet Propulsion Laboratory) της NASA, την ίδια ημερομηνία και ώρα, την 01/01/2000 TT (Terrestrial Time), που είναι και η ημερομηνία που χρησιμοποιήθηκε για τον ορισμό του συστήματος συντεταγμένων J2000. Καθώς μιλάμε για κυκλικές επίπεδες τροχιές τα υπόλοιπα τροχιακά χαρακτηριστικά (εκκεντρότητα e , κλίση i , μήκος

αναβιβάζοντας συνδέσμου Ω , όρισμα περιηλίου ω) θεωρούνται ίσα με 0. Επίσης να σημειωθεί ότι καθώς θεωρούμε τον ήλιο ακίνητο στο σημείο (0,0), έχουμε θέσει $a_0, \omega_0, M_0 = 0$.

Επιπλέον, για την εισαγωγή της μάζας των σωμάτων στις διαφορικές εξισώσεις (2.15) και (2.16) ανακτήθηκε από τις αντίστοιχες εφημερίδες και η μάζα του κάθε σώματος. Οι πληροφορίες για τις μάζες και τα τροχιακά χαρακτηριστικά όλων των σωμάτων που μελετάμε βρίσκονται στον παρακάτω πίνακα

Πίνακας II: Χαρακτηριστικά των σωμάτων που θα χρησιμοποιηθούν στις προσομιώσεις

A/A	m (kg)	α (AU)	T (Years)	M (rad)
Ήλιος	$1.9885 \cdot 10^{30}$	0	0	0
Δίας	$1.8982 \cdot 10^{27}$	5.2025	11.862	0.326812
Κρόνος	$5.6834 \cdot 10^{26}$	9.5531	29.4475	5.591684
Ουρανός	$8.6813 \cdot 10^{25}$	19.2642	84.012	2.494207
Ποσειδώνας	$1.02409 \cdot 10^{26}$	30.2337	164.7885	4.66502

2.2.1 Κανονικοποίηση

Καθώς οι μάζες των σωμάτων εισάγονται στις (2.15) και (2.16) πάντα πολλαπλασιασμένες με τη σταθερά της βαρύτητας G , η ποσότητα που θα χρησιμοποιηθεί στις προσομοιώσεις θα είναι πάντοτε η Gm_i και όχι απλώς η μάζα. Επιπλέον, για να έχουμε μία πιο ισχυρή κατανόηση της κλίμακας, έχει γίνει κανονικοποίηση και στις ποσότητες Gm_i αλλά και στα τροχιακά χαρακτηριστικά, με βάση τον Ήλιο και το Δία αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα έχουμε θέσει $Gm_0 = 1$, και $a_1 = 1, \omega_1 = 1$.

Θέλουμε να επιστήσουμε τη προσοχή στην κανονικοποίηση των τροχιακών χαρακτηριστικών, καθώς μεταβάλλουν σημαντικά την κλίμακα και το πώς ερμηνεύονται τα αποτελέσματα. Οι μεγάλοι ημιάξονες της τροχιάς των κομητών στις προσομοιώσεις, καθώς και η διάρκεια παραμονής τους εντός του ηλιακού συστήματος παίζουν καίριο ρόλο στα φαινόμενα που εξετάζει η εργασία. Η κανονικοποίηση στην ακτίνα του Δία αντιστοιχίζει τη μία μονάδα μήκους σε 5.2025 AU, την τιμή δηλαδή που έχουμε από την εφημερίδα. Αντίστοιχα, με την κανονικοποίηση στην κυκλική συχνότητα έχει μεταβληθεί η κλίμακα του χρόνου. Θέτοντας $\omega_1 = 1$ προκύπτει ότι $T_1 = 2\pi$, δηλαδή κάθε 2π μονάδες χρόνου αντιστοιχούν σε μία περιφορά του Δία γύρω από τον ήλιο, δηλαδή 11.862 έτη. Στο υπόλοιπο αυτής της εργασίας είτε δεν γίνεται αναφορά σε μονάδες, είτε αναφέρονται «μονάδες μήκους» ή «μονάδες χρόνου» τότε μιλάμε για τις κανονικοποιημένες μονάδες που μόλις αναφέρθηκαν. Ειδικά, θα χρησιμοποιηθούν οι γνωστές μονάδες μέτρησης, AU και yr.

Τα κανονικοποιημένα στοιχεία βρίσκονται όλα συγκεντρωμένα στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας III: Κανονικοποιημένα χαρακτηριστικά των σωμάτων

A/A	Gm	α	ω
Ήλιος	1	0	0
Δίας	0.000954589	1	1
Κρόνος	0.000285813	1.8362518	0.402819
Ουρανός	$4.36575 \cdot 10^{-5}$	3.70287362	0.141194
Ποσειδώνας	$5.15006 \cdot 10^{-5}$	5.81137914	0.071983

2.3 Εισαγωγή απωλεστικών δυνάμεων

2.3.1. Γενικά

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, ο BZ509 παγιδεύτηκε στο ηλιακό σύστημα την εποχή που οι πλανήτες ήταν ακόμα πολύ νεαροί. Για να εισάγουμε λοιπόν στο μοντέλο μας το φαινόμενο του περιαστρικού δίσκου, θα θεωρήσουμε πως σε μια κατανομή κυκλικού δίσκου γύρω από τον ήλιο υπάρχει ύλη, η οποία περιστρέφεται κατά την ορθή φορά σε κυκλική τροχιά γύρω από τον ήλιο. και τα χαρακτηριστικά αυτής της σκόνης εξαρτώνται από το μέγεθος της. Με την παραδοχή αυτή, μπορούμε να εξετάσουμε την επίδραση που θα είχε η νεαρότητα του ηλιακού συστήματος στην τροχιά του αστεροειδή, μέσω της τριβής του αστεροειδή με τη σκόνη του δίσκου. Εξετάζουμε την ύπαρξη της σε 2 περιοχές με 2 διαφορετικά μοντέλα. Στο πρώτο μοντέλο θα θεωρήσουμε ότι υπάρχει ένα μίγμα σκόνης ή/και αερίων στην περιοχή όπου βρίσκονται πλέον οι γήινοι πλανήτες και είναι πυκνότερη, ενώ στο δεύτερο θεωρούμε ότι είναι αραιότερη, και έχει μείνει μόνο στα σημεία έξω από τη ζώνη Edgeworth-Kuiper.

2.3.2. Οι νέες εξισώσεις

Θεωρούμε ότι ο δίσκος αερίων και σκόνης κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τον ήλιο με ταχύτητα \vec{u}_c , η οποία δίνεται από την

$$\vec{u}_c = \sqrt{\frac{Gm_0}{r}} \hat{e}_\theta = \sqrt{\frac{1}{r}} \hat{e}_\theta \quad (2.19)$$

όπου e_θ το μοναδιαίο διάνυσμα των πολικών συντεταγμένων.

Η δύναμη που ασκεί η ύλη πάνω στον αστεροειδή θεωρείται ανάλογη της σχετικής ταχύτητας (νόμος Stokes)

$$\vec{F}_d = -c(\vec{u} - \vec{u}_c) \quad (2.20)$$

όπου c ο συντελεστής δύναμης.

Χρησιμοποιώντας ότι

$$e_\theta = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} \quad (2.21)$$

αναλύουμε την \vec{u}_c σε καρτεσιανές συνιστώσες, και γράφεται ως

$$\vec{u}_c = -u_c \sin\theta\hat{i} + u_c \cos\theta\hat{j} = -u_c \frac{y}{r}\hat{i} + u_c \frac{x}{r}\hat{j} \quad (2.22)$$

Έτσι, γράφοντας τη δύναμη συναρτήσεως των x, y, r και των παραγώγων τους, έχουμε

$$F_d = -c\left[\left(\dot{x} + \frac{y}{3}\right)\hat{i} + \left(\dot{y} - \frac{x}{3}\hat{j}\right)\right] \quad (2.23)$$

Προσθέτοντας τις συνιστώσες της (2.24) στις (2.15) και (2.16), για να πάρουμε τη νέα μορφή της επιτάχυνσης, και κρατώντας ίδιες τις διαφορικές εξισώσεις της ταχύτητας, καταλήγουμε στο νέο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$u_x = \dot{x} \quad (2.24)$$

$$u_y = \dot{y} \quad (2.25)$$

$$\ddot{x} = -\sum_{i=0}^4 \frac{GM_i(x-x_i)}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2)^{\frac{3}{2}}} - c\left(\dot{x} + \frac{y}{3}\right) \quad (2.26)$$

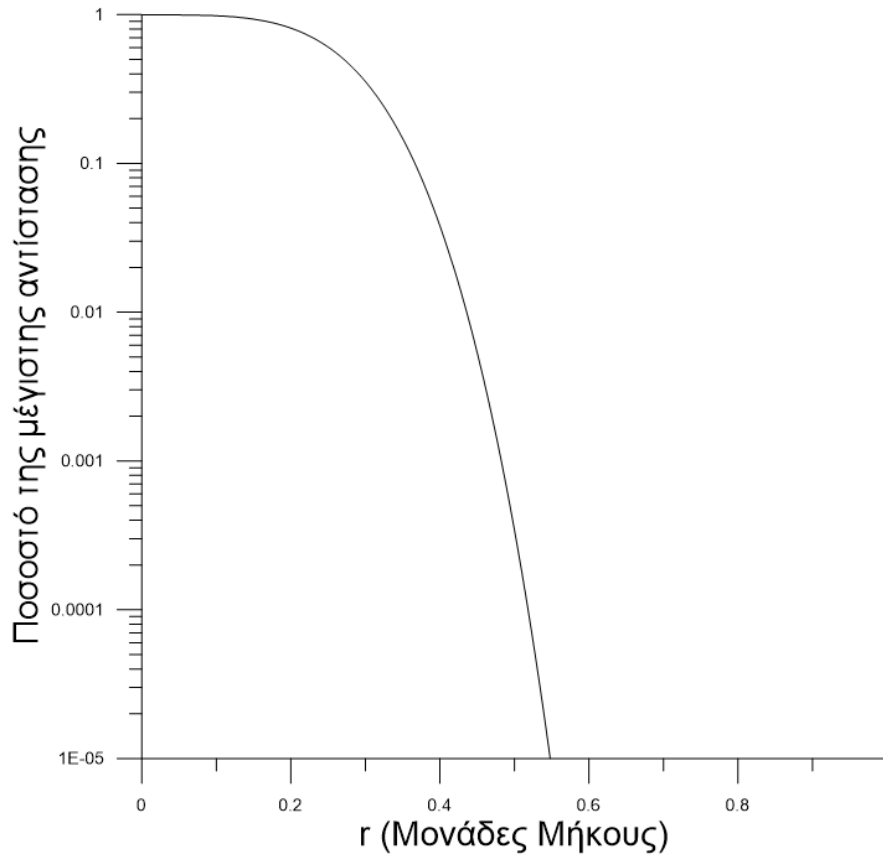
$$\ddot{y} = -\sum_{i=0}^4 \frac{GM_i(y-y_i)}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2)^{\frac{3}{2}}} - c\left(\dot{y} - \frac{x}{3}\right) \quad (2.27)$$

2.3.3. Σκόνη στο εσωτερικό του ηλιακού συστήματος

Στο συγκεκριμένο μοντέλο θεωρούμε την ύπαρξη σκόνης στο εσωτερικό του ηλιακού συστήματος, και κυρίως γύρω από τον ήλιο. Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 2.3.2., το προφίλ της δύναμης αντίστασης δίνεται από τη συνάρτηση $c(r)$, που παίρνει τη μορφή της 2.28 και μας δίνει το προφίλ που βλέπουμε στο γράφημα 2.

$$c(r) = 10^{-3}e^{-128r^4} \quad (2.28)$$

Η συνάρτηση επιλέχθηκε έτσι ώστε η ταχύτητα να πέφτει απότομα καθώς απομακρυνόμαστε από τον ήλιο. Η σταθερά 128 επιλέχθηκε μετά από δοκιμές με τέτοιο τρόπο ώστε η ταχύτητα να φτάνει το 1/100 της μέγιστης (δηλαδή 10^{-5}) σε απόσταση 0.42 μονάδες μήκους, απόσταση που αντιστοιχεί στο εσωτερικό άκρο της κύριας ζώνης των αστεροειδών.



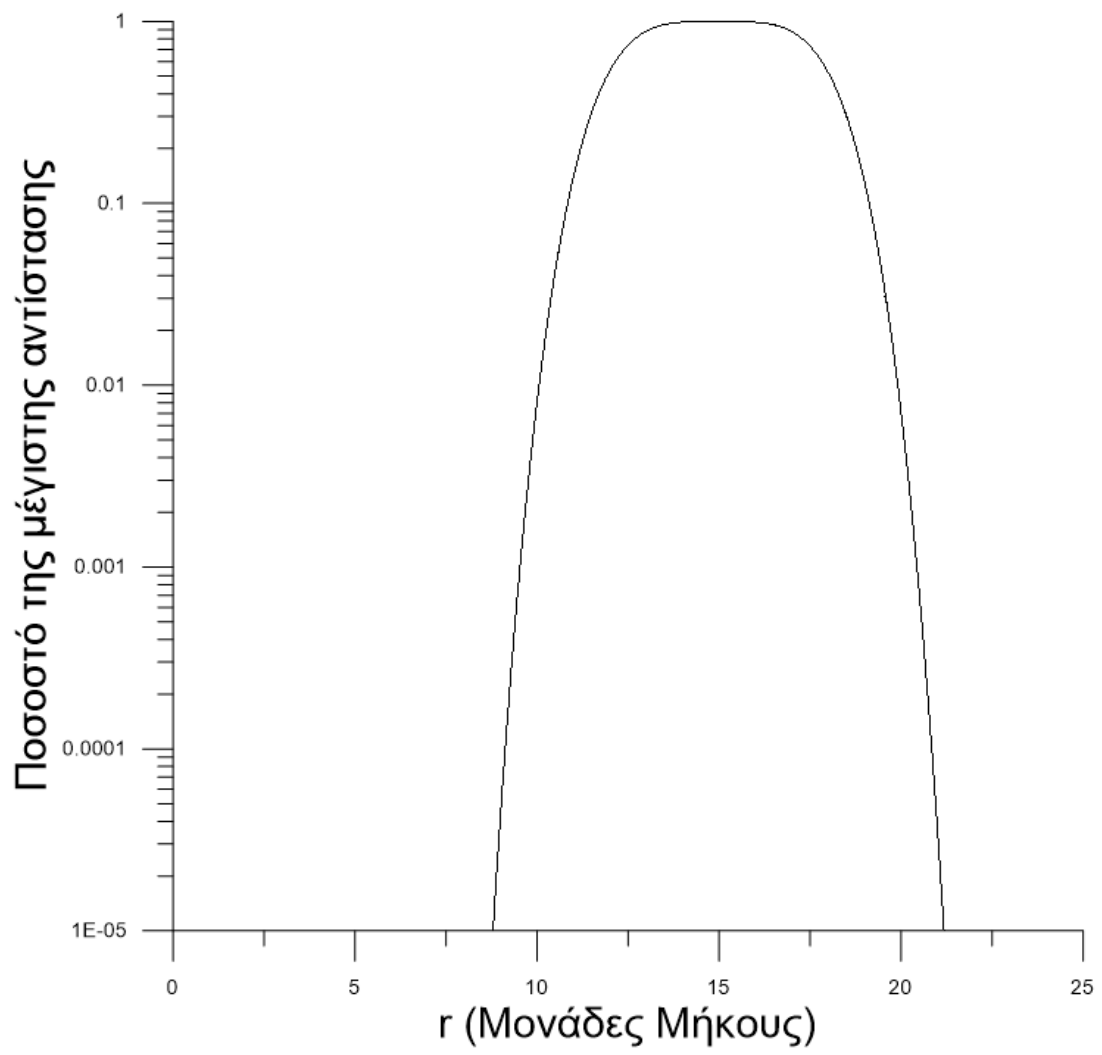
Γράφημα 2: Το προφίλ ταχυτήτων για τη σκόνη εντός του ηλιακού συστήματος

3.2.3. Σκόνη στο εξωτερικό του ηλιακού συστήματος

Σε αυτό το μοντέλο κάνουμε μία αντίστοιχη θεώρηση, μόνο που η σκόνη υπάρχει έξω από το ηλιακό σύστημα, μετά τη ζώνη Edgeworth-Kuiper. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η αντίσταση δίνεται από την 2.29, η οποία μας δίνει το προφίλ του γραφήματος 3.

$$c(r) = 10^{-5} e^{-\frac{1}{128}(r-15)^4} \quad (2.29)$$

Η επανεμφάνιση του αριθμού 128 είναι τυχαία, καθώς πάλι επιλέχθηκε δοκιμαστικά με το κριτήριο η τιμή να πέφτει στο 1/100 της μέγιστης στις 10 και στις 20 μονάδες μήκους, στα σημεία δηλαδή που αντιστοιχούν στο τέλος της ζώνης Edgeworth-Kuiper και στην περιοχή του μεσοαστρικού υλικού.

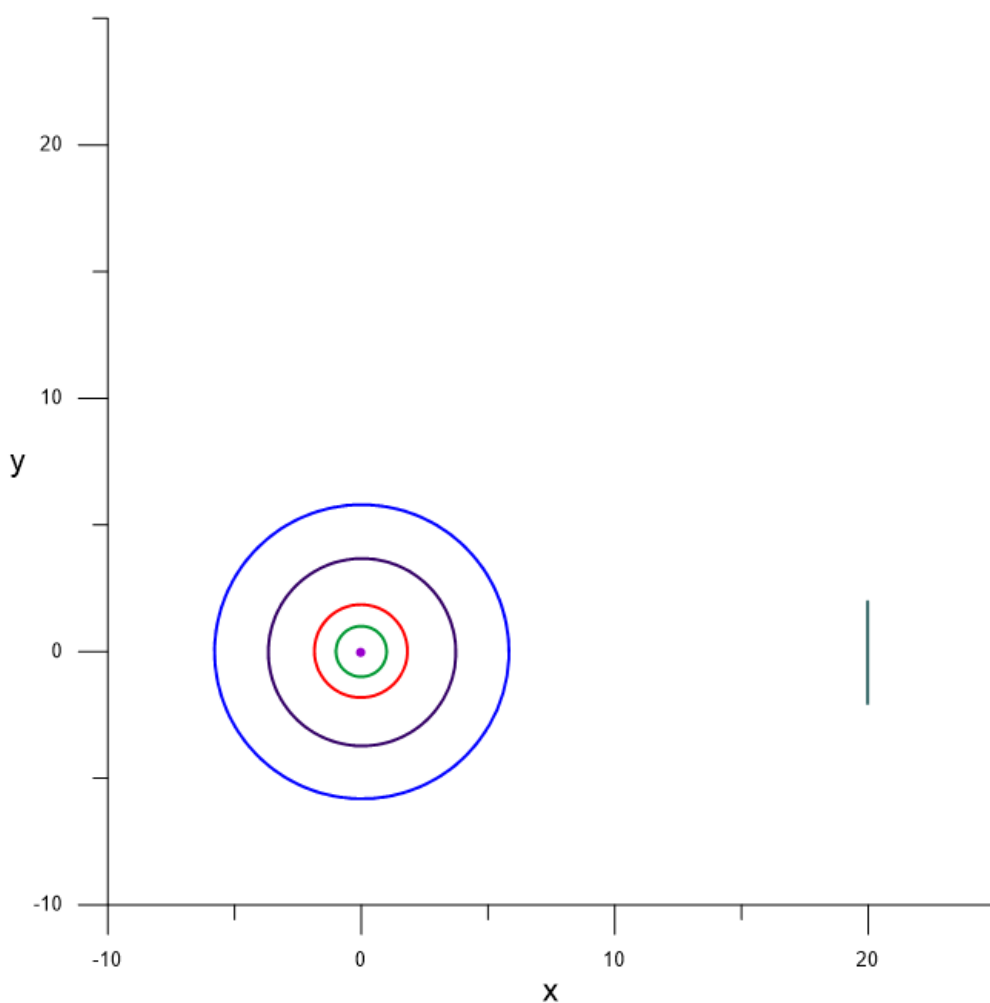


Γράφημα 3: Το προφίλ ταχυτήτων για τη σκόνη εκτός του ηλιακού συστήματος

2.4 Ο αστεροειδής και οι αρχικές συνθήκες

Αναφέραμε ήδη πως οι τροχιές των πλανητών θεωρούνται μη μεταβαλλόμενες για τις προσομοιώσεις μας, το οποίο σημαίνει πως αποδίδουμε στον αστεροειδή πλήρως αμελητέα μάζα, και δεν μπορεί να επηρεάσει τα υπόλοιπα αστρικά σώματα που έχουμε εισάγει στο μοντέλο.

Ως αρχική θέση του αστεροειδή επιλέγουμε τις συντεταγμένες $(x_0, y_0) = (20, d)$, όπου d ονομάζουμε την παράμετρο κρούσης. (Εικόνα 5)



Εικόνα 6: Θέση των αρχικών συνθηκών σε σχέση με το ηλιακό σύστημα. Με το πράσινο, κόκκινο, μωβ, και μπλε χρώμα σχεδιάζονται οι τροχιές του Δία, του Κρόνου, του Ουρανού και του του Ποσειδώνα αντίστοιχα

Οι 20 μονάδες μήκους έχουν επιλεγεί κατάλληλα ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε αρχικά ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση με το σύστημα, χωρίς όμως να σπαταλούνται πόροι για πρόσθετους αριθμητικούς υπολογισμούς με χρήση αρχικών συνθηκών μεγαλύτερων αποστάσεων. Έτσι, μπορούμε να θεωρούμε ότι ο αστεροειδής είναι εξωηλιακός, καθώς οι 20 μονάδες μήκους αντιστοιχούν περίπου στο άκρο της ηλιόπαυσης (100 AU) και στην περιοχή έναρξης του μεσοαστρικού μέσου, χωρίς να ξοδεύεται χρόνος και μνήμη για δεδομένα που θα συλλέγαμε αν επιλέγαμε για αρχική θέση το νέφος του Oort.

Η παράμετρος κρούσης d είναι μεταβλητό σκέλος της αρχικής θέσης. Ο σκοπός που επιτυγχάνει αυτό είναι το να έχουμε σωστή εποπτεία πάνω στη στατιστική των δεδομένων. Μεταβάλλοντας δηλαδή την παράμετρο κρούσης αποφεύγουμε το να επιλεγεί αυθαίρετα μία αρχική τιμή η οποία συχνότερα θα ωφελεί ή θα παρεμποδίζει την παγίδευση, καταφέροντας έτσι να έχουμε μια πληρέστερη και αντικειμενικότερη εξέταση των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης. Ταυτόχρονα, μπορούμε να ελέγξουμε αν η παράμετρος κρούσης παίζει σημαντικό ρόλο στη παγίδευση, ή μη, των αστεροειδών, ελέγχοντας παραδείγματος χάριν τη διαφορά στους χρόνους ζωής για τροχιές με μεγάλη έναντι μικρής παραμέτρου κρούσης, πώς αλλάζει η στατιστική εικόνα για αστεροειδείς με ορθή αντί για ανάδρομη φορά κτλ. Το d παίρνει τιμές $-2 < d < 2$, με τις αρνητικές τιμές να υποδηλώνουν αρχικά ανάδρομη τροχιά, και τις θετικές να υποδηλώνουν ορθή. Να σημειωθεί ότι στις προσομοιώσεις δεν παίρνεις συνεχείς τιμές, αλλά ξεκινάει από τα άκρα (-2 για τις ανάδρομες, $+2$ για τις ορθές τροχιές) και έχει βήμα 0.06 , ενώ αυξάνεται ή μειώνεται αντίστοιχα μέχρι να φτάσει κατά απόλυτο την τιμή 0.02 .

