



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

**Σημεία ισορροπίας και ευστάθεια στο
δυναμικό περιστρεφόμενου τριαξονικού
ελλειψοειδούς (αστεροειδής)**

Πτυχιακή Εργασία
της
Ελένη Χρηστίδου, ΑΕΜ: 14948

Επιβλέπων Βουγιατζής Γεώργιος
Καθηγητής Α.Π.Θ.

17 Οκτωβρίου 2023

Περίληψη

Η πτυχιακή εργασία επικεντρώνεται στη μελέτη του βαρυτικού δυναμικού που προέρχεται από ένα περιστρεφόμενο τριαξονικό ελλειψοειδές, τα σημεία ισορροπίας σε αυτό και την ευστάθειά τους. Έχουμε επιλέξει αυτή τη μορφή σχήματος διότι έχουν καταγραφεί αστεροειδείς ανάλογης διαμόρφωσης οι οποίοι αποτελούν αντικείμενο ενδιαφέροντος για τη διαστημική εξερεύνηση. Κάθε ευσταθές σημείο ισορροπίας στο περιστρεφόμενο ελλειψοειδές αποτελεί μία σταθερή τροχιά γύρω από τον υπό μελέτη αστεροειδή στην οποία μπορεί να τοποθετηθεί ένα διαστημικό σκάφος. Αρχικά γίνεται η περιγραφή του δυναμικού, χρησιμοποιώντας ως παραμέτρους τις διαστάσεις, τη μάζα και τη γωνιακή ταχύτητα του ελλειψοειδούς και η επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας για την εύρεση των σημείων ισορροπίας και των ιδιοτιμών τους. Σύμφωνα με τη μορφή των ιδιοτιμών (πραγματικές, φανταστικές ή μιγαδικές) τα σημεία χαρακτηρίζονται ως ευσταθή ή ασταθή. Με την παραμετρική μελέτη των σημείων και την οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων σε διαγράμματα ευστάθειας, μπορούμε να εντοπίσουμε τα κρίσιμα σημεία ευστάθειας και να περιγράψουμε μία διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ ευστάθειας και αστάθειας με παραμέτρους τις διαστάσεις του ελλειψοειδούς που χρησιμοποιήθηκαν στην περιγραφή του δυναμικού. Προσεγγίζουμε, επιπλέον, τη διαχωριστική επιφάνεια σχηματίζοντας επιφάνειες πολυωνυμικής προσαρμογής 2ου και 3ου βαθμού και ορίζουμε το παραμετρικό κριτήριο ευστάθειας, το οποίο με την εισαγωγή των παραμέτρων που χαρακτηρίζουν ένα σημείο ισορροπίας δείχνει την ευστάθεια του. Τέλος, αξιολογείται η αξιοπιστία των προσεγγιστικών επιφανειών με βάση την ακρίβειά και την πολυπλοκότητά τους με τη χρήση της μεθόδου mean squared error και των κριτηρίων AIC και BIC.

Abstract

The thesis focuses on the study of the gravitational potential originating from a rotating triaxial ellipsoid, its equilibrium points and their stability. We have chosen this form of shape because asteroids of similar configuration have been recorded which are of interest for space exploration. Each stable equilibrium point on the rotating ellipsoid constitutes a stable orbit around the asteroid under study, on which a spacecraft can be placed. Firstly, the potential is described, using for parameters the dimensions, mass and angular velocity of the ellipsoid, and the equilibrium equations are solved in order to find the equilibrium points and their eigenvalues. According to the form of the eigenvalues (real, imaginary or complex) the points are characterized as stable or unstable. By parametrically studying the points and visualizing the results on stability diagrams, we can locate the critical stability points and describe a boundary between stability and instability with parameters the dimensions of the ellipsoid which were used to describe the potential. We also approximate the interface by forming 2nd and 3rd degree polynomial fitting surfaces and define the parametric stability criterion, which shows the stability of an equilibrium point. Finally, the reliability of the approximating surfaces is evaluated based on their accuracy and complexity using the mean squared error method and the AIC and BIC criteria.

Σημεία ισορροπίας και ευστάθεια στο δυναμικό
περιστρεφόμενου τριαξονικού ελλειψοειδούς
(αστεροειδής)

Ελένη Χρησίδου
elechris@auth.gr

17 Οκτωβρίου 2023

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	2
1.1	Αστεροειδείς	2
1.1.1	Κατηγοριοποίηση αστεροειδών	3
1.1.2	Σχήματα αστεροειδών	3
1.1.3	Σκοπός της πτυχιακής εργασίας	4
2	Θεωρητική ανάλυση	5
2.1	Πεδίο κεντρικών δυνάμεων	5
2.2	Τριαξονικό ελλειψοειδές	5
2.3	Σημεία ισορροπίας και ευστάθεια	9
2.3.1	Ευστάθεια σημείων Ισορροπίας	10
2.3.2	Ευστάθεια σημείων ισορροπίας στους άξονες OX και OY	12
2.3.3	Θέση σημείων ισορροπίας	13
3	Επεξεργασία δεδομένων	15
3.1	Ανάλυση	15
4	Παραμετρικό κριτήριο ευστάθειας	21
4.1	Κρίσιμα Σημεία Ευστάθειας	21
4.2	Προσεγγιστικές επιφάνειες	24
4.2.1	Παραμετρικό Κριτήριο Ευστάθειας	27
4.2.2	Mean Squared Error	30
4.2.3	Κριτήρια AIC - BIC	32
5	Εφαρμογές σε αστεροειδείς	34
6	