Η αρχική ταχύτητα του αστεροειδή είναι πλήρως παράλληλη ως προς τον άξονα x , έχει δηλαδή τη μορφή $(v_{x0}, v_{y0}) = (0, -u_0)$, με το αρνητικό πρόσημο να εισάγεται ώστε ο αστεροειδής να έχει κατεύθυνση προς το ηλιακό σύστημα. Επειδή θέλουμε να μελετήσουμε παγιδεύσεις αποφεύγουμε τη χρήση ταχυτήτων υπερβολικών τροχιών, αλλά και ελλειπτικών. Συνεπώς το μέτρο της αρχικής ταχύτητας u_0 δίνεται από την ταχύτητα μιας παραβολικής τροχιάς. Σημειώνουμε ότι στον υπολογισμό της ταχύτητας της παραβολικής τροχιάς λαμβάνουμε υπ' όψιν μας μόνο τη μάζα του Ήλιου και όχι των πλανητών. Τελικά η ταχύτητα δίνεται από την

$$u_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0(t=0)}} \quad (2.30)$$

όπου $r_0(t=0) = \sqrt{20^2 + d^2}$ και μ η παράμετρος μάζας, η οποία υπολογίζεται από τη σχέση

$$\mu = G(m_0 + m_*) \quad (2.31)$$

Όπως είπαμε όμως η μάζα του αστεροειδή είναι πλήρως αμελητέα άρα χρησιμοποιούμε ότι

$$\mu = Gm_0 = 1 \quad (2.32)$$

Η επιλογή της ταχύτητας παραβολική τροχιάς έχει γίνει με βάση το κριτήριο ότι η ειδική ενέργεια για $t = 0$ παίρνει τη μορφή

$$\epsilon = \frac{u^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} = 0 \quad (2.33)$$

μία παραδοχή που έχει χρησιμοποιηθεί σε δημοσιεύσεις που μελετούν αντίστοιχα προβλήματα παγίδευσης μέσω αριθμητικών προσομοιώσεων.^{[8][9]}

Για την αποφυγή της βλάβης της γενικότητας, οφείλουμε να μεταβάλλουμε και τις αρχικές θέσεις των πλανητών. Όπως και με την παράμετρο κρούσης d , έτσι και με τις θέσεις των πλανητών, η επιλογή μιας τυχαίας αρχικής θέσης μπορεί να παραμορφώσει τη στατιστική που θα πάρουμε, αν οι θέσεις αυτές υποβοηθούν ή παρεμποδίζουν συστηματικά την παγίδευση. Ο τρόπος με τον οποίον επιτυγχάνεται η αλλαγή θέσης των πλανητών, για να αποφύγουμε να επιλέγουμε αυθαίρετα θέσεις ανατρέχοντας στις εφημερίδες είναι η μεταβολή του αρχικού χρόνου t_0 . Αλλάζοντας τον αρχικό χρόνο ουσιαστικά μεταβάλλουμε την αρχική φάση της τροχιάς του πλανήτη, μετατοπίζοντας με αυτόν τον τρόπο τους πλανήτες, αλλά κρατώντας τις ορθές σχετικές θέσεις μεταξύ τους. Ο χρόνος t_0 αλλάζει στο διάστημα $[0,128]$ με βήμα 0.1 .

2.5 Συνθήκες της παγίδευσης

Για να υπάρξει παγίδευση στο ηλιακό σύστημα θεωρούμε ότι πρέπει να πληρούνται 2 προϋποθέσεις:

- α) Για σχετικά μεγάλο χρονικό διάστημα (>8 Kyr) ο αστεροειδής να βρίσκεται εντός του ηλιακού συστήματος, του οποίου τα όρια έχουμε θέσει στο άκρο της ζώνης Edgeworth-Kuiper, στις 10 μονάδες μήκους
- β) Να έχει χαμηλή εκκεντρότητα ($e < 0.9$) ώστε να αντικατοπτρίζει την εικόνα των υπαρκτών ανάδρομων αστεροειδών με τιμές ημιάξονα μέχρι 50 AU (≈ 10 μονάδες μήκους) που βρίσκονται κοντά στο επίπεδο

Επιλέγοντας αυτά τα κριτήρια μπορούμε να ελέγξουμε τις τροχιές που μας ενδιαφέρουν και να δούμε υπό ποιες συνθήκες και πιθανώς με τι μηχανισμό γίνονται οι παγιδεύσεις, αλλά και να εξετάσουμε τις τροχιές που δεν πληρούν τα κριτήρια αυτά και να εντοπίσουμε πώς και γιατί διαφέρουν με τις υπόλοιπες. Σημειώνουμε επίσης, ότι το κριτήριο α, δηλαδή το χρονικό διάστημα για το οποίο ο αστεροειδής έχει $|\vec{r}| < 10$ για το υπόλοιπο της εργασίας θα αναφέρεται ως «διάρκεια της τροχιάς», και είναι και το κυριότερο κριτήριο βάσει του οποίου θα κατηγοριοποιήσουμε τις τροχιές στα αποτελέσματα των προσομοιώσεων.

Παράλληλα, τονίζουμε ότι ένα χρήσιμο «εργαλείο» του ηλιακού συστήματος ως προς την παγίδευση ίσως είναι το κοντινό πέρασμα του αστεροειδή από τους πλανήτες, οι λεγόμενες κοντινές προσεγγίσεις. Μέσω αυτού του μηχανισμού, η ισχυρή βαρυτική αλληλεπίδραση με τον εκάστοτε πλανήτη μπορεί να μεταβάλλει δραματικά τα τροχιακά χαρακτηριστικά του αστεροειδή, προσφέροντας του πιθανώς τις κατάλληλες συνθήκες για να παγιδευτεί.

2.6 Μέθοδος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

Ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνουμε την αριθμητική ολοκλήρωση στις προσομοιώσεις για να έχουμε την επιθυμητή ακρίβεια περιλαμβάνει μια μίξη δύο μεθόδων ολοκλήρωσης, της Bulirsch-Stoer και της Runge-Kutta.

Στον αλγόριθμο Bulirsch-Stoer, δίνοντας ένα βήμα H , γίνεται υπολογισμός της συνάρτησης y στο διάστημα $(x, x + H)$ με πολλά διαφορετικά υποβήματα n . Έτσι για 2 υποβήματα παίρνουμε μία τιμή της λύσης, για 3 υποβήματα μία νέα τιμή κ.ο.κ. Θεωρώντας την λύση μια συνάρτηση $f(h)$ της μεταβλητής $h = H/n$, η Bulirsch-Stoer δίνει την λύση κάνοντας παρεκβολή της f για $h = 0$, δηλαδή καθώς $n \rightarrow \infty$. Προφανώς δεν γίνεται το n να πάρει άπειρη τιμή, οπότε επιλέγουμε έναν αρκετά μεγάλο αριθμό ώστε να έχουμε την ζητούμενη ακρίβεια.

Σε περίπτωση που το n δεν είναι τόσο μεγάλο όσο χρειάζεται (δηλαδή στο $x + H$ η τιμή της y παραμένει ίδια με βάση την ακρίβεια που έχουμε θέσει) τότε η προσομοίωση τρέχει με αλγόριθμο Runge-Kutta.

Ο αλγόριθμος Runge-Kutta είναι ένας αλγόριθμος σταθερού βήματος, δηλαδή δίνοντας τις αρχικές συνθήκες $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$, για χρόνο t_0 και θέτοντας το βήμα dt , θα πάρουμε τις τιμές του συστήματος για χρόνο t_0+dt .

Η προσομοίωση συνεχίζει να χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο Runge-Kutta για όσο ο αλγόριθμος Bulirsch-Stoer έχει ακρίβεια μικρότερη από τη ζητούμενη.

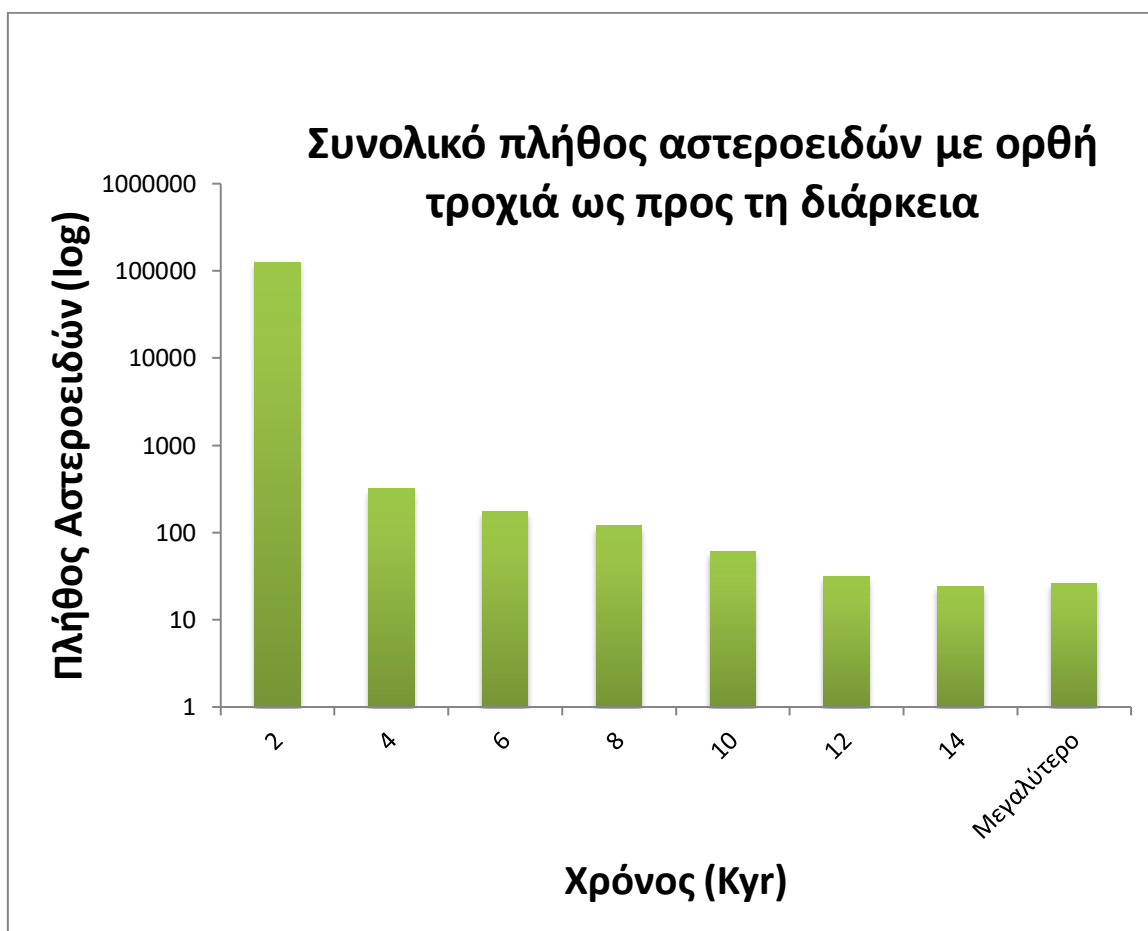
Συγκεκριμένα, έχουμε θέσει στις μεταβλητές ακρίβεια $acc = 10^{-12}$ και χρονικό βήμα $dt=0.0001$.

Επίσης για την εξοικονόμηση υπολογιστικών πόρων, σε περιπτώσεις όπου ο αστεροειδής φτάσει πολύ κοντά στον ήλιο ($r < 0.052$ AU) ή αν έχει θετική ενέργεια και απομακρυνθεί πολύ ($> 1,000$ AU) η προσομοίωση διακόπτεται.

3. Προσομοιώσεις και αποτελέσματα

3.1 Αστεροειδείς σε ορθή τροχιά

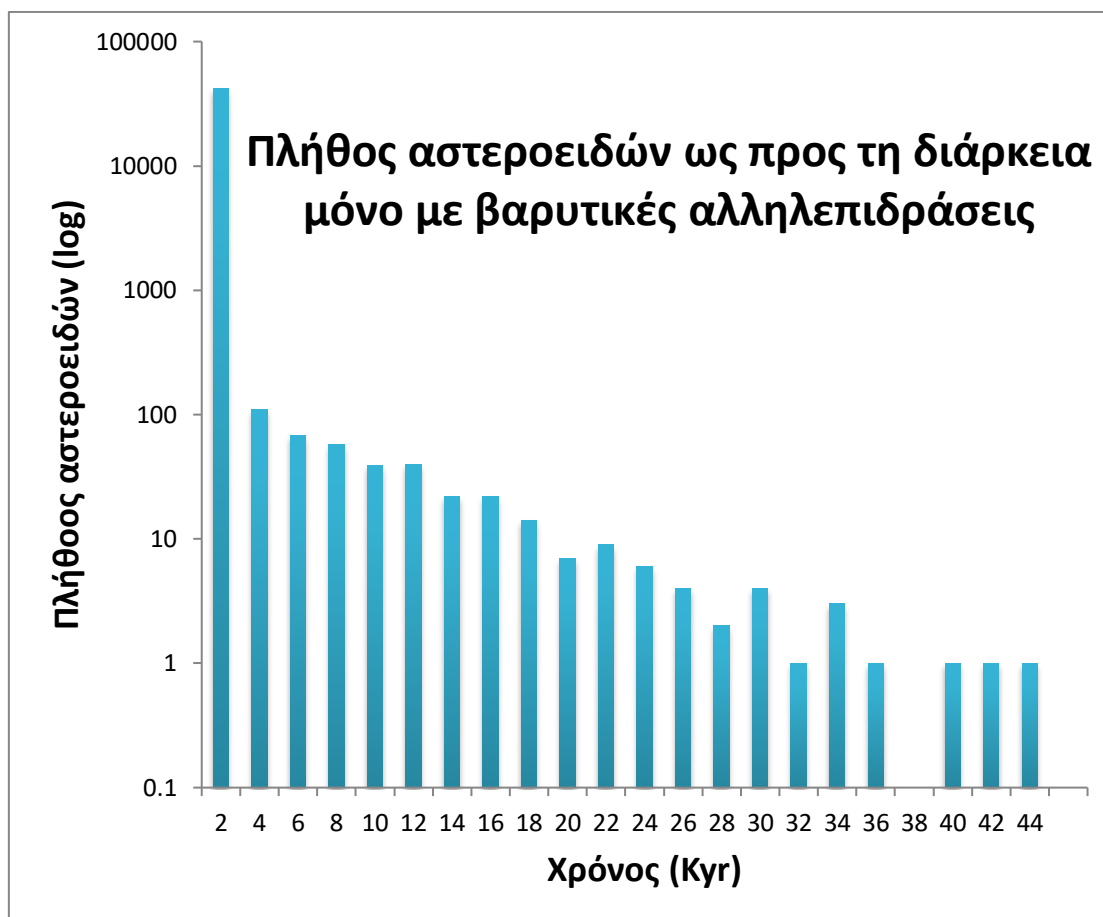
Από όλες τις τροχιές με θετικό d που υπολογίστηκαν, συνολικά και για τα 3 μοντέλα, μόνο το 0.11% είχε διάρκεια μεγαλύτερη των 8 Kyr (γράφημα 4). Όταν εξετάστηκαν μάλιστα, καμία δεν βρέθηκε να έχει τα χαρακτηριστικά τα οποία ψάχνουμε, καθώς ακόμα και σε αυτές με μεγάλους χρόνους καμία δεν βρέθηκε να έχει χαμηλή εκκεντρότητα. Δεν υπήρξε μεγάλη μεταβολή των αποτελεσμάτων μεταξύ των διαφορετικών μοντέλων, καθώς η δύναμη F_d είναι ανάλογη της σχετικής ταχύτητας, η οποία είναι συγκριτικά ασήμαντη στην περίπτωση της ορθής τροχιάς. Είναι εμφανές ότι για τους ορθούς αστεροειδείς τα μοντέλα που χρησιμοποιούμε δεν δημιουργούν κάποιο μηχανισμό μακροχρόνιας παγίδευσης, καθώς και το ποσοστό με $\Delta t > 8$ Kyr αντιστοιχεί στο $\frac{1}{4}$ του αντίστοιχου για τους ανάδρομους, αλλά και για τις λίγες αυτές περιπτώσεις είχαμε χαοτικές τροχιές με μεγάλες εκκεντρότητες.



Γράφημα 4

3.2 Προσομοιώσεις υπό την επίδραση μόνο τις βαρύτητας

Συνολικά έγιναν 42,273 προσομοιώσεις για ανάδρομους αστεροειδείς. Η κατανομή του χρόνου ζωής φαίνεται στο γράφημα 4.



Γράφημα 5

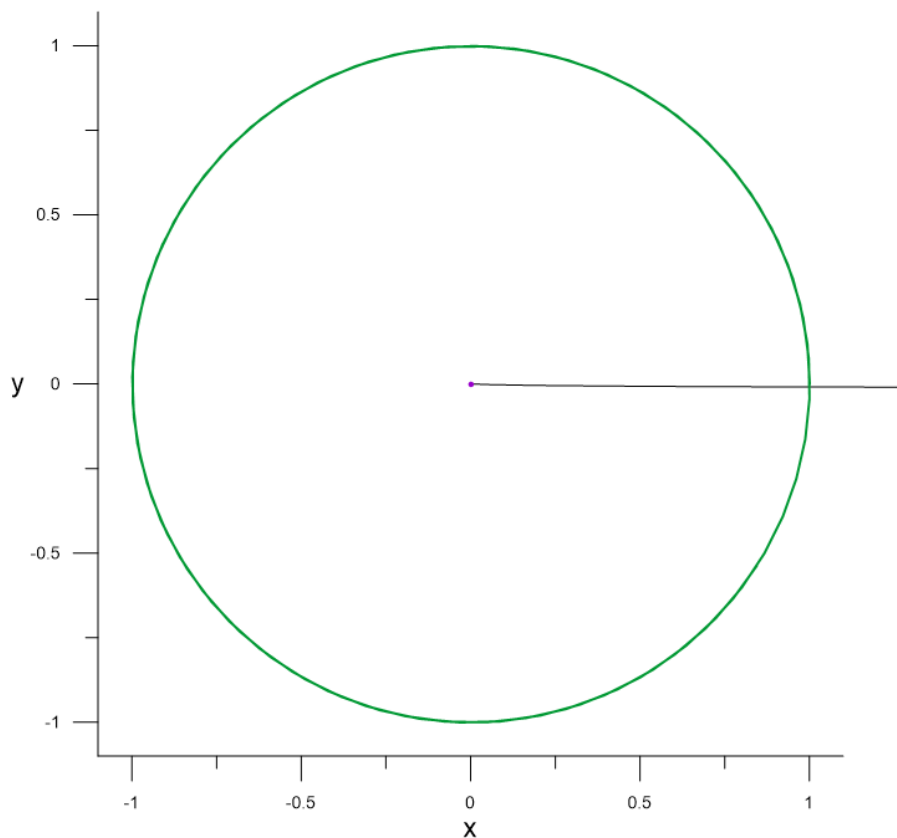
Παρατηρούμε πως οι αστεροειδείς με χρόνο ζωής εντός του ηλιακού συστήματος μεγαλύτερο των 8 Kyr αποτελούν τη μειοψηφία, όντας μόνο το 0.42%. Θα μπορούσε κανείς να εικάσει πως ο χρόνος δεν φαίνεται να παίρνει κάποια μέγιστη τιμή άρα δυνητικά ίσως υπάρχουν τροχιές που επιβιώνουν για μεγαλύτερους χρόνους, αλλά όλες οι τροχιές στις προσομοιώσεις δεν έτρεξαν καν για τον μέγιστο δυνατό χρόνο ο οποίος ήταν οι 50.000 μονάδες χρόνου ή περίπου 94 Kyr. Ο λόγος που οι προσομοιώσεις δεν συνέχισαν για τον μέγιστο χρόνο είναι επειδή έσπασαν έναν από τους δύο περιορισμούς που θέσαμε, δηλαδή είτε έφτασαν πάρα πολύ κοντά στον ήλιο και θεωρούμε ότι προσέκρουσαν πάνω του, είτε απομακρύνθηκαν πολύ, και με τέτοια ταχύτητα, ώστε να θεωρήσουμε ότι εκδιώχθηκαν από το ηλιακό σύστημα, όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.6.

Πιο συγκεκριμένα, ένα μεγάλο ποσοστό των αστεροειδών, κυρίως αυτό με d σχετικά μικρά (κατά απόλυτη τιμή) ώστε να βρίσκονται κοντά στον ήλιο, δεν έφτασαν καν στο σημείο να δημιουργήσουν

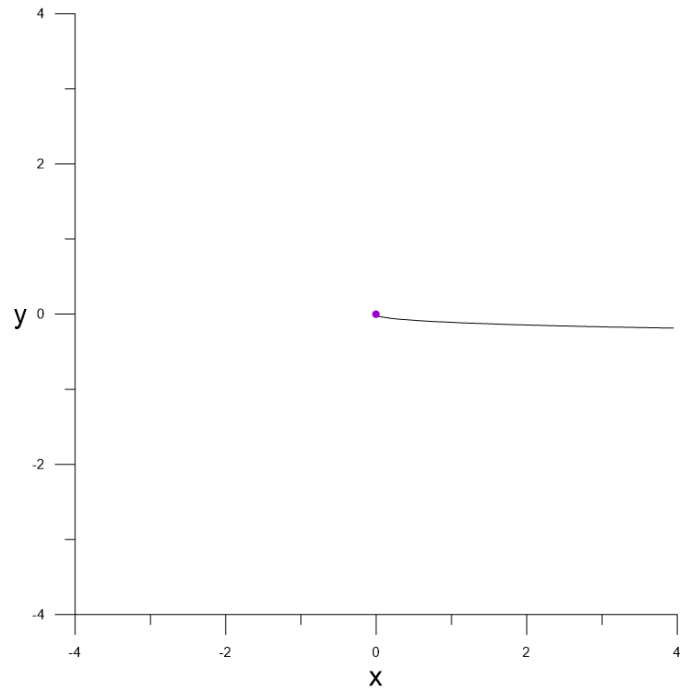
τροχιά, καθώς με την είσοδο τους στο ηλιακό σύστημα η ελάττωση της ενέργειας τους λόγω του βαρυτικού δυναμικού ήταν τέτοια που τα έστειλε πάνω στον ήλιο. Στη συνέχεια της παραγράφου σχολιάζονται οι διαφορετικές τροχιές με βάση τη διάρκεια διαμονής τους στο ηλιακό σύστημα, και όπου θεωρείται απαραίτητο αυτή αναγράφεται επάνω στο σχήμα.

- Τροχιές με διάρκεια έως 4 Kyr (99.28%)

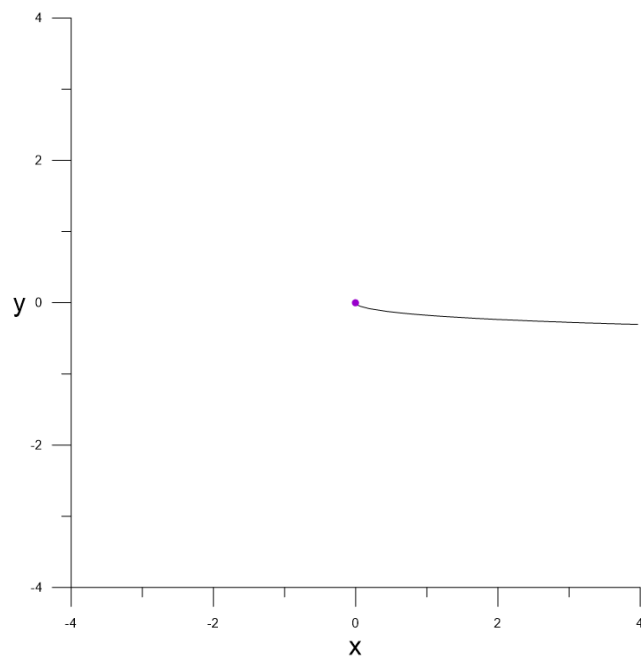
Όλες οι τροχιές για $-0.02 > d > -0.5$ κατέληξαν απ' ευθείας πάνω στον ήλιο όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα (1-3).



Σχήμα 1: Τροχιά για $t_0 = 0$, $d = -0.02$. Ο ήλιος στο $(0,0)$ με μωβ χρώμα (όχι σε κλίμακα)

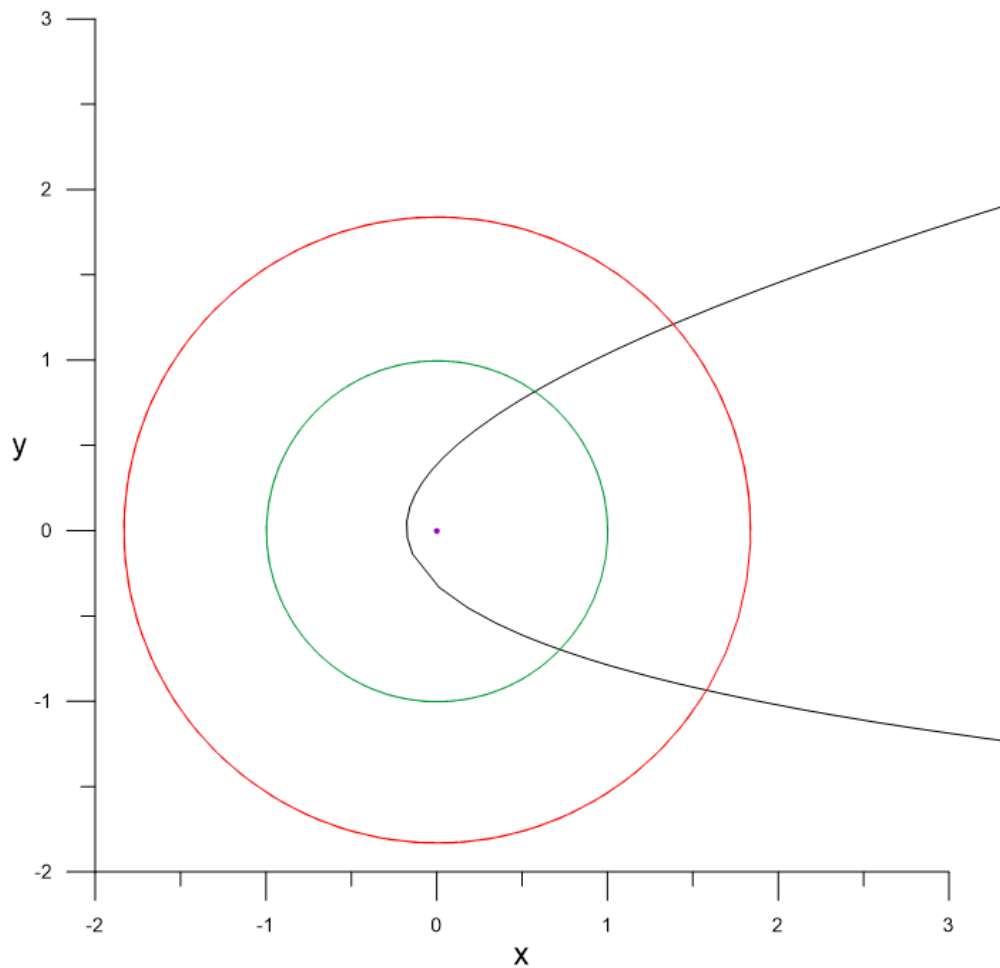


Σχήμα 2: Τροχιά για $t_0=32.2$, $d=-0.26$

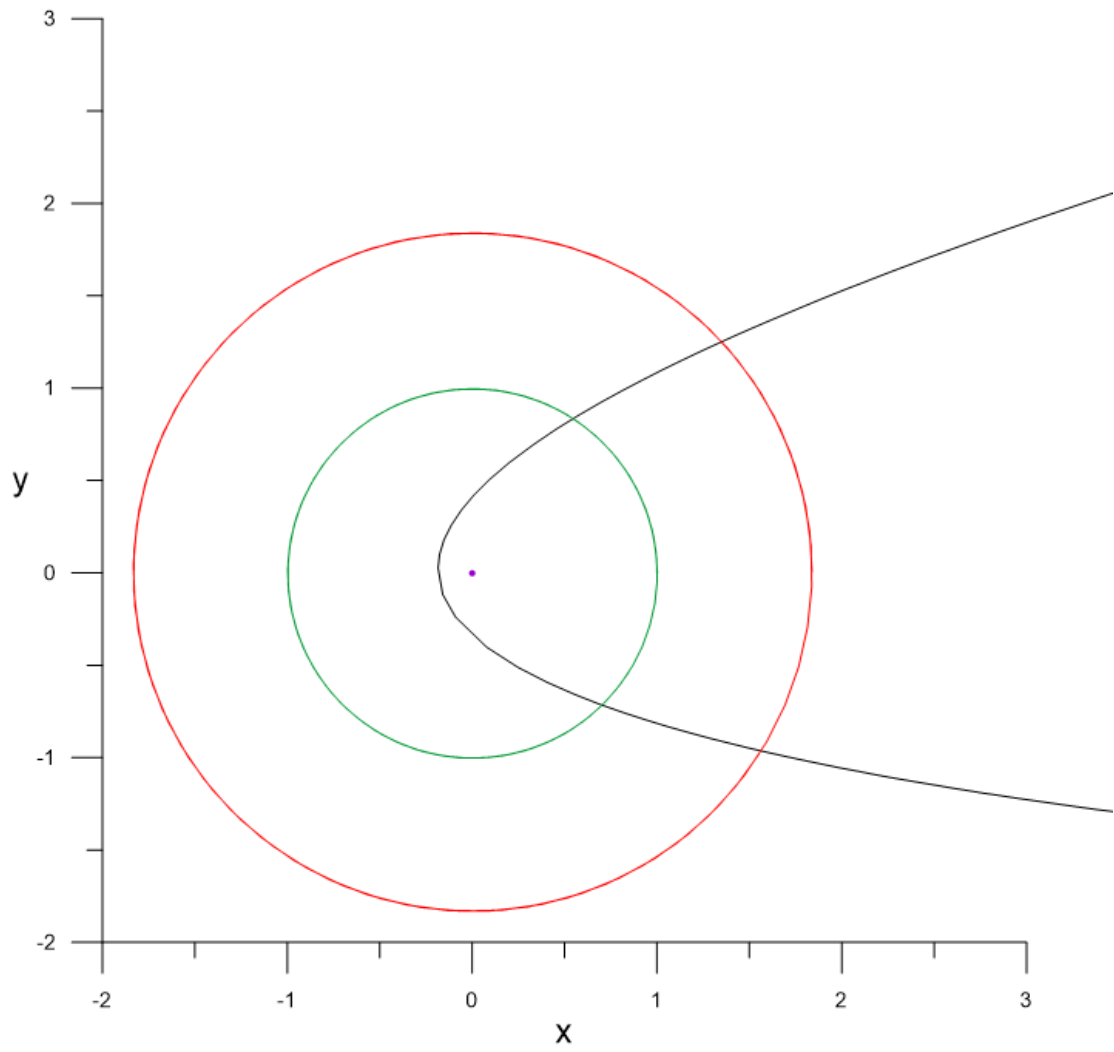


Σχήμα 3: Τροχιά για $t_0=8$, $d=-0.44$

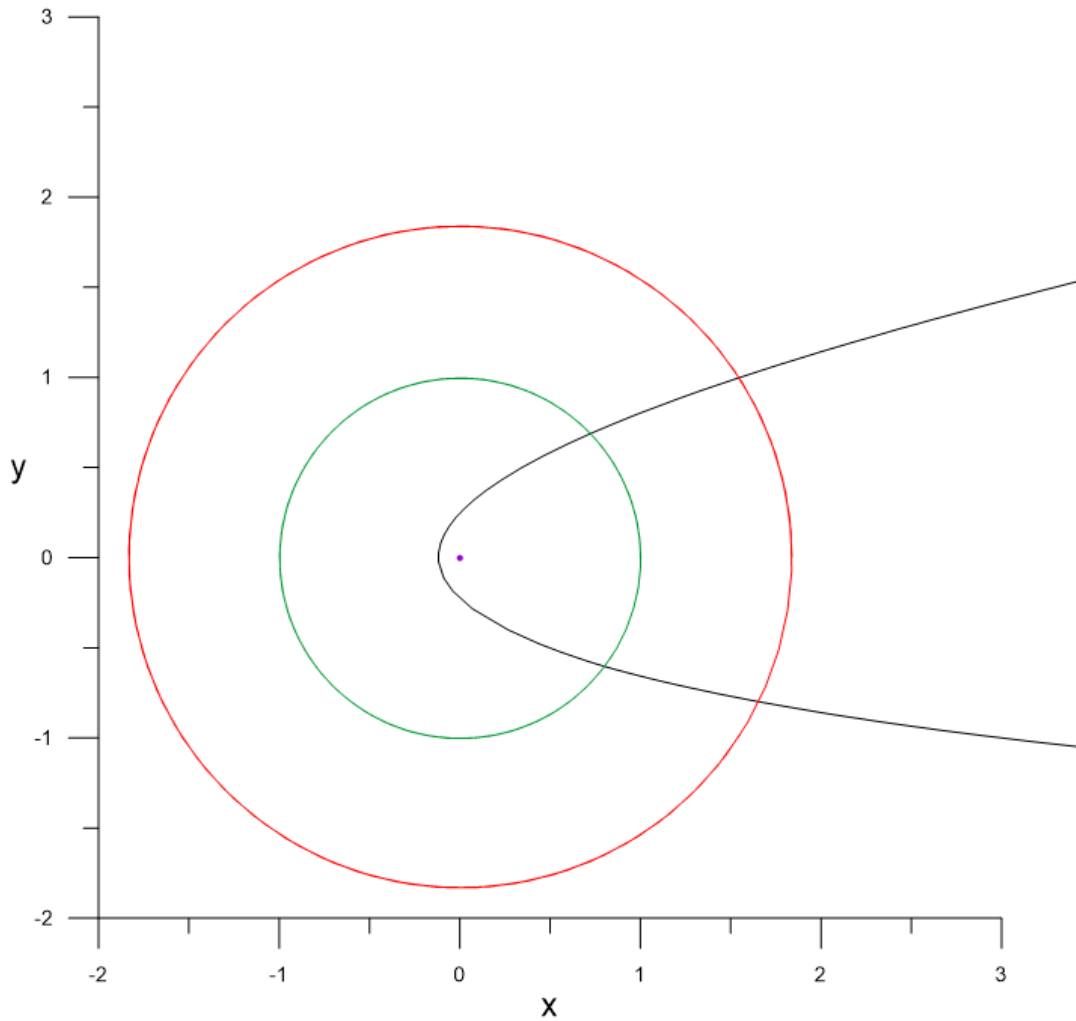
Επιπλέον, για όλες τις περιπτώσεις με $d=-1.88$ και $d=-1.94$, αλλά και μικρότερα d κατά απόλυτη τιμή, όπως π.χ $d=-1.28$ για πάλι είχαμε μικρούς χρόνους παραμονής, καθώς ο αστεροειδής ακολουθούσε την παραβολική τροχιά και διέφευγε από το ηλιακό σύστημα, όπως φαίνεται στα σχήματα 4 & 5.



Σχήμα 4: Τροχιά για $t_0 = 32.2$ και $d = -1.88$.

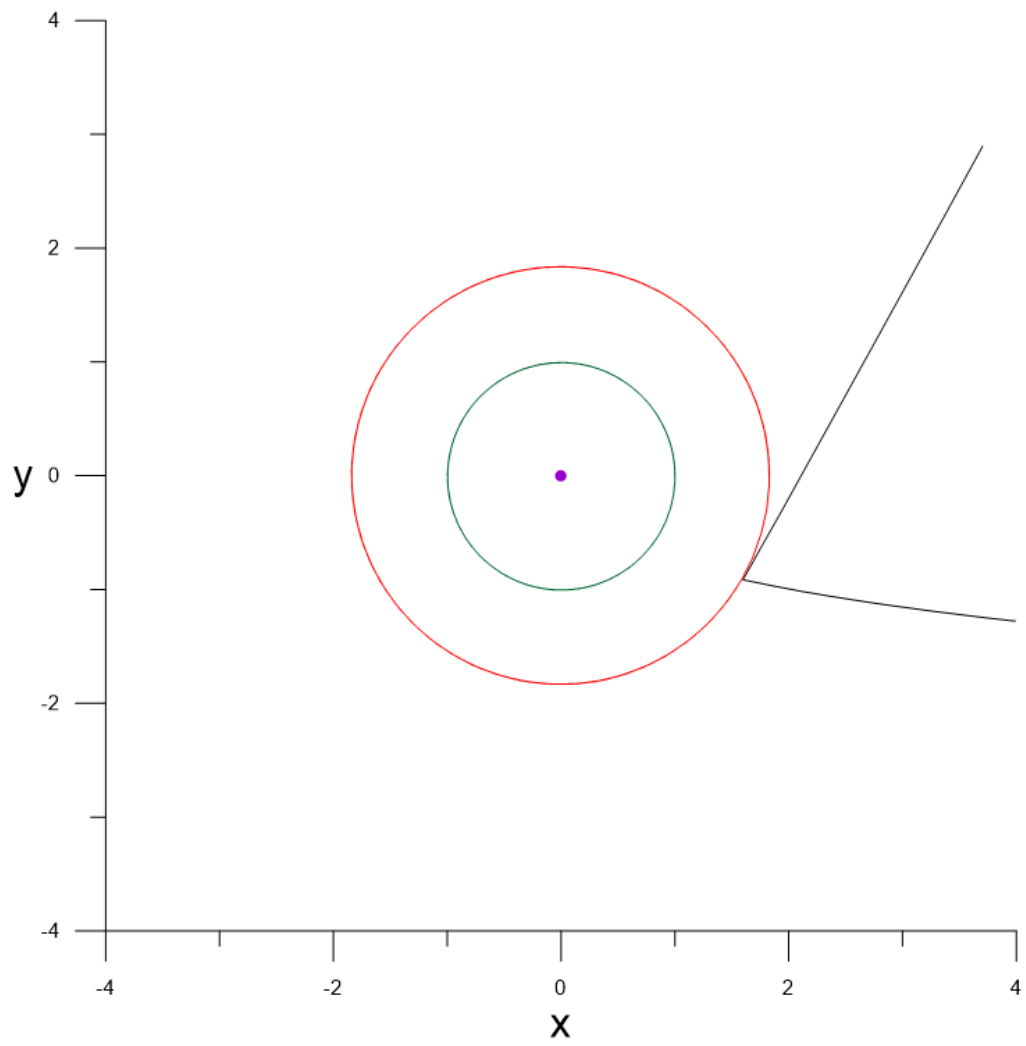


Σχήμα 5: Τροχιά για $t_0=26.6$ και $d=-1.94$

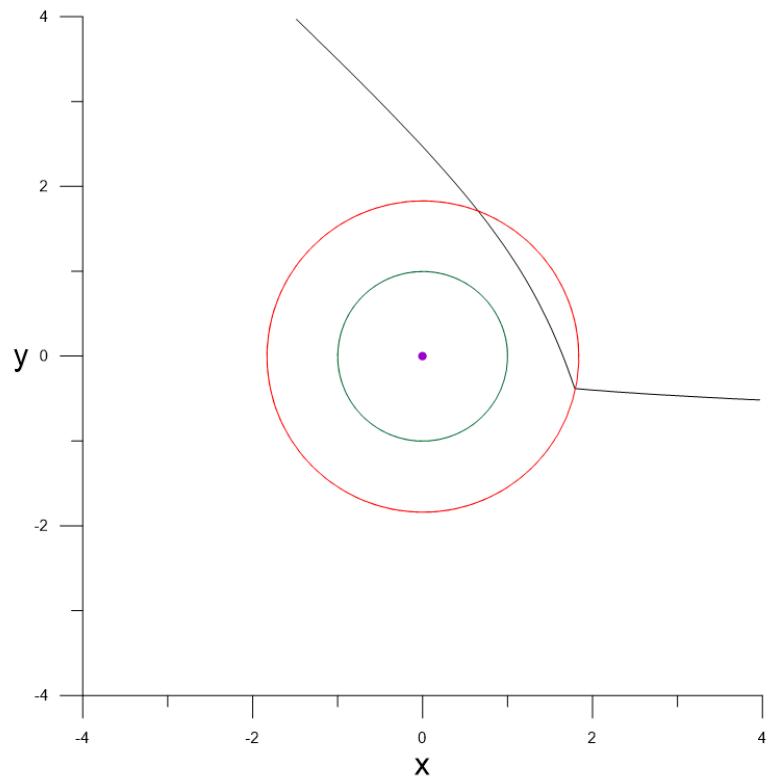


Σχήμα 6: Τροχιά για $t_0=32.3$ και $d=-1.58$

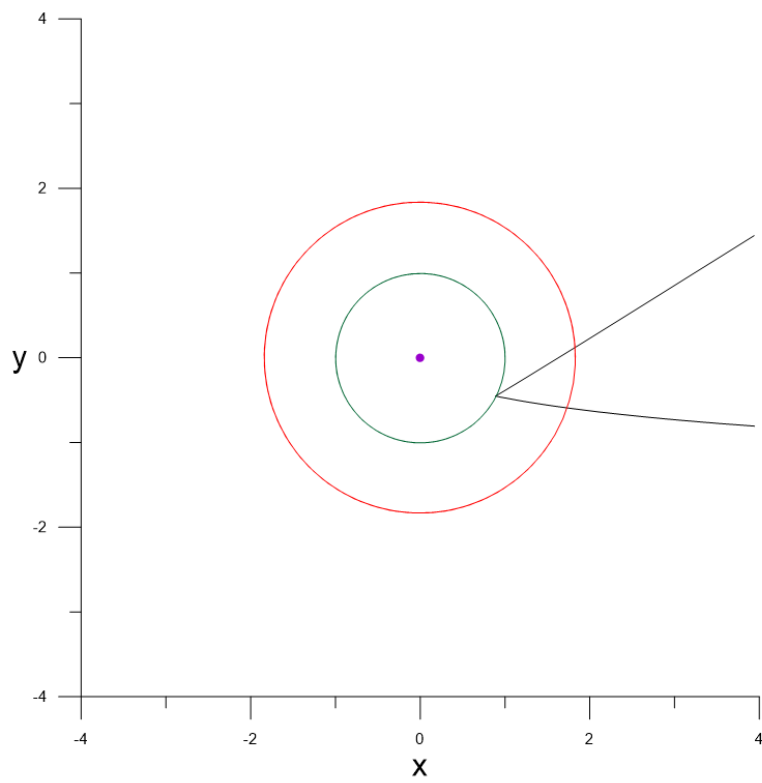
Μία ακόμη κατηγορία τροχιών που έδωσε μικρούς χρόνους παραμονής στο ηλιακό σύστημα είναι οι τροχιές οι οποίες έφτασαν πολύ νωρίς στη τροχιά τους κοντά σε πλανήτες και υπήρξε κοντινή προσέγγιση, κυρίως με το Δία, αλλά μερικές φορές και με τον Κρόνο. Μερικές από αυτές μάλιστα δεν προσπέρασαν καν τον ήλιο πριν διαφύγουν έξω από το σύστημα. (Σχήματα 7-10)



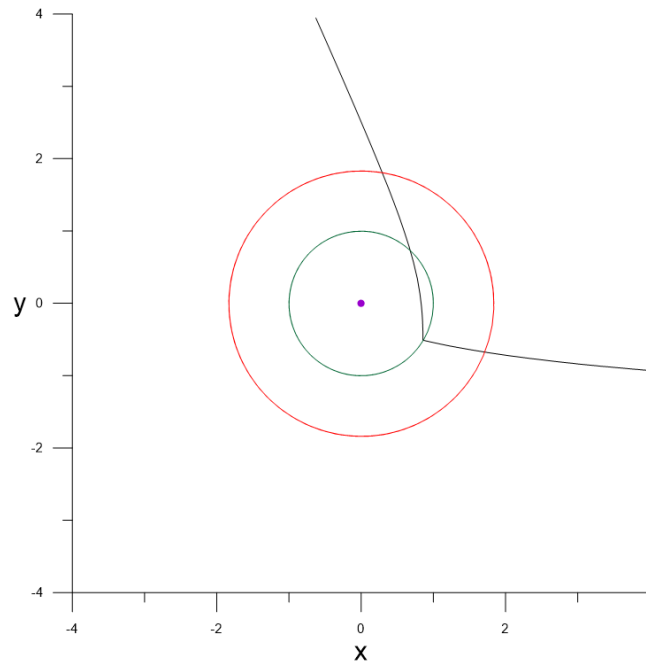
Σχήμα 7: Τροχιά για $t_0=99.2$ και $d=-1.82$.



Σχήμα 8: Τροχικά για $t_0=100.5$ και $d=-0.74$

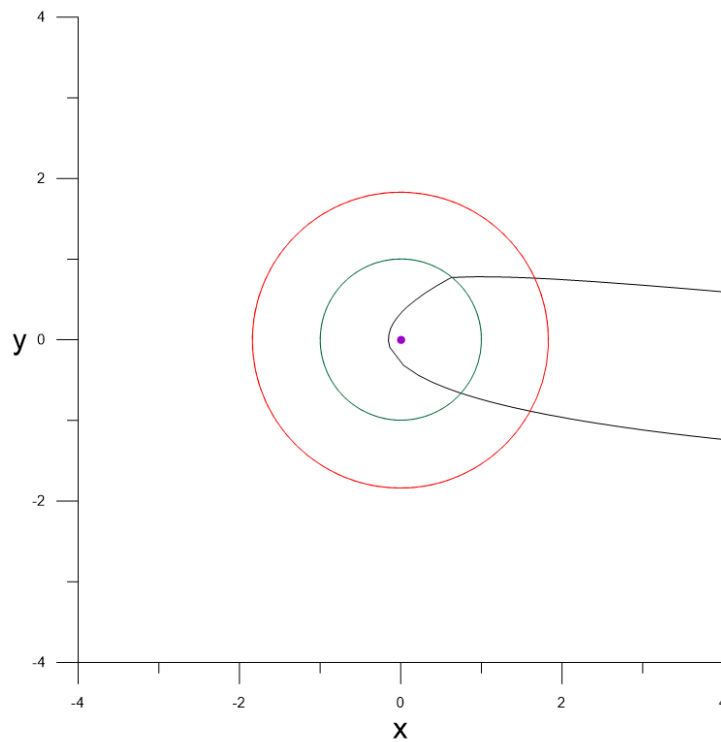


Σχήμα 9: Τροχιά για $t_0=89.2$ και $d=-1.16$

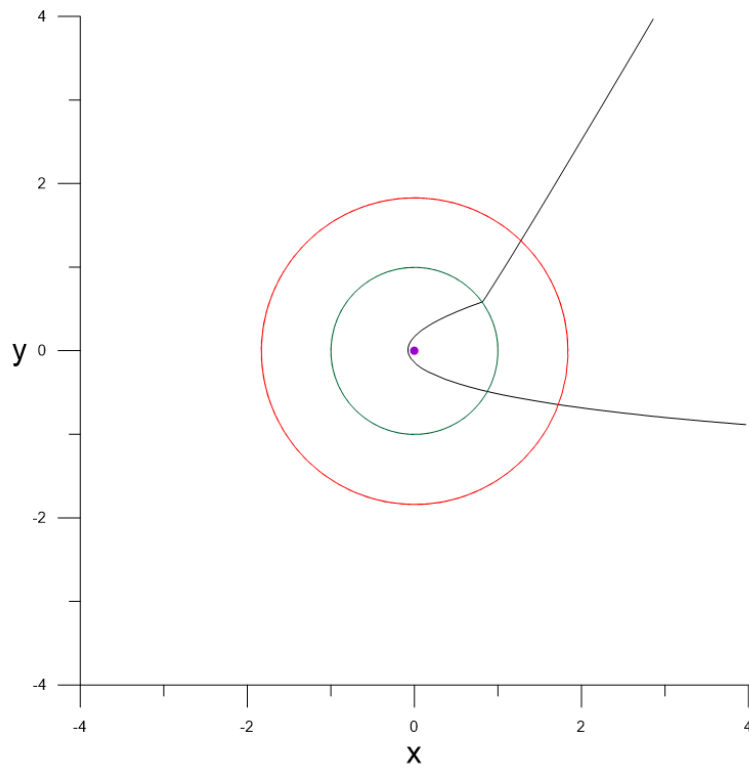


Σχήμα 10: Τροχιά για $t_0=101.6$ και $d=-1.34$

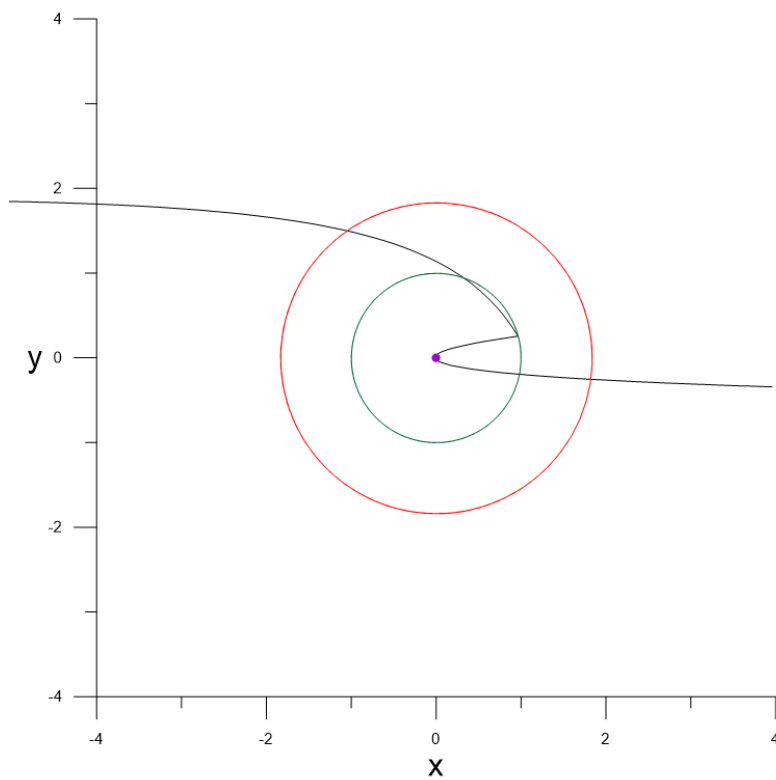
Παράλληλα, μερικοί κατάφεραν να μπουν εσωτερικότερα του Δία, αλλά στην έξοδο τους οι κοντινές προσεγγίσεις οδήγησαν σε κέρδος ενέργειας και διαφυγή από το ηλιακό σύστημα (σχήματα 11-14).



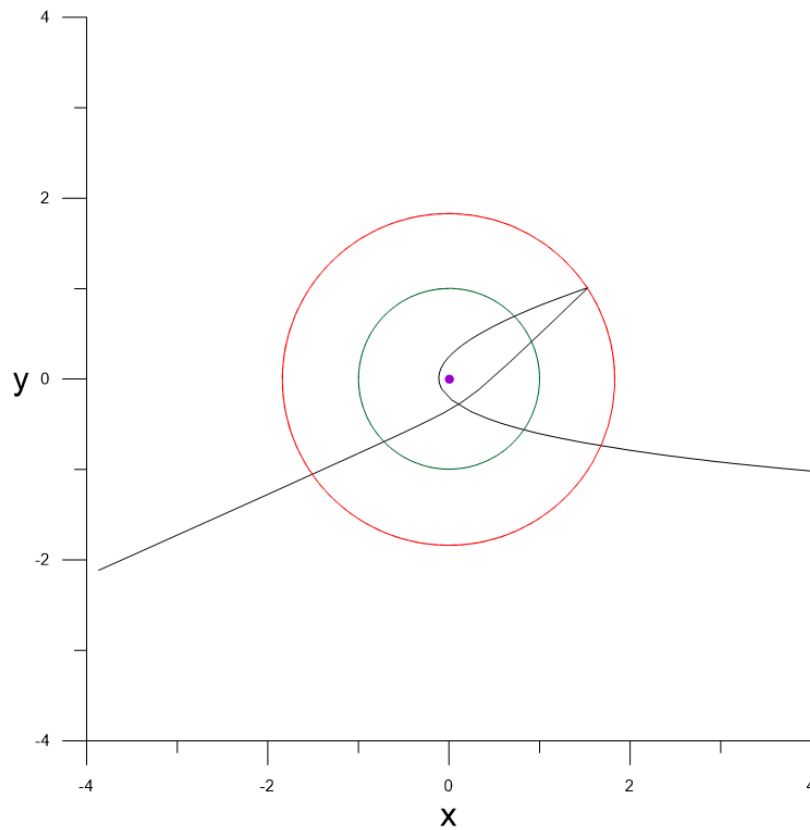
Σχήμα 11: Τροχιά για $t_0=1.1$ και $d=-1.76$



Σχήμα 12: Τροχιά για $t_0=120.6$ και $d=-1.28$

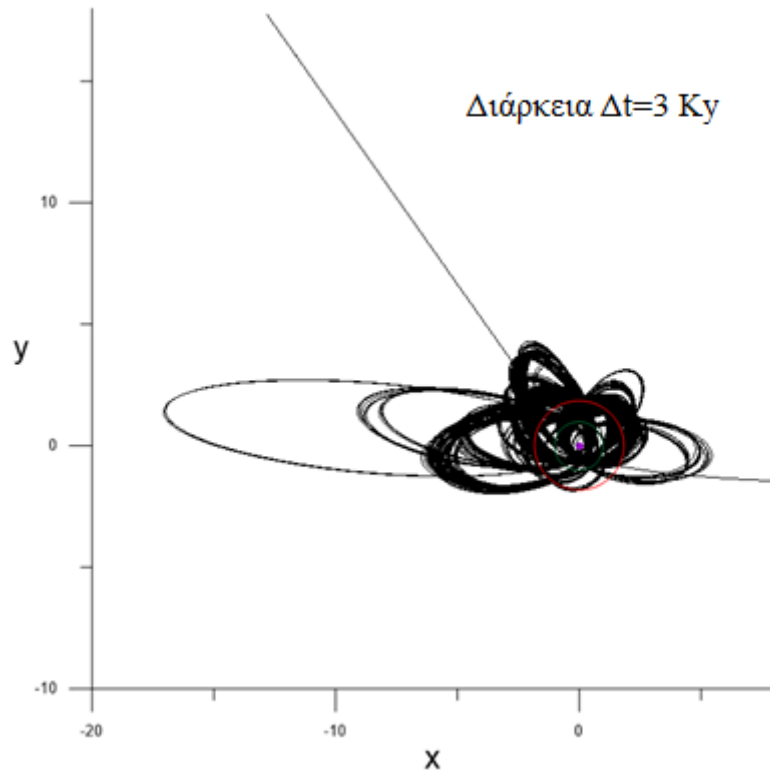


Σχήμα 13: Τροχιά για $t_0=28.9$ και $d=-0.5$

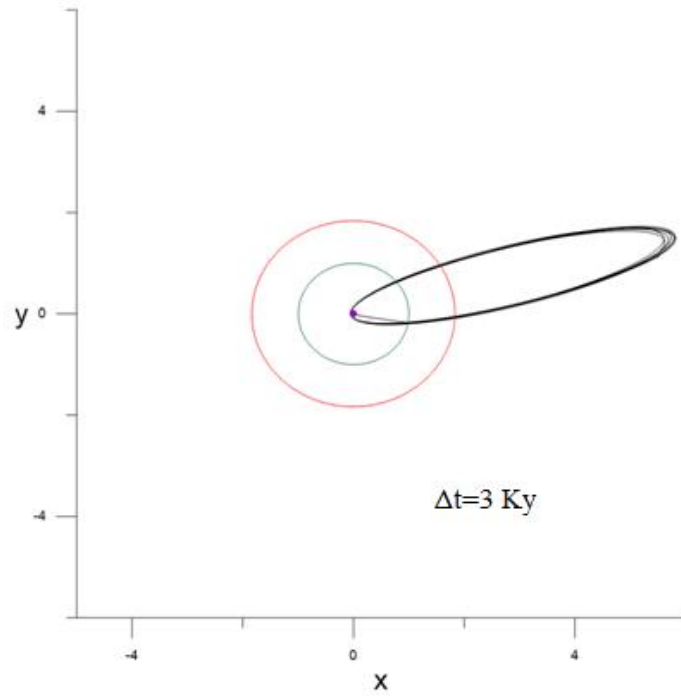


Σχήμα 14: Τροχιά για $t_0=115.2$ και $d=-1.46$

Βρίσκονται επίσης πολλές τροχιές οι οποίες προσωρινά μένουν στη γειτονιά του ηλιακού συστήματος για αρκετά χρόνια. Δίνουν την εντύπωση ότι παγιδεύονται αλλά δεν παραμένουν εντός του συστήματος παρά μόνο για 2-3 Kyr (έναντι των 8 Kyr που έχουμε ορίσει σαν ελάχιστη τιμή στην παράγραφο 2.4) και ύστερα είτε διαφεύγουν μετά από κοντινή προσέγγιση είτε κατευθύνονται προς τον ήλιο.



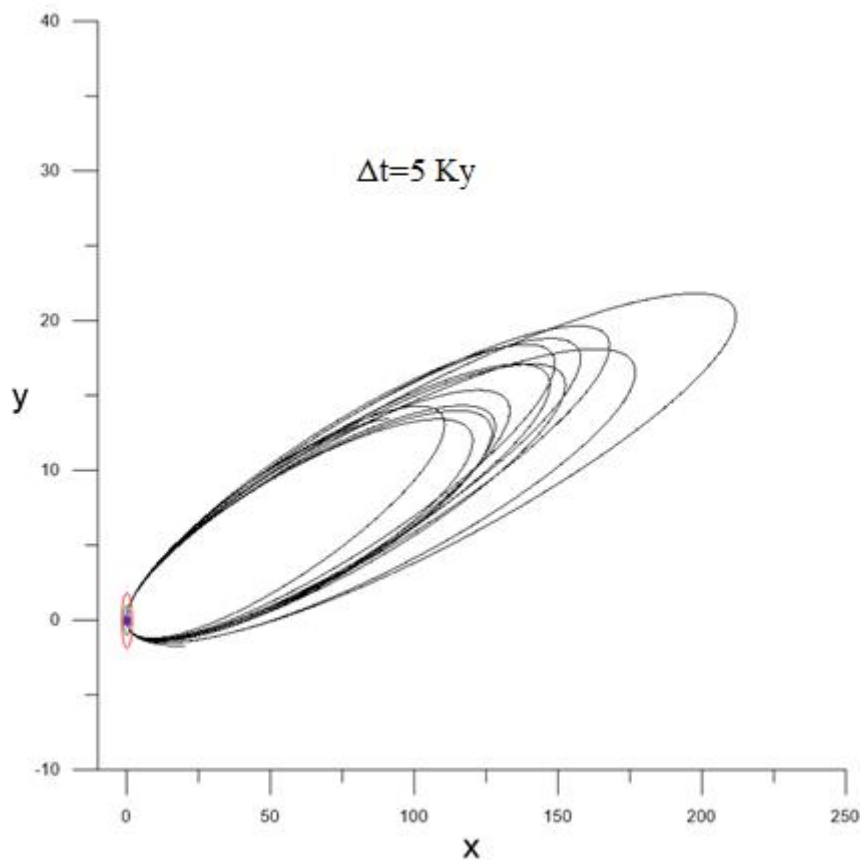
Σχήμα 15: Τροχιά για $t_0=45.1$ και $d=-1.7$



Σχήμα 16: Τροχιά για $t_0=20.4$ και $d=-1.76$

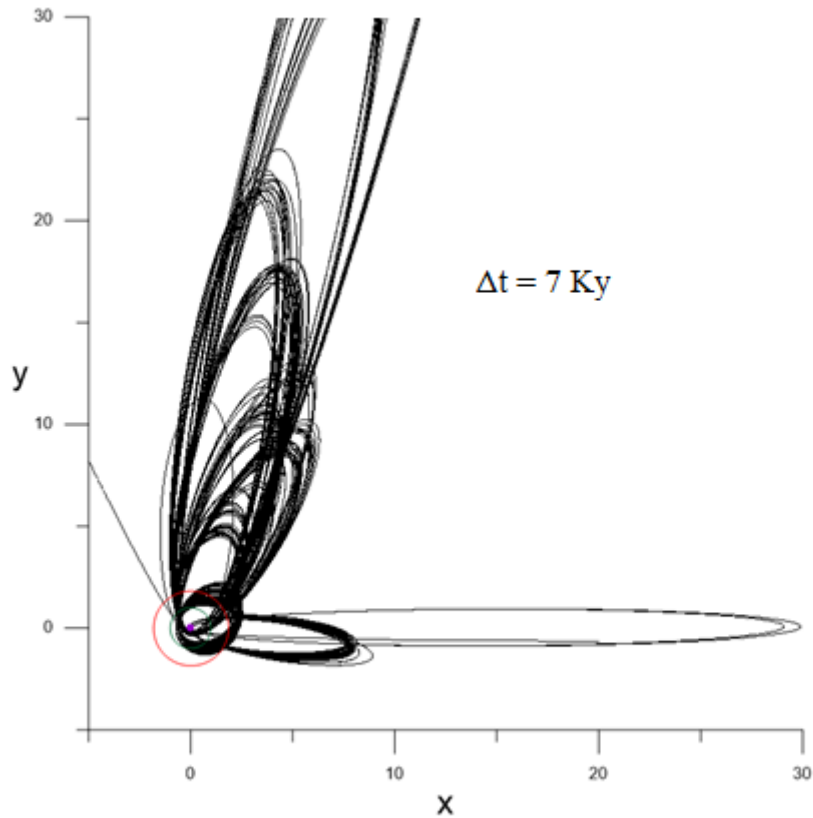
•Τροχιές με διάρκεια 4-8 Kyr (0.30%)

Για μεγαλύτερους χρόνους έχουμε τροχιές οι οποίες αποφεύγουν οι κοντινές προσεγγίσεις με οποιονδήποτε πλανήτη, αλλά χάνουν αρκετή ενέργεια ώστε η παραβολική τροχιά τους να μετατραπεί σε ελλειπτική. Σε αυτές τις περιπτώσεις δεν θεωρούμε παγίδευση, καθώς η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι της τάξης του 0.99, και το μεγαλύτερο μέρος της τροχιάς είναι εκτός του ηλιακού συστήματος. Όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 2.4, αν και υπάρχουν τροχιές αστεροειδών στην περιοχή των TNOs με τέτοιες εκκεντρότητες, προκύπτουν για κλίσεις αρκετά μακριά από το επίπεδο που μελετάμε, κοντά στις 90° - 110° .



Σχήμα 17: Τροχιά για $t_0=75.8$ και $d=-1.76$

Έχουμε επίσης και τροχιές οι οποίες περνάνε κοντά από πλανήτες, αλλά οι νέες τροχιές δεν έχουν τα κατάλληλα τροχιακά χαρακτηριστικά (μεγάλη εκκεντρότητα, μεγάλος ημιάξονας εκτός των ορίων του ηλιακού συστήματος). Αυτές οι τροχιές στο μεγαλύτερο μέρος τους διαφεύγουν από το ηλιακό σύστημα.



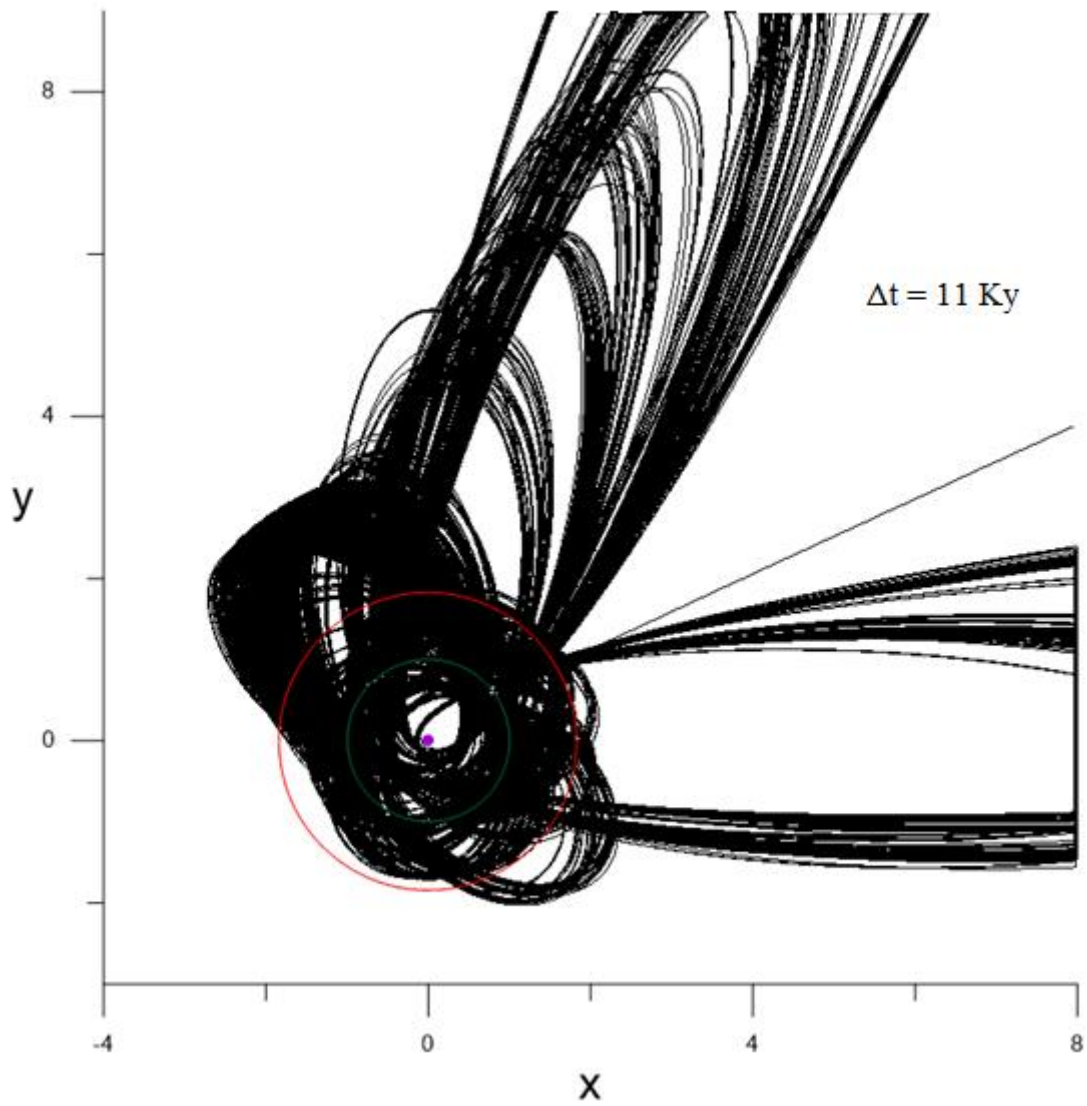
Σχήμα 18: Τροχιά για $t_0=120.6$ και $d=-0.62$. Η αποκοπή της τροχιάς στα μεγάλα y έγινε για εποπτικούς λόγους.

•Τροχιές με διάρκεια >8 Ky (0.42%)

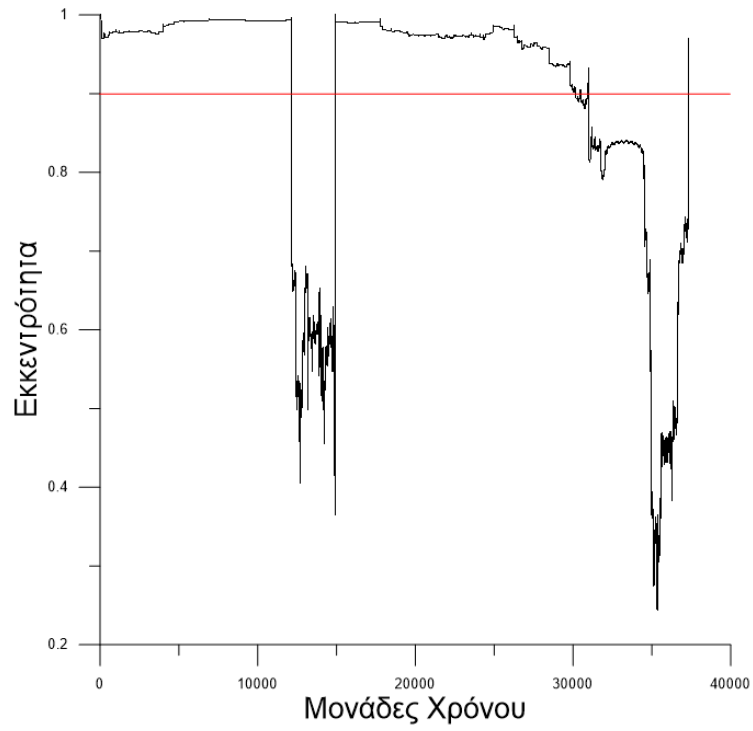
Για το χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει για τις παγιδεύσεις, δηλαδή για $t > 8$ Ky έχουμε έναν πολύ μικρό αριθμό τροχιών. Συγκεκριμένα, από τις 42,273 τροχιές, οι 178 από αυτές (0.42%) είχαν διάρκεια ζωής πάνω από 8 Ky. Στις περισσότερες από αυτές κυριαρχούν αντίστοιχοι μηχανισμοί με αυτούς σε χρόνους 4-8 Ky, δηλαδή είτε παίρνουμε τροχιές που δεν κάνουν κοντινή προσέγγιση και συνεχίζουν να διαγράφουν ελλείψεις με μεγάλο e , είτε κάνουν κοντινές προσεγγίσεις αλλά και πάλι καταλήγουν σε τροχιές με μεγάλες εκκεντρότητες (>0.9). Μόνο σε 3 από τις 178 τροχιές (πίνακας IV) παρατηρούμε την προϋπόθεση της χαμηλής εκκεντρότητας για αρκετό χρόνο (>4 Ky), τις οποίες εξετάζουμε παρακάτω.

Πίνακας IV: Αρχικές συνθήκες των τροχιών που εξετάζουμε

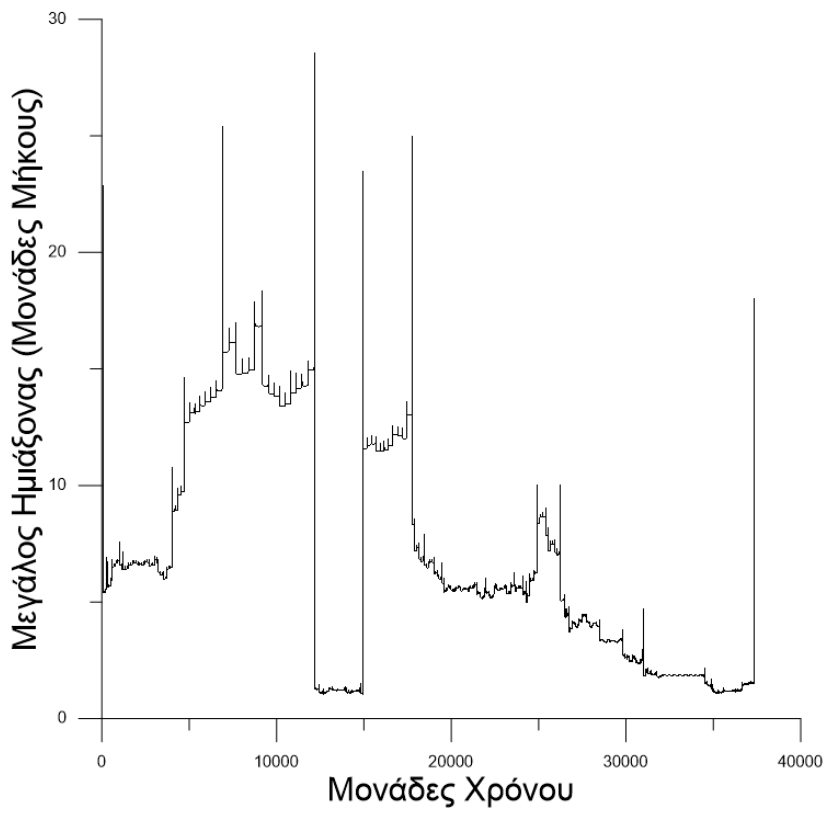
	t_0	d
Τροχιά 1	64	-1.52
Τροχιά 2	114.2	-1.52
Τροχιά 3	38.8	-1/1



Σχήμα 19: Τροχιά 1

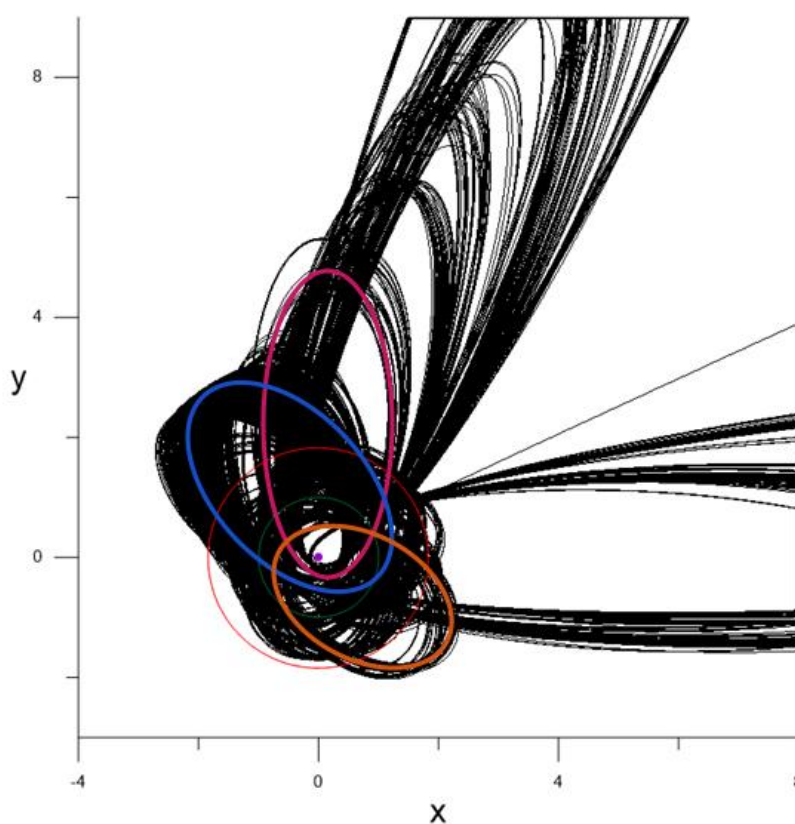


Σχήμα 20: Εκκεντρότητα της τροχιάς 1



Σχήμα 21:Μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς 1

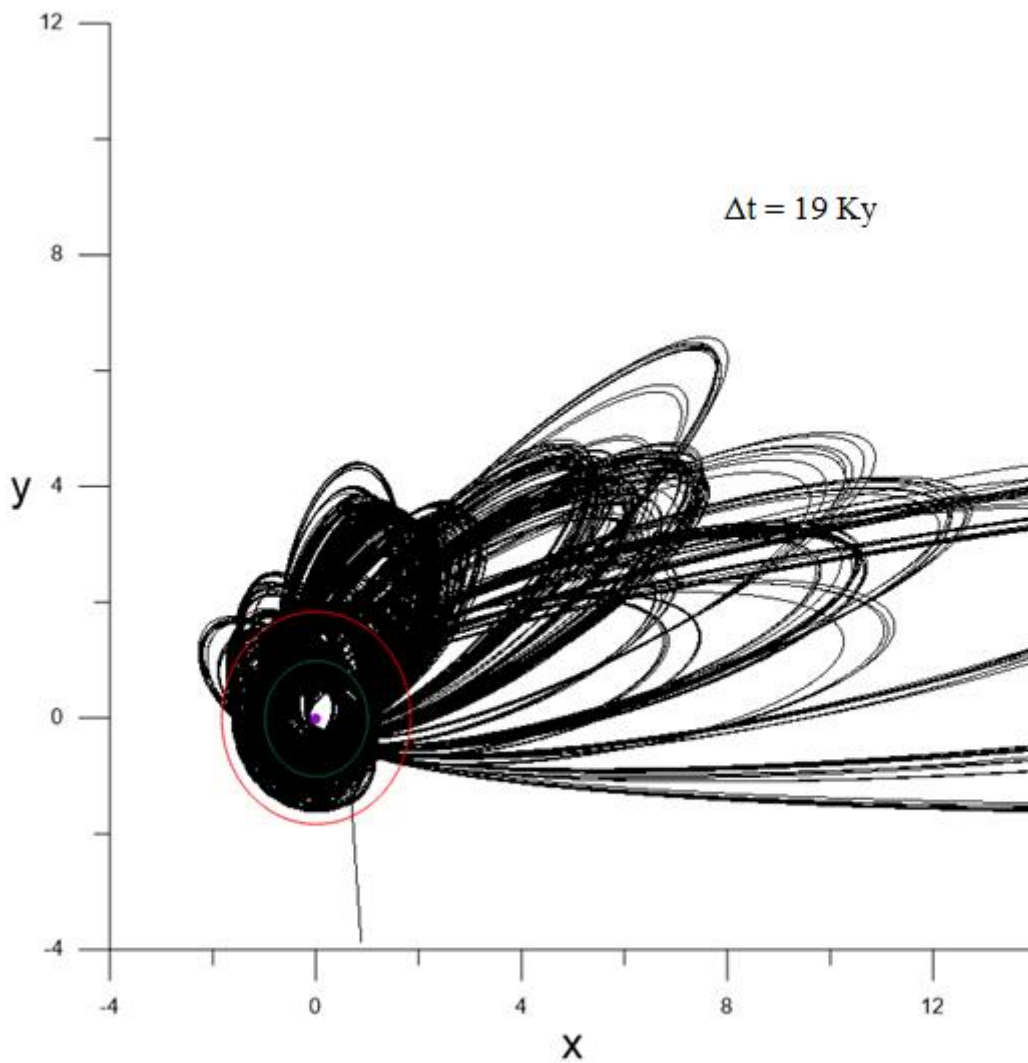
Παρατηρώντας την εκκεντρότητα και τον μεγάλο ημιάξονα της τροχιάς 1 παρατηρούμε ότι ο αστεροειδής φαίνεται να εισέρχεται μια φορά σε μια σταθερή τροχιά με $e \approx 0.58$ και $a \approx 1.24$. Μετά από αυτή τη φάση που διαρκεί περίπου 2.5 Kyr ξαναβγαίνει έξω και αποκτά τροχιά με μεγάλη εκκεντρότητα και έναν μεγάλο ημιάξονα που τον τοποθετεί έξω από τη ζώνη Edgeworth-Kuiper. Τέλος το σώμα αποκτά τροχιά με ταχέως μεταβαλλόμενη εκκεντρότητα και μεγάλο ημιάξονα. Παρατηρώντας την τροχιά του σώματος θα δούμε ότι η τροχιά φαίνεται χαοτική, και το σώμα μοιάζει να καταλαμβάνει πολλές διαφορετικές ελλειπτικές τροχιές, μεταπηδώντας από τη μία στην άλλη, όπως έχει σημειωθεί στο σχήμα.



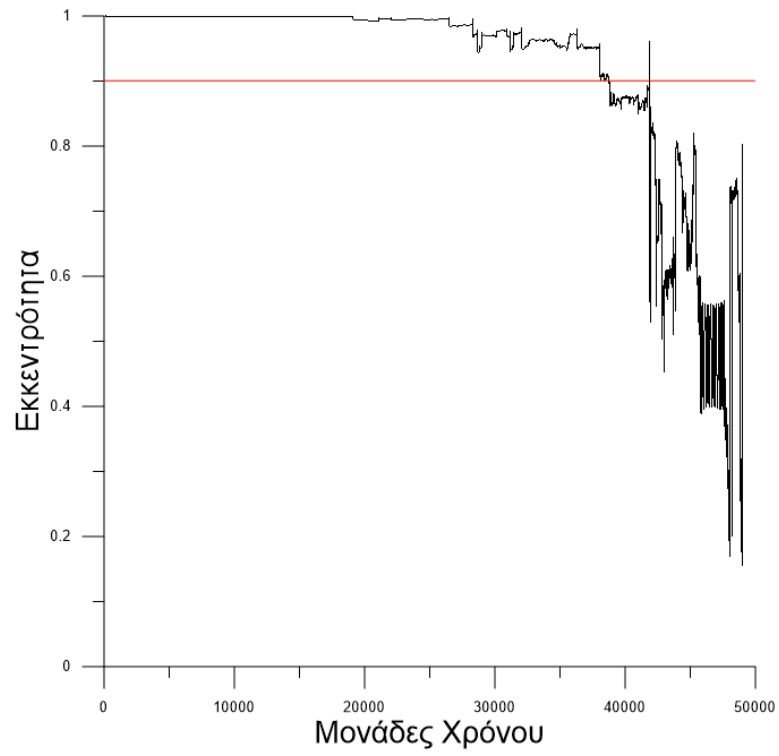
Σχήμα 22: Η τροχιά 1, με σημειωμένες τις ελλειπτικές τροχιές που διαγράφει προσωρινά ο αστεροειδής

Κοιτάζοντας και τις άλλες δύο τροχιές στα σχήματα 23,24,25,26 για την πρώτη και 27,28,29 για τη δεύτερη βλέπουμε παρόμοια ποιοτικά χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα, βλέπουμε πως όλες οι τροχιές είναι χαοτικές και μη προβλέψιμες, και παρουσιάζουν τις ίδιες ελλειπτικές τροχιές τις οποίες διαγράφει προσωρινά ο αστεροειδής πριν μεταβληθεί η τροχιά του. Επιπλέον βλέπουμε τις απότομες αλλαγές στην εκκεντρότητα και στην τιμή του μεγάλου ημιάξονα, οι οποίες πιθανότατα αντιστοιχούν στις στιγμές όπου υπάρχει κοντινή προσέγγιση. Και στις 3 περιπτώσεις ο ημιάξονας

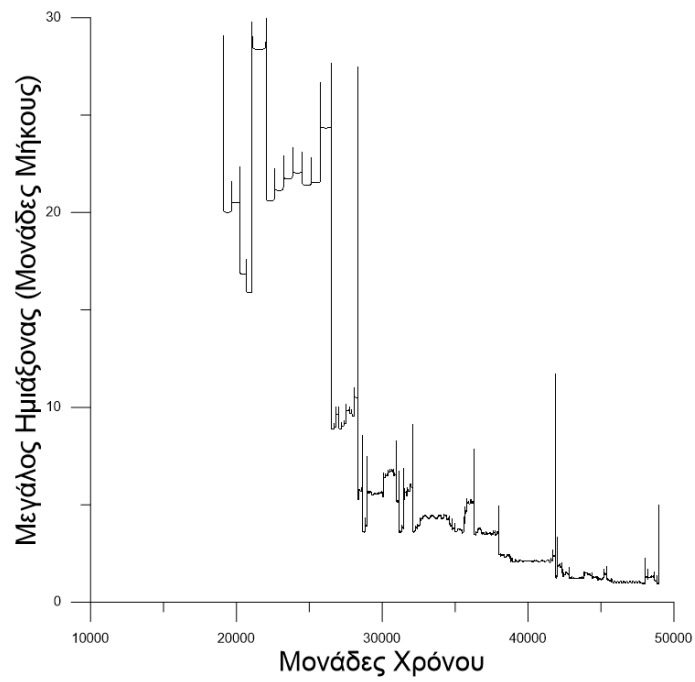
παίρνει ελάχιστες τιμές μέχρι και 1.2 για σημαντικό χρονικό διάστημα περίπου 8.000 μονάδες χρόνου=4.2 Ky), ενώ και στις 3 τροχιές παρουσιάζεται για μικρά χρονικά διαστήματα μια ταλάντωση της εκκεντρότητας (σχήμα 26).



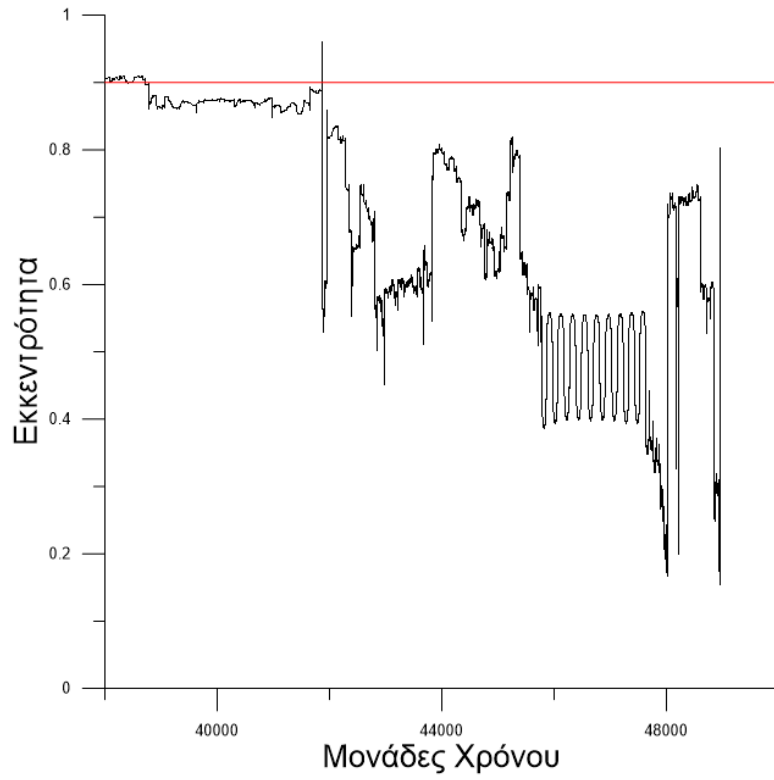
Σχήμα 23: Τροχιά 2



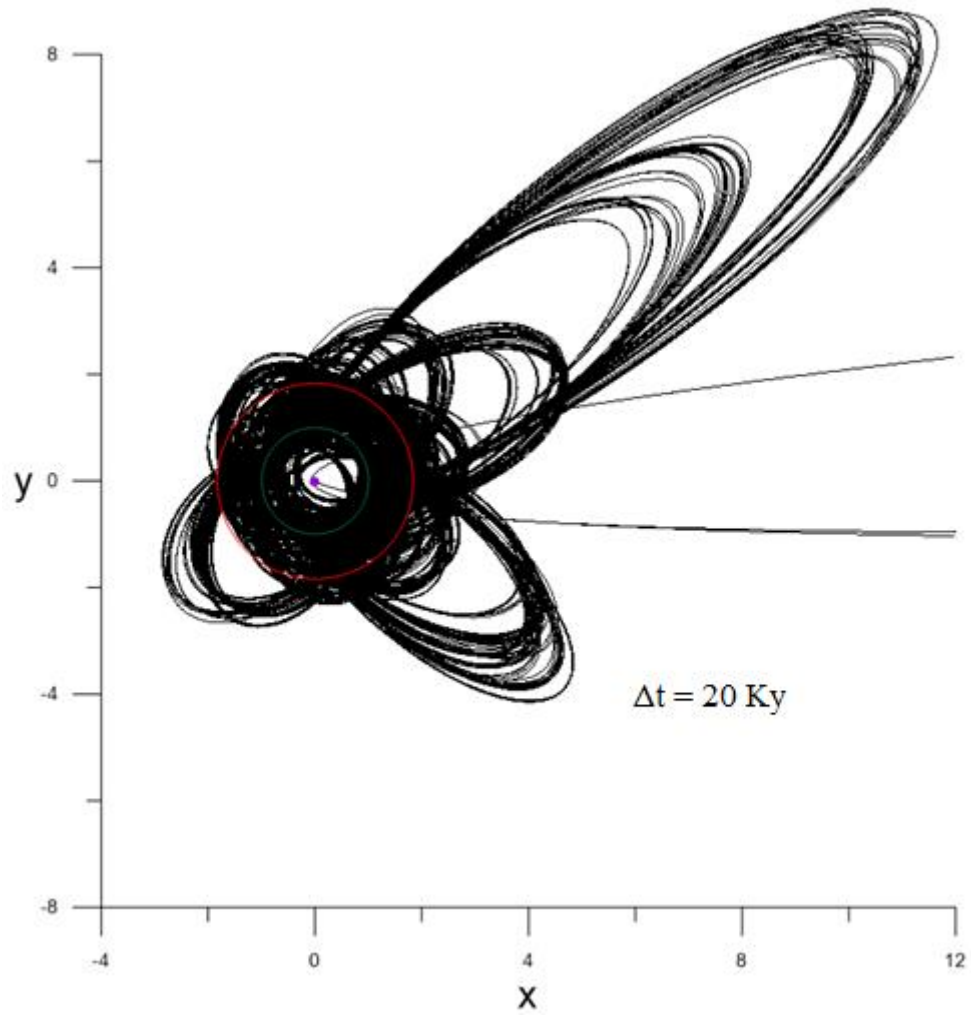
Σχήμα 24α: Η εκκεντρότητα της τροχιάς 2



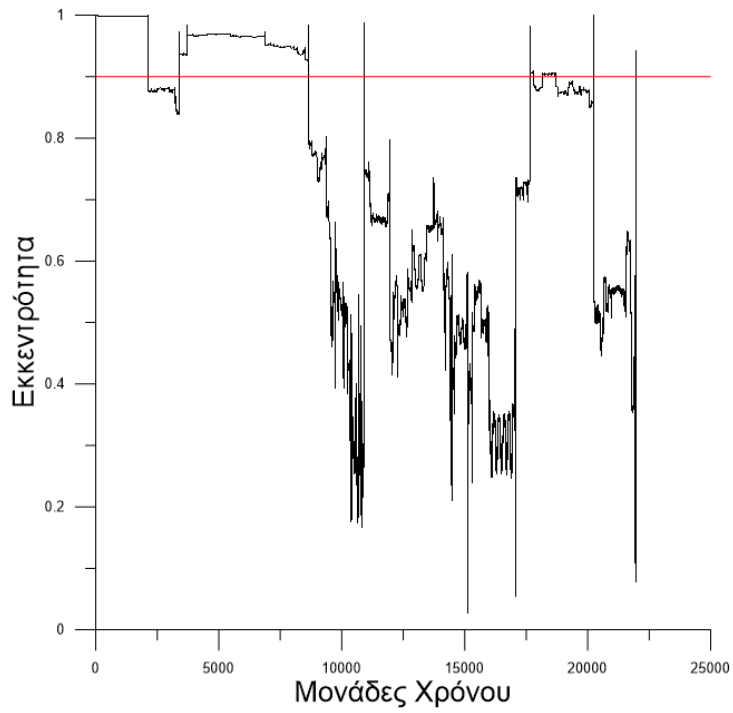
Σχήμα 25: Ο μεγάλος ημιάξονας της προηγούμενης τροχιάς ως προς το χρόνο



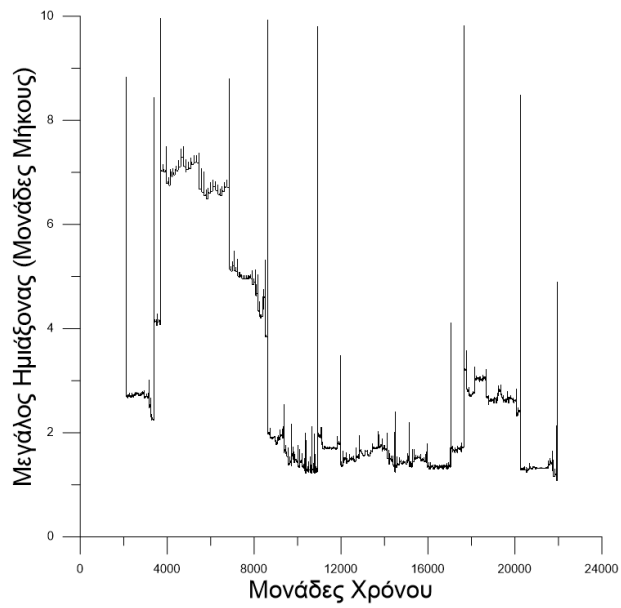
Σχήμα 26: Η εκκεντρότητα της τροχιάς 2 για χρόνο $t > 36000$



Σχήμα 25: Τροχιά 3



Σχήμα 26: Η εκκεντρότητα της τροχιάς 3



Σχήμα 27: Ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς 3

3.3 Προσομοιώσεις με σκόνη/αέρια στο εσωτερικό του ηλιακού συστήματος

Από τις 42,273 προσομοιώσεις που έγιναν για το μοντέλο, προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα (γράφημα 5) όσον αφορά το χρόνο που έμειναν τα σώματα εντός του ηλιακού συστήματος.

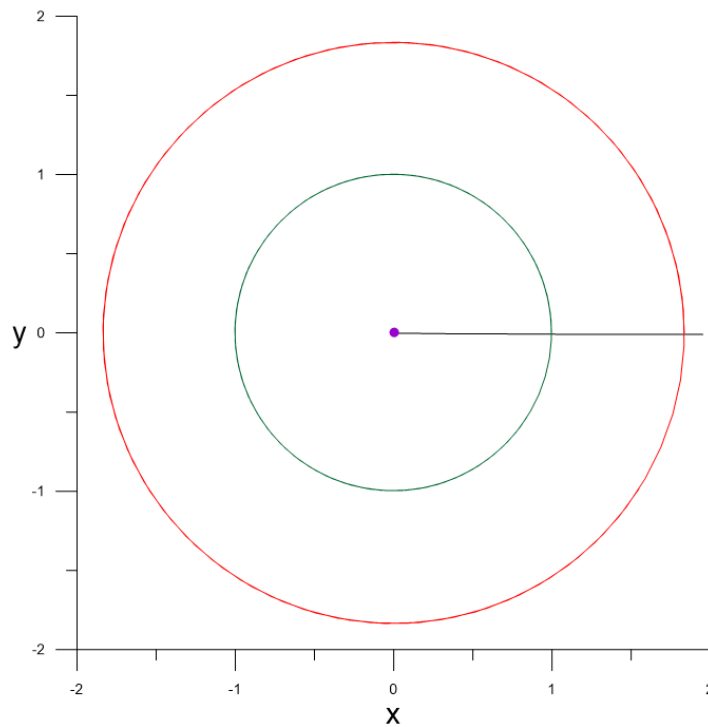


Γράφημα 6

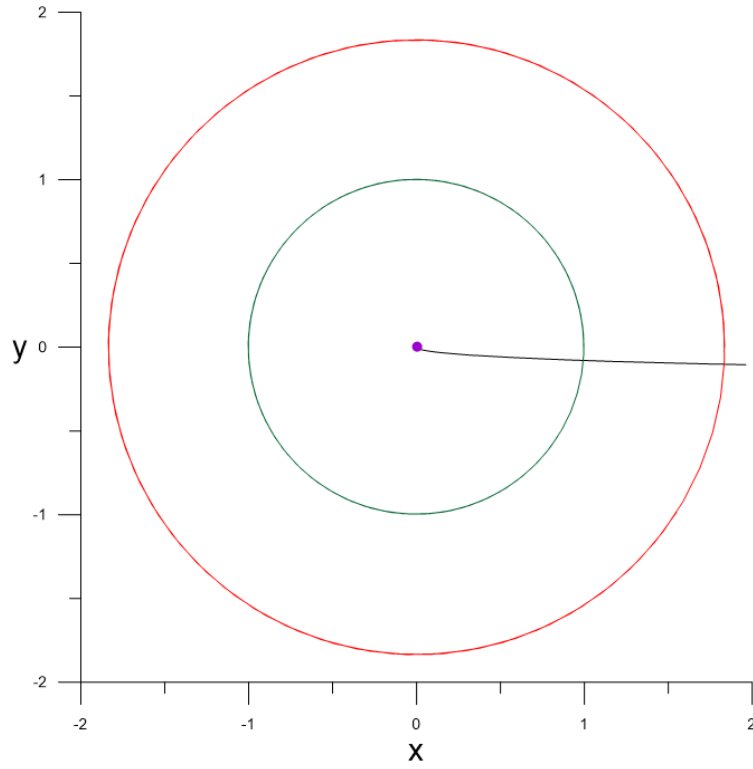
Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι η εικόνα είναι αντίστοιχη με αυτή που πήραμε όταν υπήρχε μόνο η βαρύτητα. Βέβαια εδώ ο μέγιστος χρόνος παραμονής έχει αυξηθεί, αλλά και σε αυτήν την περίπτωση οι τροχιές με διάρκεια >8 Kyr είναι λίγες σε σχέση με το συνολικό αριθμό, αν και το ποσοστό τους είναι επίσης αυξημένο κατά μία μικρή ποσότητα. Συγκεκριμένα, αποτελούν το 0.44% των συνολικών τροχιών (188 από τις 42,273, έναντι 178 στην περίπτωση χωρίς τη σκόνη στο εσωτερικό του ηλιακού συστήματος), το οποίο αποτελεί 5% αύξηση. Πρέπει να σημειώσουμε και τονίζουμε ξανά όμως, ότι παρά το γεγονός πως η μέγιστη διάρκεια έχει αυξηθεί, πάλι καμία προσομοίωση δεν έτρεξε για περισσότερο από 50,000 μονάδες χρόνου (95 Kyr), είτε επειδή κατέληξε πολύ κοντά στον ήλιο είτε επειδή διέφυγε από το ηλιακό σύστημα.

•Τροχιές με διάρκεια εως 4 Kyr (98.02% των προσομοιώσεων)

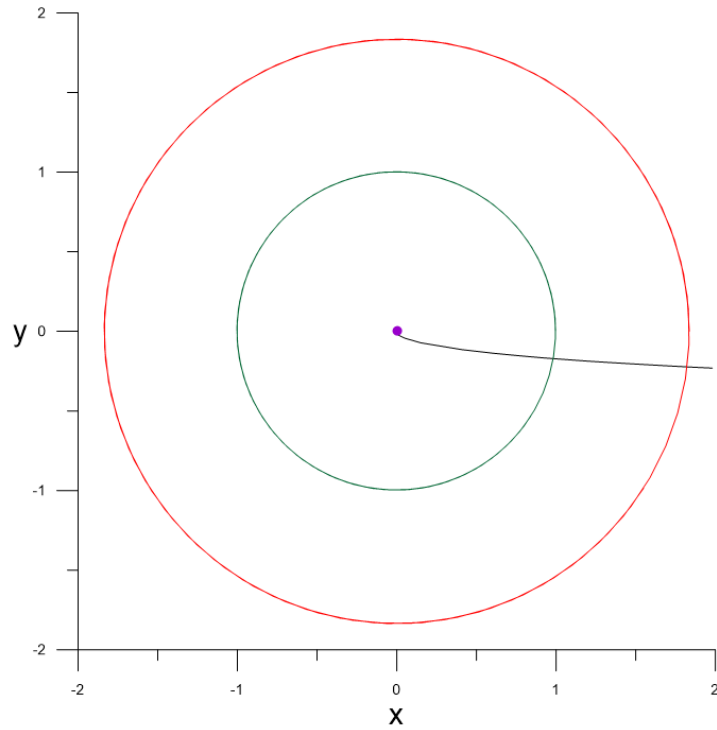
Για τις τροχιές με μικρό $|d|$ (<0.5) τα αποτελέσματα είναι αντίστοιχα με αυτά της προηγούμενης προσομοίωσης, δηλαδή σχεδόν όλα καταλήγουν να πέφτουν πάνω στον ήλιο. Μερικές ενδεικτικές τροχιές φαίνονται στα σχήματα 32-34.



Σχήμα 28: Τροχιά για $t_0 = 32.2$ και $d=-0.02$

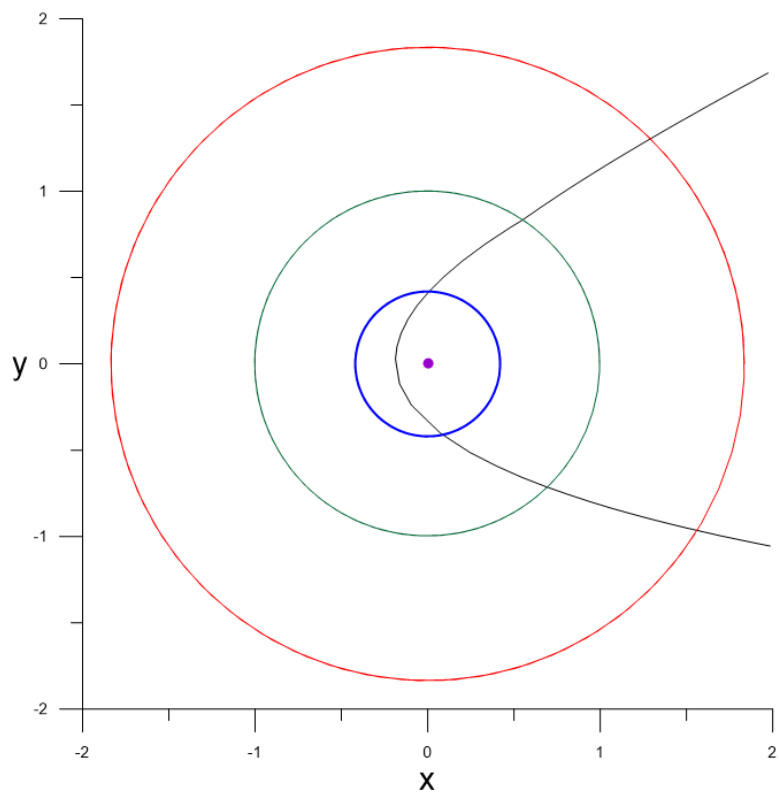


Σχήμα 29: Τροχιά για $d=-0.2$

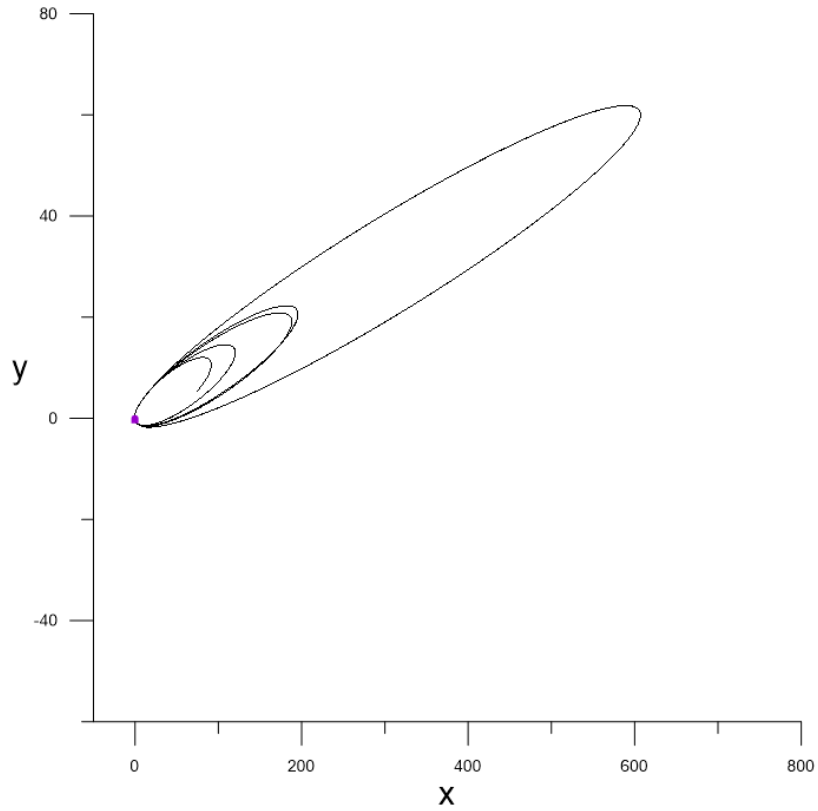


Σχήμα 30: Τροχιά για $d=-0.44$

Για τις τροχιές όμως με μεγάλο $|d|$ ($d=-1.88, -1.94$) η εικόνα δεν είναι αμετάβλητη σε σχέση με την προηγούμενη προσομοίωση. Πράγματι ορισμένες τροχιές δεν χάνουν αρκετή ενέργεια και συνεχίζουν σε παραβολική τροχιά, όμως μερικές (κυρίως αυτές που καταλήγουν να περνάνε κοντινότερα από τον ήλιο, στα σημεία όπου το προφίλ ταχυτήτων είναι πιο κοντά στο μέγιστο) χάνουν αρκετή ενέργεια ώστε να αποκτήσουν ελλειπτική τροχιά με μεγάλη εκκεντρότητα. Οι δύο περιπτώσεις αυτές φαίνονται στα σχήματα 35 και 36 αντίστοιχα.

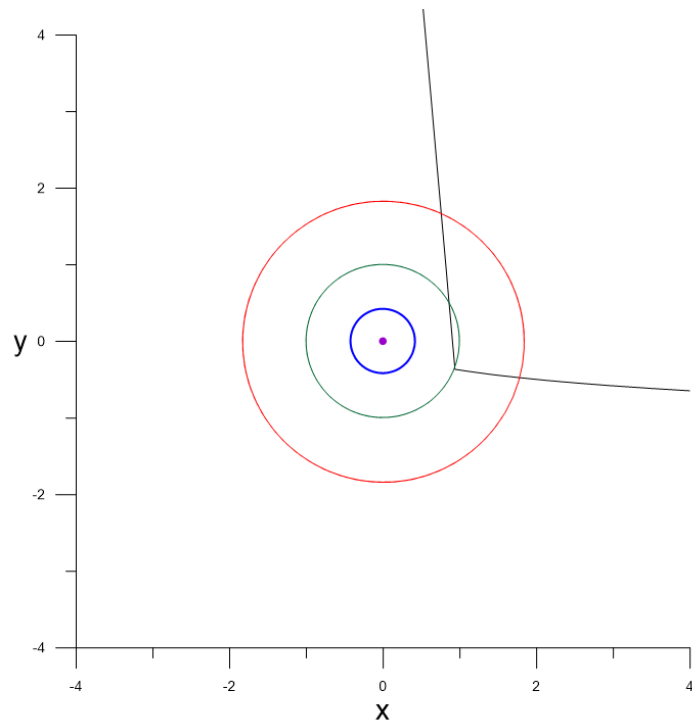


Σχήμα 31: Τροχιά για $t_0=89, d=-1.94$

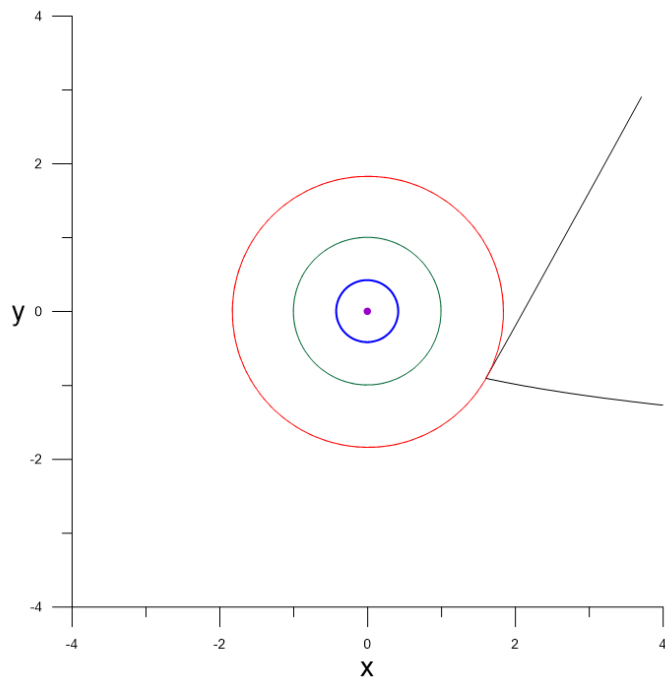


Σχήμα 32: Τροχιά για $t_0=71.6$ και $d=-1.94$

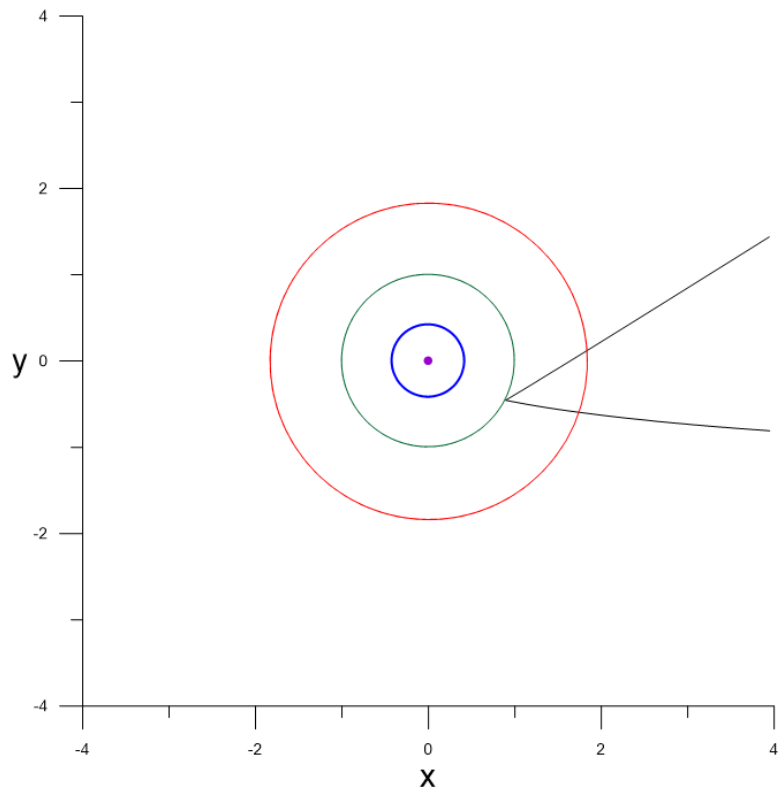
Επίσης πάλι έχουμε τροχιές οι οποίες έχουν νωρίς κάποια κοντινή προσέγγιση και διαφεύγουν, αντίστοιχα και με την περίπτωση χωρίς τη σκόνη (σχήματα 37-40).



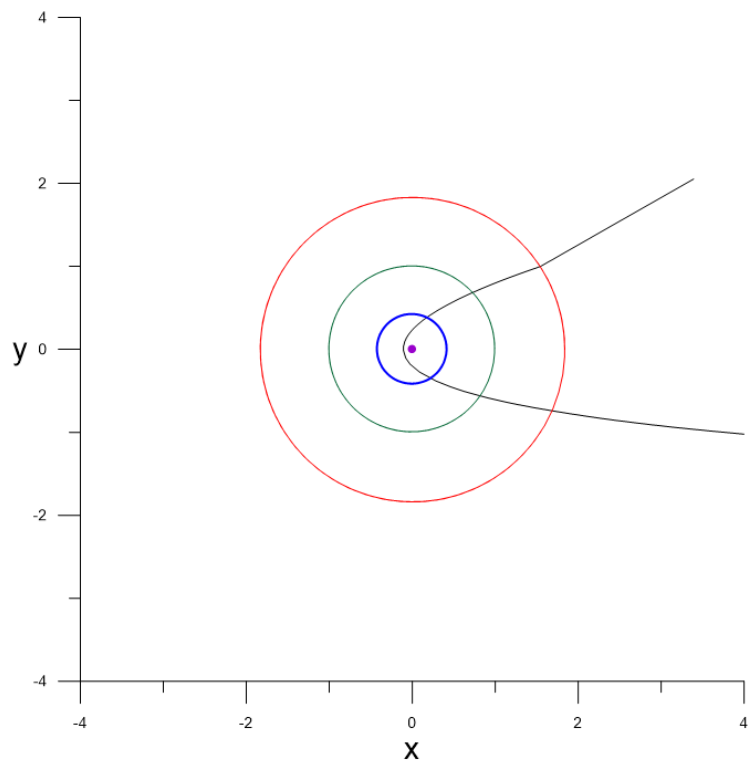
Σχήμα 33: Τροχιά για $t_0=89.4$ και $d=-0.92$



Σχήμα 34: Τροχιά για $t_0=99.2$ και $d=-1.92$

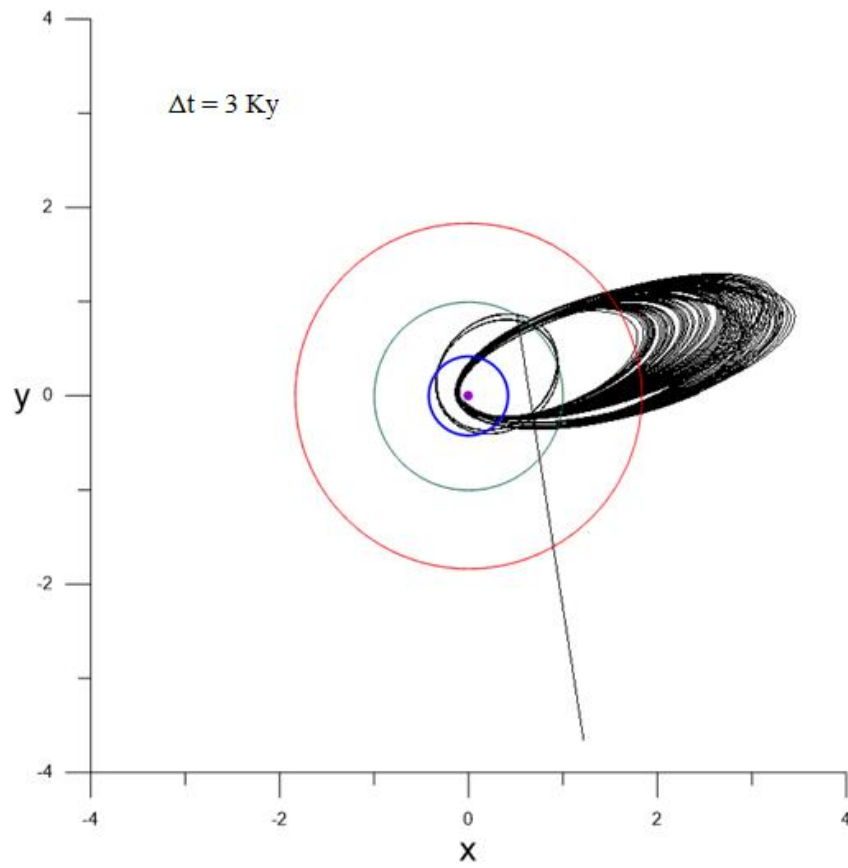


Σχήμα 35: Τροχιά για $t_0=89.2$ και $d=-1.16$

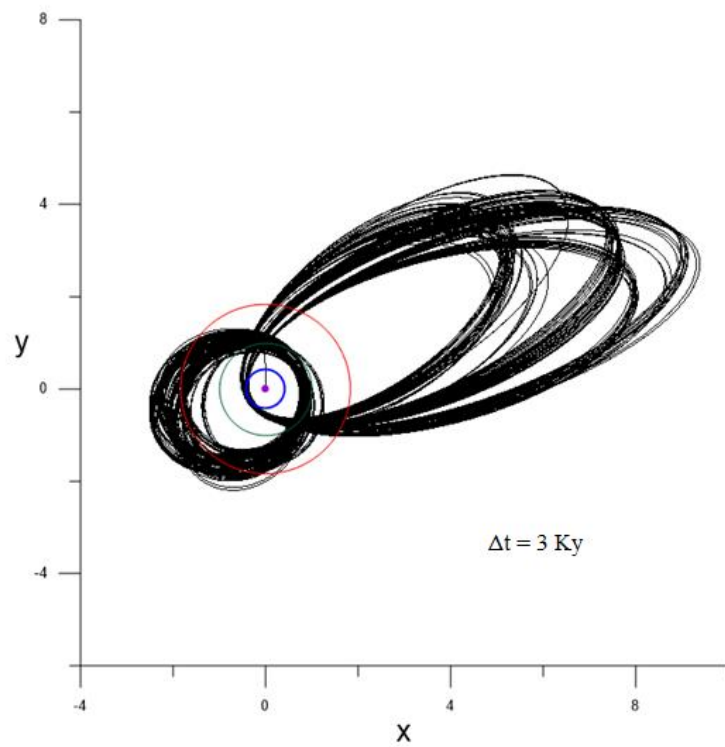


Σχήμα 36: Τροχιά για $t_0=21.6$ και $d=-1.46$

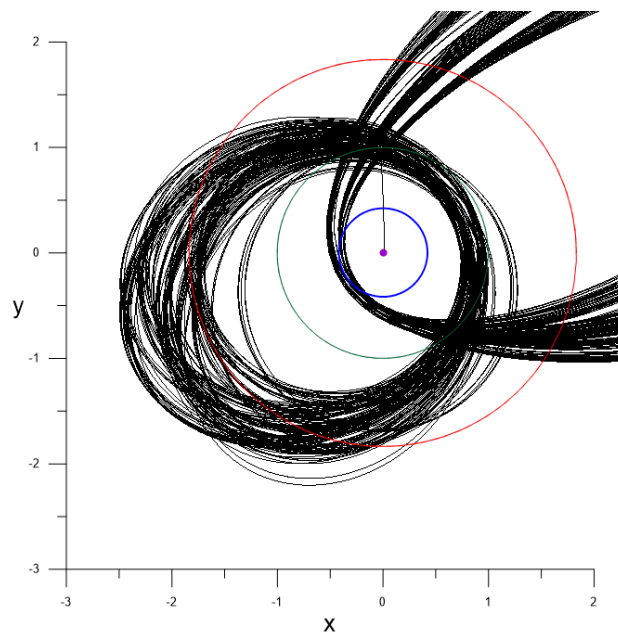
Κάποιοι αστεροειδείς μετά από μια κοντινή προσέγγιση κινούνται προσωρινά σε σταθερές τροχιές και διαγράφουν ελλείψεις με μικρό a και e , αλλά μία ακόμη κοντινή προσέγγιση καταστρέφει την τροχιά τους. (Σχήματα 41-43)



Σχήμα 37: Τροχιά για $t_0=18.8$ και $=-1.22$



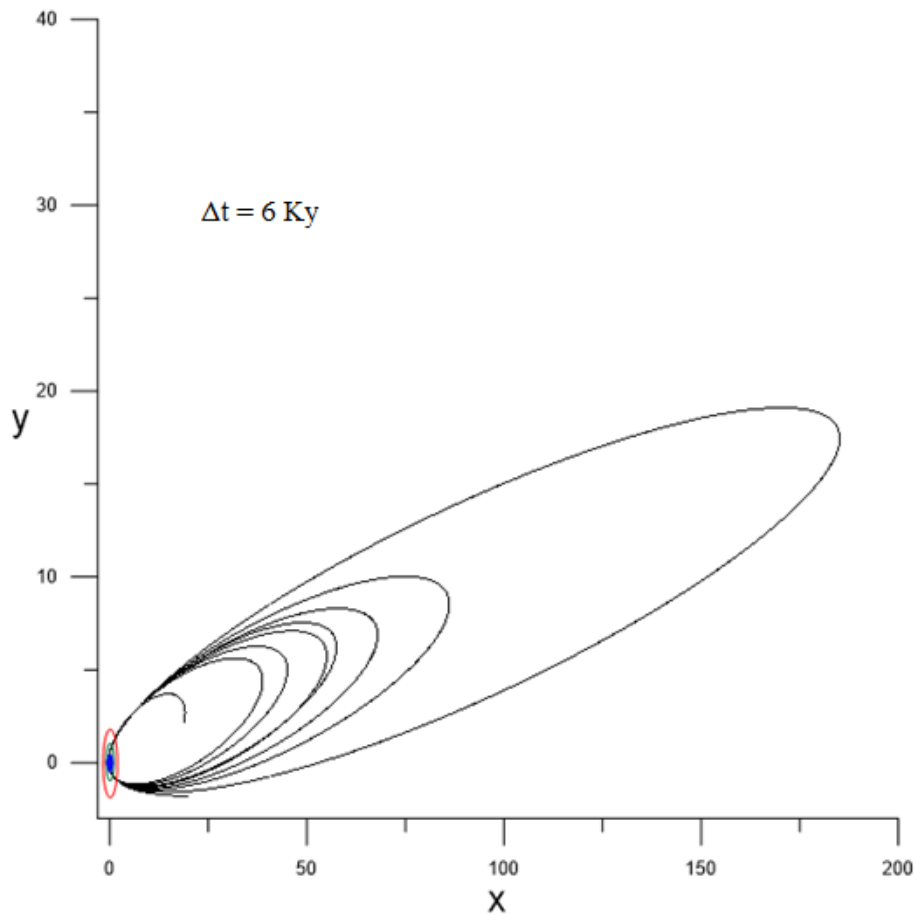
Σχήμα 38: Τροχιά για $t_0=50.2$ και $d=-1.94$



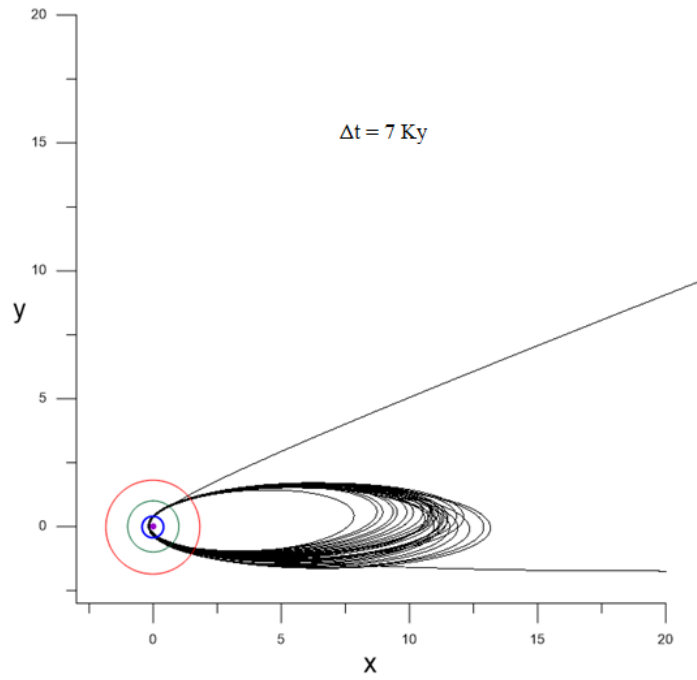
Σχήμα 39: Μεγέθυνση της τροχιάς του σχ. 42. Παρατηρούμε μία φαινομενικά σταθερή τροχιά του αστεροειδούς η οποία καταρρέει πλήρως μετά από μία κοντινή προσέγγιση, με τον αστεροειδή να εκσφενδονίζεται προς τον ήλιο

•Τροχιές με διάρκεια 4-8 Kyr (1.45% των προσομοιώσεων)

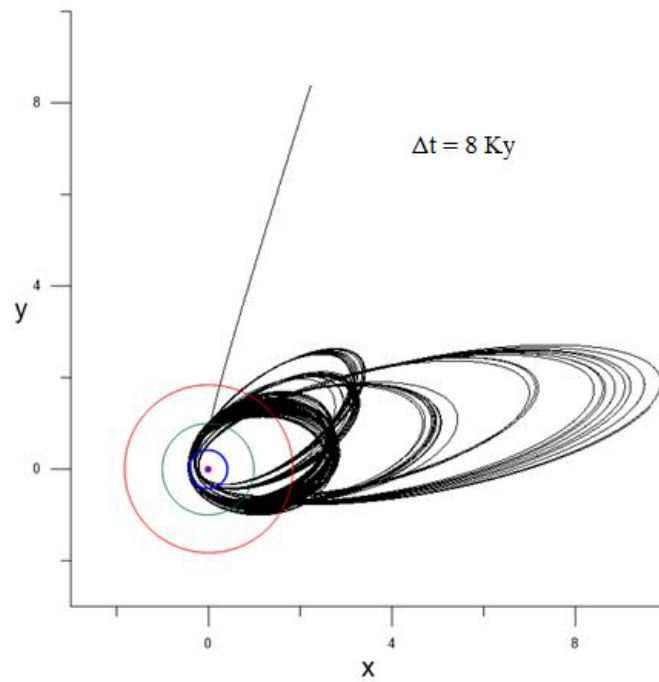
Σε αυτό το χρονικό διάστημα έχουμε 3 περιπτώσεις τροχιάς. Είτε αποφεύγονται οι κοντινές προσεγγίσεις και παίρνουμε μια έλλειψη με μεγάλη εκκεντρότητα (>0.99), είτε κάποια κοντινή προσέγγιση στέλνει τον αστεροειδή στον ήλιο ή εκτός του ηλιακού συστήματος, είτε παγιδεύεται προσωρινά αλλά σύντομα καταστρέφεται η τροχιά του. Ενδεικτικά ένα παράδειγμα από κάθε περίπτωση φαίνεται στα σχήματα 44-46 αντίστοιχα. Στα σχήματα 47, 48 βλέπουμε τα χαρακτηριστικά μιας τροχιάς που ανήκει στην τελευταία κατηγορία. Τονίζουμε ότι δεν μιλάμε για κανονική παγίδευση αλλά προσωρινή, καθώς η εκκεντρότητα και ο μεγάλος ημιάξονας έχουν κατάλληλες τιμές για πολύ μικρό χρονικό διάστημα (≈ 1 Kyr)



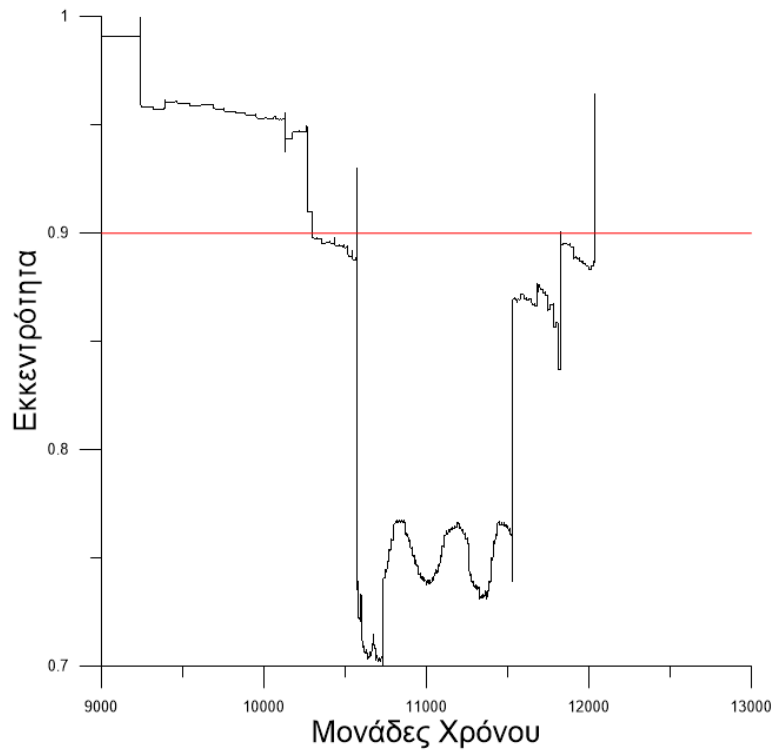
Σχήμα 40: Τροχιά για $t_0=56.6$ και $=-1.82$



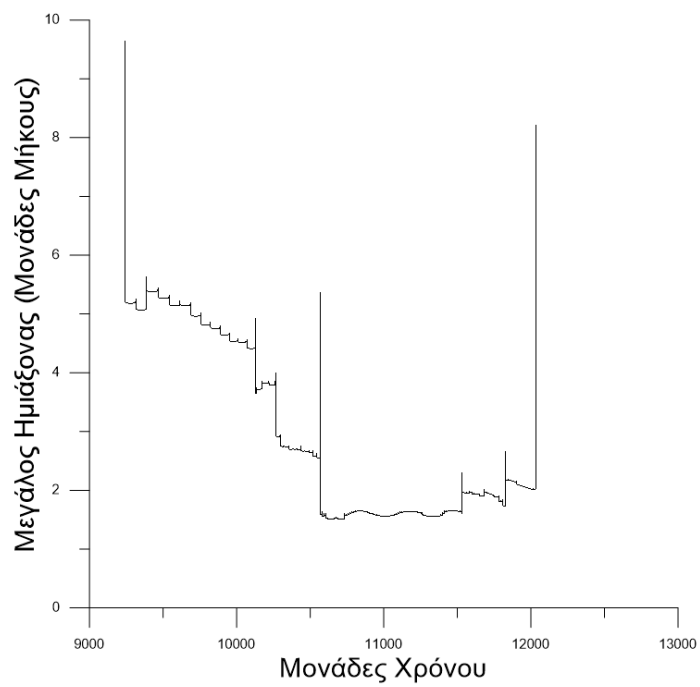
Σχήμα 41: Τροχιά για $t_0=107.9$ και $d=-1.76$



Σχήμα 42: Τροχιά για $t_0=95.2$ και $d=-1.82$. Το προγενέστερο κομμάτι της τροχιάς έχει αφαιρεθεί για εποπτικούς λόγους.



Σχήμα 43: Η εκκεντρότητα της τροχιάς του σχ. 46



Σχήμα 44: Ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς του σχ. 46

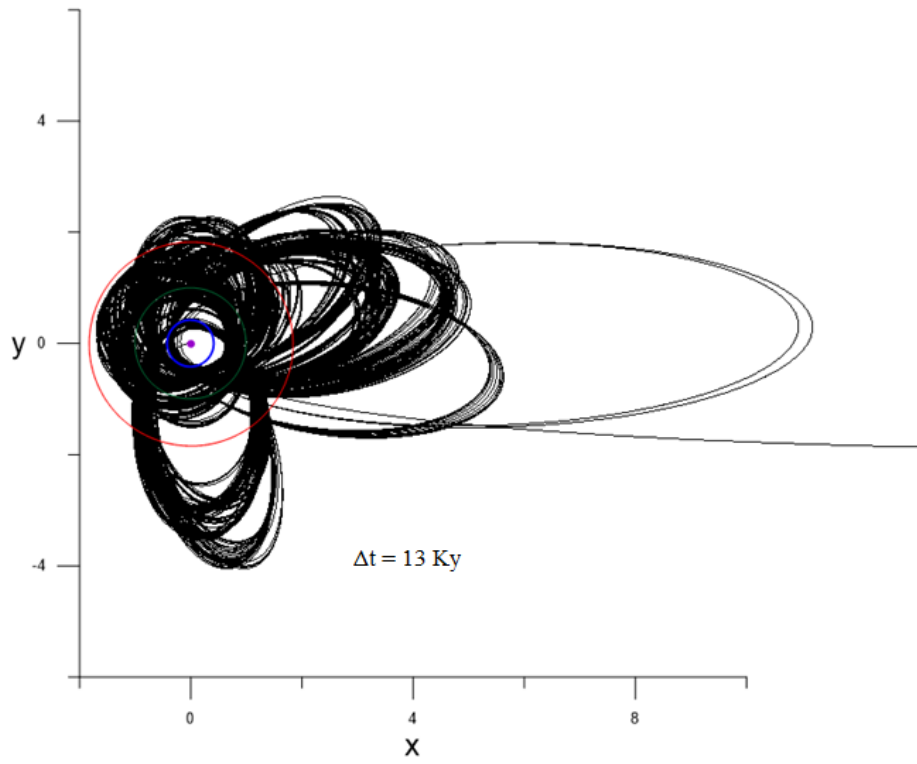
•Τροχιές με διάρκεια >8Kyr (0.44% των προσομοιώσεων)

Οι περιπτώσεις εδώ είναι παρόμοιες με αυτές τις προηγούμενης κατηγορίας. Από τις 188 τροχιές, μόνο 6 βρέθηκαν να έχουν αρκετά χαμηλή εκκεντρότητα (<0.9) για σχετικά μεγάλο χρονικό διάστημα (>4 Kyr), αριθμός διπλάσιος από αυτόν που μας έδωσαν οι προσομοιώσεις μόνο μέσω της βαρύτητας. Ενδεικτικά εξετάζεται η 1 από τις 6, καθώς παρουσιάζουν πανομοιότυπα χαρακτηριστικά μεταξύ τους, αλλά και με τις τροχιές που μελετήθηκαν στην παράγραφο 3.1

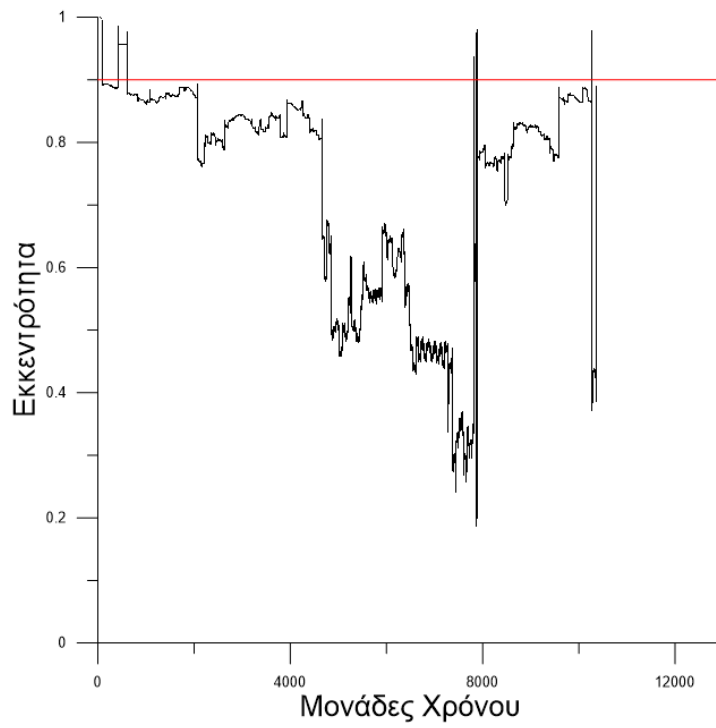
Πίνακας V: Οι αρχικές συνθήκες για τις τροχιές που έδωσαν μεγάλους χρόνους ζωής

	t0	d
Τροχιά 4	45	-1.94
Τροχιά 5	44	-1.64
Τροχιά 6	21.1	-1.88
Τροχιά 7	8	-0.5
Τροχιά 8	108	-1.1
Τροχιά 9	51.2	-1.76

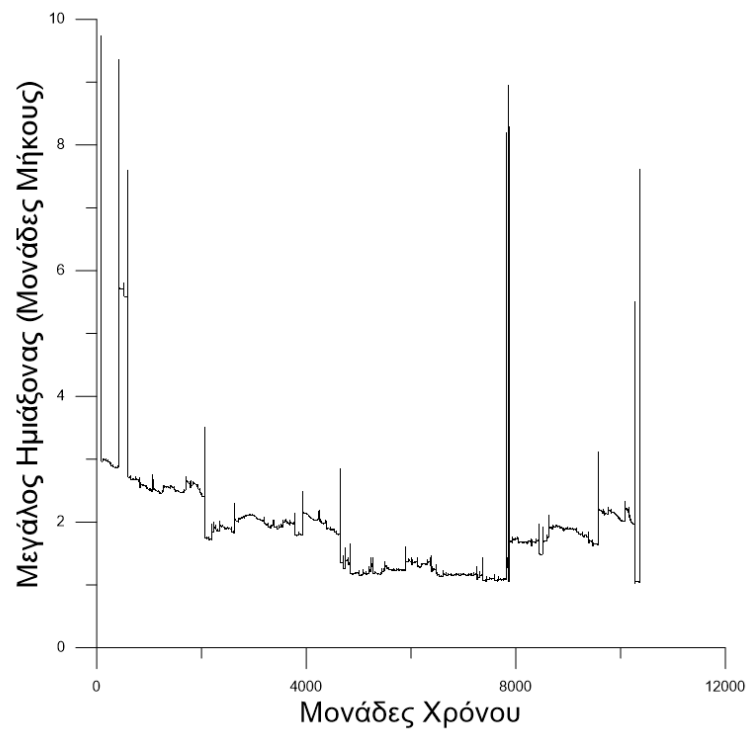
Όπως και οι προηγούμενες αντίστοιχες τροχιές, έτσι και αυτή έχει τα ίδια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά: είναι χαοτική, εμφανίζει προσωρινά ελλειπτικές τροχιές, και σχετικά γρήγορα καταρρέει. Η εκκεντρότητα e και πάλι εμφανίζει μια ταλάντωση για ένα χρονικό διάστημα (περίπου στις 6000 μονάδες χρόνου), ενώ ο μεγάλος ημιάξονας φτάνει σε ένα ελάχιστο τιμών κοντά στο 1.24.



Σχήμα 45: Τροχιά 4 για $t_0=45$ και $d=-1.94$



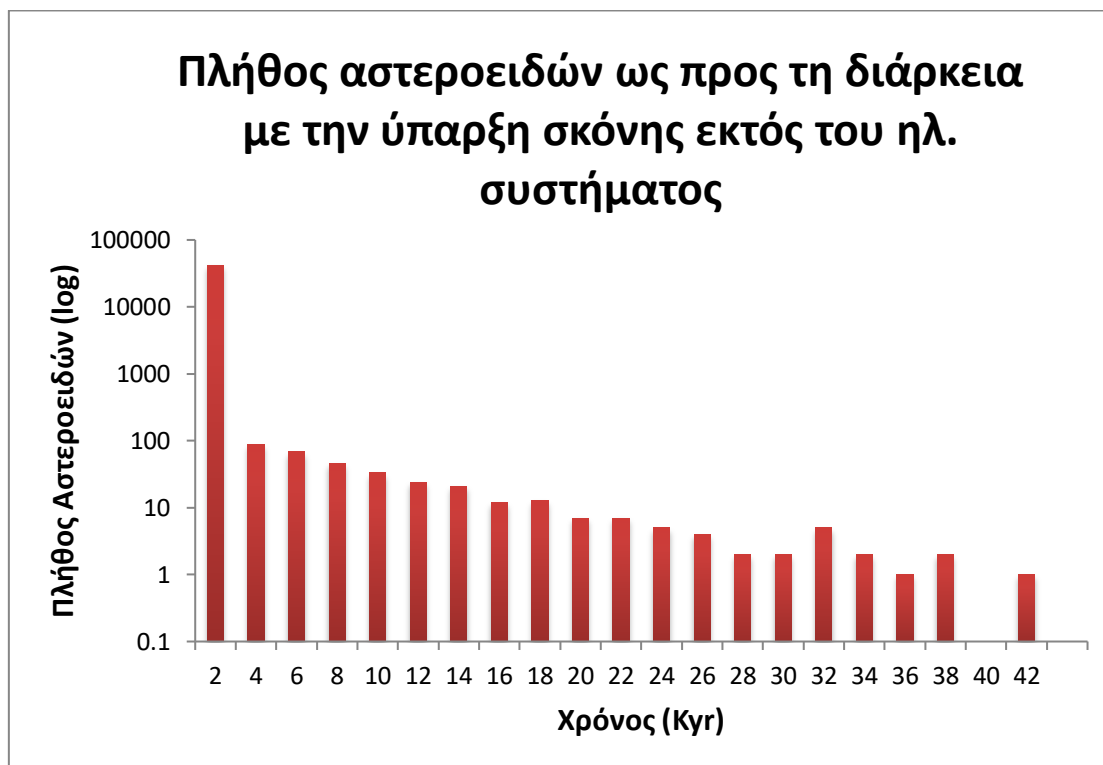
Σχήμα 46: Η εκκεντρότητα της τροχιάς 4



Σχήμα 47: Ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς 4

3.4 Προσομοιώσεις με σκόνη στο εξωτερικό του ηλιακού συστήματος

Οι 42,273 προσομοιώσεις έδωσαν τα αποτελέσματα του γραφήματος 6 ως προς τη διάρκεια.

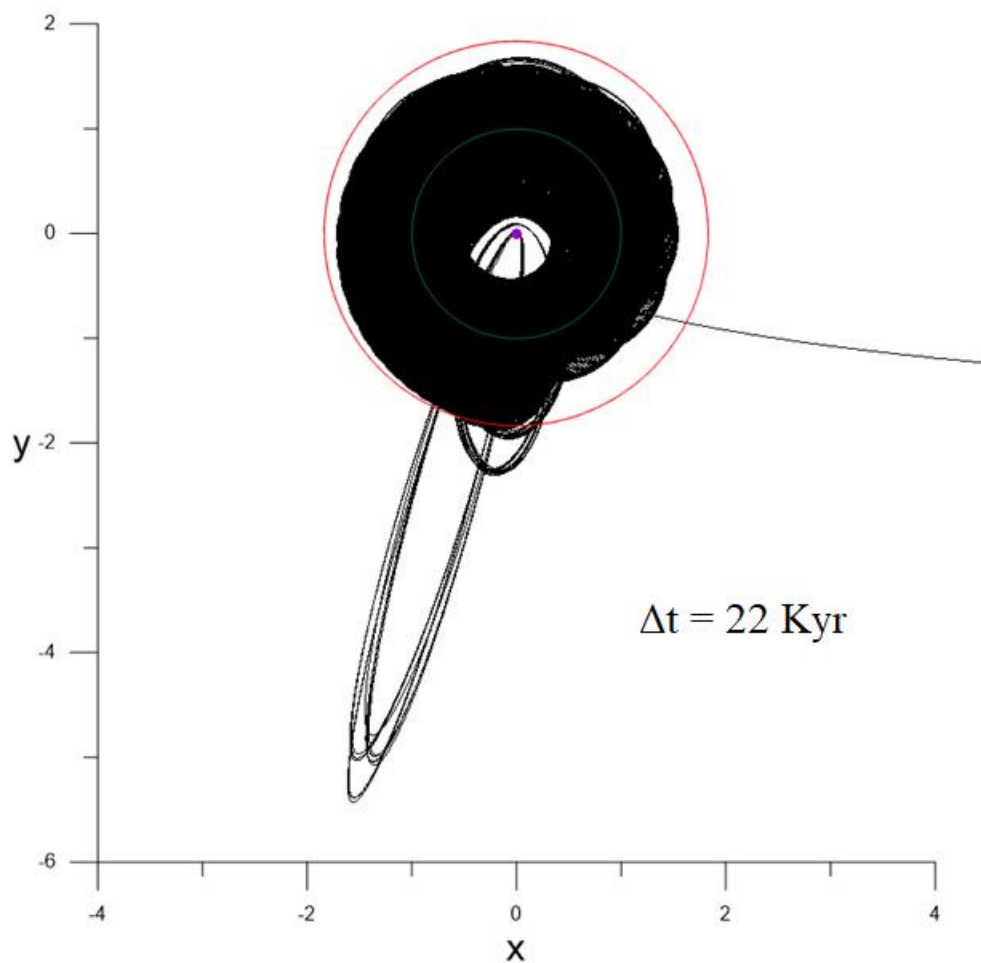


Γράφημα 7

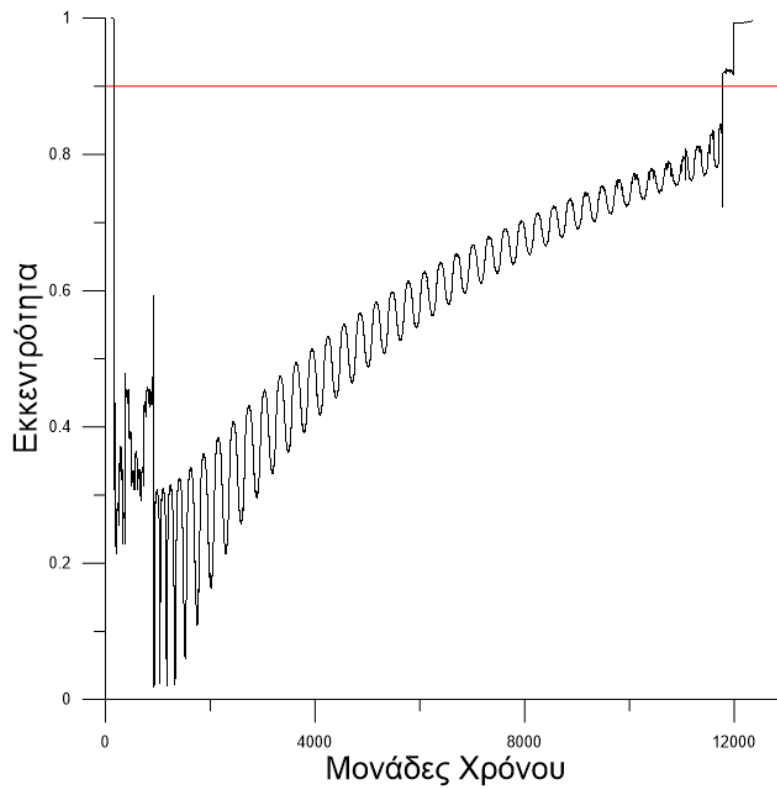
Θέλουμε να επισημάνουμε ότι για διάρκειες <4 Kyr (που αποτελούν το 99.39% των προσομοιώσεων) καθώς και για διάρκειες μεταξύ 4 και 8 Kyr (0.27% των προσομοιώσεων) ισχύουν στην πλειοψηφία τους αντίστοιχοι μηχανισμοί με αυτούς που αναφέραμε στις παραγράφους 3.2 και 3.3. Προς αποφυγή επανάληψης, στη συγκεκριμένη παράγραφο θα επικεντρωθούμε μόνο στις ιδιάζουσες περιπτώσεις, που αποκλίνουν από τις προηγούμενες εικόνες που έχουν ήδη εμφανιστεί νωρίτερα, ώστε να μπορέσουμε να εξετάσουμε αναλυτικότερα τις τροχιές που παρουσιάζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον.

Οι τροχιές με διάρκεια >8 Kyr (0.34%) εξετάστηκαν και επίσης βρέθηκαν να κυριαρχούνται από τους ίδιους μηχανισμούς που περιγράφονται στις παραγράφους 3.2 και 3.3 με εξαίρεση μία τροχιά με $t_0 = 107.5$ και $d = -1.7$ (τροχιά10), που είναι η μόνη σε αυτό το μοντέλο που εμφανίζει τα κριτήρια της παγίδευσης. Η τροχιά φαίνεται στο σχήμα 52, και τα τροχιακά της χαρακτηρηστικά στα σχήματα 53 και 54. Αυτό που παρατηρούμε είναι πως η συγκεκριμένη τροχιά είναι η μοναδική που φαίνεται να είναι σταθερή και χωρίς να παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά για μεγάλο χρονικό διάστημα. Η έλλειψη κενού χώρου είναι μεταξύ άλλων αυτή που υποδηλώνει ότι ίσως αυτή η τροχιά να είναι αρκετά ευσταθέστερη από δυναμικής άποψης, ακόμη και αν δεν έχει απόλυτα σταθερά

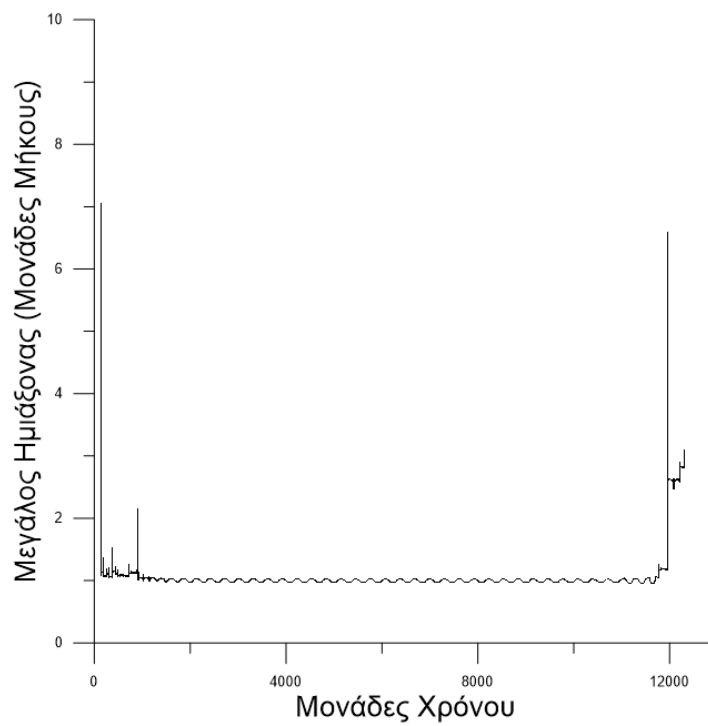
τροχιακά χαρακτηριστικά. Από τα γραφήματα των τροχιακών χαρακτηριστικών (σχ 53, 54) βλέπουμε ότι ο μεγάλος ημιάξονας κάνει μία πολύ μικρή ταλάντωση γύρω από τη τιμή 1, δηλαδή σε ακτίνα ίση με του Δία. Αυτό που δίνει μεγαλύτερο ενδιαφέρον δε, είναι ότι στις πρώτες χρονικές στιγμές η εκκεντρότητα φτάνει πολύ χαμηλές τιμές, και ταλαντώνεται γύρω από την τιμή 0.18. Όπως φαίνεται, η τιμή του μεγάλου ημιάξονα παραμένει σχετικά σταθερή πέρα από την μικρή ταλάντωση, όμως η εκκεντρότητα αυξάνεται, αν και επίσης παρουσιάζει ταλαντώσεις. Η τροχιά του σώματος διαρκεί για περίπου 22 Ky, πριν οδηγηθεί σε κοντινή προσέγγιση με το Δία και τελικά καταλήξει να πέφτει στον ήλιο.



Σχήμα 48: Τροχιά 10

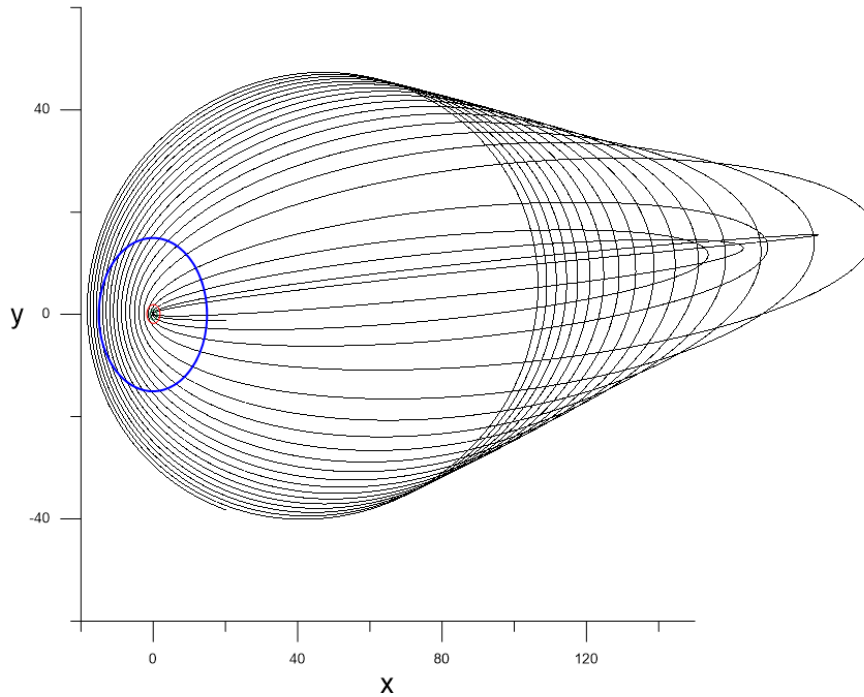


Σχήμα 49: Η εκκεντρότητα της τροχιάς 10

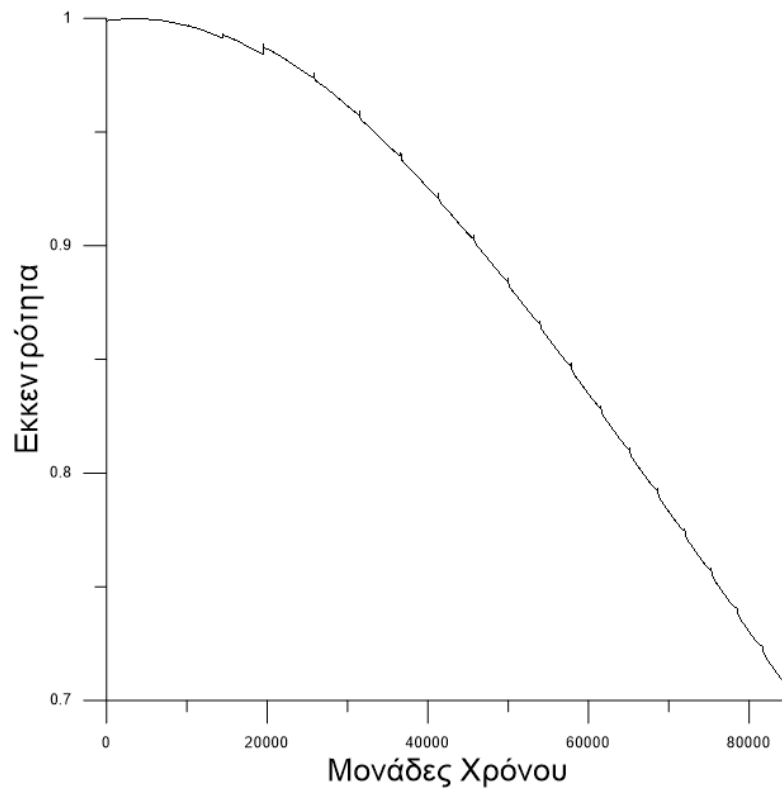


Σχήμα 50: Ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς 10

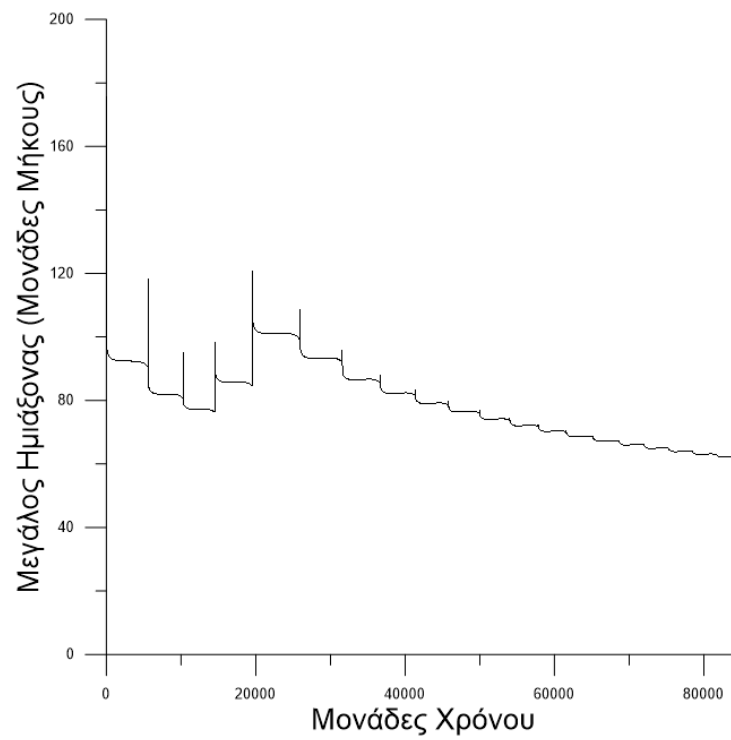
Μερικές ακόμα ιδιαίτερες τροχιές, περίπου 50, εμφανίστηκαν σε αυτό το μοντέλο, με αστεροειδείς οι οποίοι απομακρύνονται από το ηλιακό σύστημα αλλά αποκτούν τροχιές που μοιάζουν ευσταθείς μακριά από αυτό, σε τιμές μεγάλου ημιάξονα που ξεπερνούν τα 250 AU. (Σχήματα 55-57)



Σχήμα 51: Τροχιά για $t_0=32.3$ και $d=-1.28$. Με μπλε σημειώνεται το μέγιστο της παραμέτρου απόσβεσης



Σχήμα 52: Η εκκεντρότητα της τροχιάς του σχ. 55 ως προς το χρόνο



Σχήμα 53: Ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς του σχ. 55 ως προς το χρόνο

Όπου μπορούμε να δούμε από το διάγραμμα της εκκεντρότητας η τροχιά τείνει να γίνει όλο και πιο κυκλική, καθώς η εκκεντρότητα φαίνεται να ελαττώνεται σταθερά. Ταυτόχρονα, ο μεγάλος ημιάξονας διατηρείται σταθερός για το κομμάτι της τροχιάς μακριά από τη σκόνη, όταν όμως η τροχιά πλησιάζει την περιοχή και χάνει ενέργεια βλέπουμε τον μεγάλο ημιάξονα να μειώνεται, διατηρώντας όμως μεγάλες τιμές (υπενθυμίζουμε ότι με την κανονικοποίηση οι 80 μονάδες μήκους αντιστοιχούν περίπου στα 400 AU).

4. Συμπεράσματα

Είναι αρκετά ξεκάθαρο ότι με κύριο μηχανισμό τη βαρύτητα στο επίπεδο μοντέλο μας δεν μπορεί να υπάρξει παγίδευση αστεροειδών σε ανάδρομες τροχιές. Οι λίγοι αστεροειδείς που επιβιώνουν για μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα δεν έχουν σταθερές τροχιές, αλλά χαοτικές και με τροχιακά χαρακτηριστικά τα οποία μεταβάλλονται ραγδαία σε περίπτωση κοντινού περάσματος από πλανήτη. Επιπλέον ακόμα και αυτές οι λίγες τροχιές που επιβιώνουν δίνουν πολύ μικρότερους χρόνους ζωής από αυτούς που περιγράφουν τα δυναμικά μοντέλα, περίπου το μισό από το υπολογιζόμενο ελάχιστο, το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η βαρύτητα πιθανόν δεν αποτελεί τον κύριο μηχανισμό παγίδευσης των ανάδρομων αστεροειδών.

Με την εισαγωγή της σκόνης εντός ή εκτός του ηλιακού συστήματος προσπαθήσαμε να δοκιμάσουμε θεωρίες παγίδευσης αστεροειδών στην πρώιμη εποχή του ηλιακού συστήματος, λίγο μετά τη γένεση των πλανητών από τον πρωτοπλανητικό δίσκο, την εποχή την οποία υπολογίζεται ότι παγιδεύτηκε ο BZ509. Παρ' ότι με την εισαγωγή σκόνης στο εσωτερικό του ηλιακού συστήματος φάνηκε να υπάρχει αύξηση στη διάρκεια παραμονής των σωμάτων, οι τροχιές και πάλι δεν ήταν σταθερές. Τα σώματα παρουσίαζαν ποιοτικά την ίδια εικόνα τροχιακών χαρακτηριστικών όπως και στην περίπτωση χωρίς σκόνη, καθώς ήταν εύκολη η μεταβολή τους από τους πλανήτες, ακόμα και αν προσωρινά βρισκόντουσαν σε σταθερή ελλειπτική τροχιά.

Η σκόνη στο εξωτερικό του ηλιακού συστήματος ήταν το μοντέλο που έδωσε, συγκριτικά με τα άλλα δύο, πιο ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Ξεκινώντας από τις παγιδεύσεις αστεροειδών σε μεγάλα a , έξω από τη ζώνη Edgeworth-Kuiper, αξίζει να σχολιάσουμε ότι έδωσε το μεγαλύτερο ποσοστό παγίδευσης στην εγγύτητα του ηλιακού συστήματος. Αν και ο στόχος της εργασίας ήταν κυρίως τροχιές αστεροειδών με μικρότερα a , το φαινόμενο αυτό έχει ενδιαφέρον να εξεταστεί. Αν και φαίνεται να ευνοείται η παγίδευση σε εκείνες τις περιοχές όταν έχουμε την ύπαρξη σκόνης, οι τροχιές χάνουν συνέχεια ενέργεια, και γίνονται όλο και λιγότερο έκκεντρες. Το πρόβλημα είναι ότι οι αστεροειδείς που έχουν $a > 50 AU$ έχουν τυπικά και μεγάλες εκκεντρότητες όταν βρίσκονται κοντά στο επίπεδο και όχι σε πολικές τροχιές. Π.χ. ο 2015RM306 με $i = 175.98^\circ$ έχει $a = 246 AU$ και $e = 0.9534$, τιμές που δεν αντικατοπτρίζονται από τις τροχιές των προσομοιώσεων.

Επίσης στο μοντέλο της σκόνης στο εξωτερικό του ηλιακού συστήματος μας έδωσε ίσως το σημαντικότερο αποτέλεσμα, καθώς για μία σχετικά μεγάλη περίοδο είχαμε παγίδευση σε τροχιά με a ίσο με αυτό του BZ509, δηλαδή έναν μεγάλο ημιάξονα ίσο με του Δία, και μια εκκεντρότητα ακόμα μικρότερη του BZ509. Αν και η τροχιά ήταν μεταβαλλόμενη ως προς την εκκεντρότητα, φαίνεται να είναι ενεργειακά σταθερή, καθώς ο μεγάλος ημιάξονας της δεν παρουσίαζε διακυμάνσεις πέρα από μια μικρού πλάτους περιοδική ταλάντωση. Η τροχιά τελικά σταμάτησε όταν υπήρξε κάποια κοντινή προσέγγιση με το Δία.

Οι κοντινές προσεγγίσεις δεν φάνηκαν ιδιαίτερα σημαντικά σαν μηχανισμός παγίδευσης. Σίγουρα οδήγησαν αστεροειδείς σε τροχιές εντός του ηλιακού συστήματος, αλλά όπως είδαμε για τους αστεροειδείς με διάρκεια $< 4 \text{ Ky}$ οι κοντινές προσεγγίσεις απέτρεπαν την είσοδο ή τη συνέχιση της τροχιάς στο ηλιακό σύστημα. Δεν μπορούμε με βάση τη στατιστική να αποφανθούμε αν βοηθούν ή παρεμποδίζουν τις παγιδεύσεις, αλλά η εικόνα που παίρνουμε είναι ότι δεν κάνουν κατά πλειοψηφία ούτε το πρώτο ούτε το δεύτερο.

Ο λόγος που οι κοντινές προσεγγίσεις έπαιξαν και τόσο σημαντικό ρόλο σε πολλές τροχιές είναι ότι μελετήσαμε το πρόβλημα στο επίπεδο, αυξάνοντας έτσι την πιθανότητα για τέτοιες αλληλεπιδράσεις. Σε περίπτωση που το σύστημα ήταν τρισδιάστατο η πιθανότητα για κοντινή προσέγγιση συγκεντρώνεται μόνο στα σημεία των συνδέσμων, και όχι σε μεγάλα τμήματα της τροχιάς. Επίσης ένα τρισδιάστατο δυναμικό μοντέλο θα βοηθούσε και στην ακριβέστερη εισαγωγή και σύγκριση παρατηρούμενων ανάδρομων αστεροειδών, καθώς οι περισσότεροι από αυτούς βρίσκονται σε κλίσεις που απέχουν σημαντικά από το επίπεδο.

Βιβλιογραφία

- [1] NASA JPL Small Body Database (https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_query.html)
- [2] Kankiewicz, P. and Włodarczyk, I., “Dynamical lifetimes of asteroids in retrograde orbits”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 468, no. 4, pp. 4143–4150, 2017.
- [3] Pawel Kankiewicz, Ireneusz Włodarczyk, How long will asteroids on retrograde orbits survive?, *Planetary and Space Science*, Volume 154, 2018, Pages 72-76, ISSN 0032-0633
- [4] Li, M., Huang, Y., and Gong, S., “Survey of asteroids in retrograde mean motion resonances with planets”, *Astronomy and Astrophysics*, vol. 630, 2019
- [5] R. Brasser, M. E. Schwamb, P. S. Lykawka, R. S. Gomes, An Oort cloud origin for the high-inclination, high-perihelion Centaurs, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 420, Issue 4, March 2012, Pages 3396–3402
- [6] Wiegert, P., Connors, M. & Veillet, C. A retrograde co-orbital asteroid of Jupiter. *Nature* 543, 687–689 (2017)
- [7] F. Namouni, M. H. M. Morais, An interstellar origin for Jupiter’s retrograde co-orbital asteroid, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, Volume 477, Issue 1, June 2018, Pages L117–L121
- [8] Varvoglis, H., Sgardeli, V. & Tsiganis, K. Interaction of free-floating planets with a star–planet pair. *Celest Mech Dyn Astr* 113, 387–402 (2012)
- [9] Doultsinou, Vicky. (2015). Free-floating planet scattering by a star-planet pair: the 3D case. 10.13140/RG.2.2.36061.82406.
- [10] NASA JPL Horizons System (<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html>)
- [11] Χατζηδημητρίου, Ι. (2013). Θεωρητική Μηχανική. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Γιαχούδη
- [12] Stroustrup, B. (2013). *The C++ Programming Language*. Michigan: Addison-Wesley
- [13] Bulirsch, R., Stoer, J. (1993). *Introduction to Numerical Analysis*. Virginia: Springer-Verlag
- [14] M. Connors, P. Wiegert, A retrograde object near Jupiter's orbit, *Planetary and Space Science*, Volume 151, 2018, Pages 71-77, ISSN 0032-0633
- [15] Marcos, C. & Marcos, R.. (2014). Large retrograde Centaurs: Visitors from the Oort cloud?. *Astrophysics and Space Science*. 352. 409-419. 10.1007/s10509-014-1993-9.
- [16] M. H. M. Morais, F. Namouni, Asteroids in retrograde resonance with Jupiter and Saturn, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, Volume 436, Issue 1, 21 November 2013, Pages L30–L34

[17] HUANG Yukun. THE MYSTERIES OF RETROGRADE ASTEROIDS[J]. MECHANICS IN ENGINEERING, 2019, 41(6): 658-660.

[18] Thomas Kotoulas, George Voyatzis, Maria Helena Moreira Morais, Three-dimensional retrograde periodic orbits of asteroids moving in mean motion resonances with Jupiter, Planetary and Space Science, Volume 210, 2022, 105374, ISSN 0032-0633

Παραρτήματα

Παράρτημα Α

Κώδικας σε C++ που υπολογίζει τον μέγιστο χρόνο που μένει ένας αστεροειδής εντός του ηλιακού συστήματος

```
#include <stdio.h>
#include "dsystemRA0.h"
#include "restroe41.h"

int main()
{
    printf("RA0\n");
    printf("-----\n");
    Initialize(1.0E-12); /*Setting the accuracy for Bulirsch-Stoer*/
    InitRestroeH(0, 0, 1);
    //--- IC -----
    double X0[NEQ];
    OEPOS o;
    char fname[256]="SimulationInnerDissipationRetrograde.dat";
    FILE *fil=fopen(fname,"wt");
    fprintf(fil,"t0, d, u, MaxTimeInSystem, TotalTime, E, a, e\n");
    /*
    FilePrint Variables:
    t0: initial time, changes the initial positions of the planets
    d: position on y axis
    u: velocity
    MaxTimeInSystem: the maximum time for which the asteroid stays in the
solar system
    TotalTime: the total time for which the simulation ran
    a: semi major axis
```

```

    e: eccentricity
    */

    double dt1, dt0=0.001, dt0rk=0.0001; /*integration time step for
    Runge Kutta*/
    double tTotal=50000; /* Total time for which the simulation will run
    */
    double SolDist, SolDistBefore, SolDistAfter;
    double t1, t2, Delta;

for (double a = 0.0; a<=128.0; a += 0.2){

for (double b = 0.02; b<=2.0; b += 0.06){

    t1 = 0;
    t2 = 0;

    X0[0]=a; //initial time
    X0[1]=20.0; //x position
    X0[2]=-b; //y position
    X0[3]=0.0; //z position

    SolDist = sqrt(X0[1]*X0[1] + X0[2]*X0[2] + X0[3]*X0[3]); //Distance
    from the sun

    X0[4]=-sqrt(2.0/SolDist); //initial x speed
    X0[5]=0.0; //y speed
    X0[6]=0.0; //z speed

    double maxtime = 0;

```



```

//RUN
double X1[NEQ], X2[NEQ];

for (int j = 0; j < NEQ; j++) X1[j] = X0[j];
double derv[NEQ];

while (X1[0] < tTotal){

    integrate.drvs(X1, derv); //integration with Bulirsch-Stoer
    int ok = integrate.dtstep(X1, derv, dt0, X2, &dt1); dt0 = dt1;
//taking data from previous position X1 and then calculating next
position X2
    if (!ok)
    {
        integraterk.dtstep(X1, dt0rk, X2); dt0 = dt0rk; // "if
not ok" checks the accuracy of B-S, and then uses Rungke-Kutta if it's
smaller than the set accuracy
    }

    SolDistBefore=sqrt((X1[1])*(X1[1]) + (X1[2])*(X1[2]) +
X1[3]*X1[3]);
    SolDistAfter=sqrt((X2[1])*(X2[1]) + (X2[2])*(X2[2]) +
X2[3]*X2[3]);
    /* Calculates the distance from the sun in the 2 positions*/

    if (SolDistAfter <= 20 && SolDistBefore > 20) {
        t1 = X2[0]; //checking if the asteroid entered the solar
system
    }

    if (SolDistAfter >= 20 && SolDistBefore < 20) {
        t2 = X2[0];
    }
}

```

```

        if (t2-t1 > maxtime) maxtime=(t2-t1); //checking if the
asteroid exited the solar system and the maximum time is bigger

    }

    if ((SolDistAfter >= 220 && X2[0]>t1 && t1!=0) ||
SolDistAfter<0.01) {
        Delta = X2[0];
        t2 = X2[0];
        if (t2-t1 > maxtime) maxtime=(t2-t1); //checking if the
asteroid completely left the system or if it got too close to the sun

        break;
    }

    for (int j = 0; j < NEQ; j++) X1[j] = X2[j]; //using the
calculated position as the new initial position

}

GetOrbitalElements(X2, &o, 1);
double Ener2 = Energy(X2);
fprintf(fil,"%lf , %lf , %lf ,%lf, %lf , %8.9lf, %lf,
%lf\n",X0[0],X0[2],X0[4],maxtime,Delta, Ener2, o.a, o.e); //writing the
data on the file

}

printf("Initial time: %lf\n", a); //printing on screen, mainly to check
if the program is running
}

printf("End of Run!");
fclose(fil);
return 0;
}

```

Παράρτημα Β

Κώδικας σε C++ που υπολογίζει μόνο μία τροχιά και τα τροχιακά της χαρακτηριστικά

```
#include <stdio.h>
#include "dsystemRA0.h"
#include "restroe41.h"

int main()
{
printf("RA0\n");
    printf("-----\n");
    Initialize(1.0E-12); /*Setting the accuracy for Bulirsch-Stoer*/
    InitRestroeH(0, 0, 1);
    //--- IC -----
    double X0[NEQ];
    OEPOS o;
    double dt1, dt0=0.001, dt0rk=0.0001; /*integration time step for
Runge Kutta*/
    double tTotal=50000; /* Total time for which the simulation will run
*/
    double SolDist;

    X0[0]=32.3; //initial time
    X0[1]=20.0; //initial x coordinate
    X0[2]=-1.88; //initial y coordinate
    X0[3]=0.0; //initial z coordinate
```

```
SolDist = sqrt(X0[1]*X0[1] + X0[2]*X0[2] + X0[3]*X0[3]); //Distance  
from the sun
```

```
X0[4]=-sqrt(2.0/SolDist); //initial x speed
```

```
X0[5]=0.0; //y speed
```

```
X0[6]=0.0; //z speed
```

```
double Ener0 = Energy(X0); //Initial Energy
```

```
double Lx,Ly,Lz;
```

```
double L = AngMomentum(X0,&Lx,&Ly,&Lz); //Calling function that  
calculates angular momentum
```

```
double sma, ecc, Tiss;
```

```
sma = o.a;
```

```
ecc = o.e;
```

```
Tiss = 1/(2*sma)+sqrt(sma*(1-ecc*ecc)); //Calculating Tisserand  
Relation
```

```
char fname[256]="XY Trajectory.dat";
```

```
FILE *fil=fopen(fname,"wt");
```

```
fprintf(fil,"t, x, y, z, vx, vy, vz, Energy, L, Tiss\n");
```

```
fprintf(fil,"%lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %lf, %lf,  
%lf\n",X0[0],X0[1],X0[2],X0[3], X0[4], X0[5], X0[6], Ener0, L, Tiss);
```

```
//Printing time, position and speed coordinates, Energy, Ang.  
Momentum and Tisserand Relation Value
```

```

    GetOrbitalElements(X0, &o, 1); //Calculating orbital elements from
cartesian

    double dp[5];

    for(int i=0;i<5;i++) dp[i]=GetDistance(i,X0); //Calculating distance
from sun and planets

    char fname2[256]="Trajectory Orbitals.dat";
    FILE *filo=fopen(fname2,"wt");
    fprintf(filo,"t, a, e, i, d0, d1, d2, d3, d4\n");
    fprintf(filo,"%f, %8.7f, %8.7f, %8.7f, %8.7f, %8.7f, %8.7f, %8.7f,
%8.7f, 0 \n", X0[0], o.a, o.e, o.i, dp[0], dp[1],dp[2],dp[3],dp[4]);

    //Printing time, orbital elements (semi-major axis, eccentricity, and
inclination), and distance from the stellar bodies

    double dmin[NP+1];

    for(int i=0;i<=NP; i++) dmin[i]=dp[i]; //minimum distance from the
stellar bodies

    //Run
    double X1[NEQ], X2[NEQ];
    for (int j = 0; j < NEQ; j++) X1[j] = X0[j];
    double derv[NEQ]; char nm = 'B';

    while (X1[0] < tTotal){

        integrate.drvs(X1, derv); //integration with Bulirsch-Stoer
        int ok = integrate.dtstep(X1, derv, dt0, X2, &dt1); dt0 = dt1;

```

```

    if (!ok)
    {
        integraterk.dtstep(X1, dt0rk, X2); dt0 = dt0rk; nm = 'R';
        //"if not ok checks the accuracy of B-S, and then uses Rungke-Kutta if
        it's smaller than the set accuracy
    }
    else {dt0 = dt1; nm = 'B';}

    GetOrbitalElements(X2, &o, 1);

    double Ener = Energy(X2);

    double L = AngMomentum(X2,&Lx,&Ly,&Lz);

    SolDist=sqrt((X2[1])*(X2[1]) + (X2[2])*(X2[2]) + X2[3]*X2[3]);

    sma = o.a;

    ecc = o.e;

    Tiss = 1/(2*sma)+sqrt(sma*(1-ecc*ecc));

    for (int i = 0; i <= NP; i++) dp[i]=GetDistance(i,X2);

    for(int i=0;i<=NP; i++) if(dmin[i]>dp[i]) dmin[i]=dp[i];

    fprintf(fil,"%1f , %1f , %1f , %1f , %1f , %1f, %1f, %1f,
    %1f\n",X2[0],X2[1],X2[2],X2[3], X2[4], X2[5],Ener, L, Tiss);

    fprintf(filo, "%f %8.7f %8.7f %8.7f %8.7f %8.7f %8.7f %8.7f
    %c\n", X2[0], o.a, o.e, dp[0], dp[1],dp[2],dp[3],dp[4],nm);

    //nm prints B or R depending on if the numerical integration
    was B-S or R-K

```

```
    for (int j = 0; j < NEQ; j++) X1[j] = X2[j];
    //using the calculated position as the new initial position

    if(dp[0]<0.01 || dp[0]>800) {
        printf("Break\n");
        break;}
}

printf("End of Run\n");
fclose(fil); fclose(filo);
for(int i=0;i<5; i++) printf("dmin %d = %f\n",i,dmin[i]);
getchar();
return 0;
}
```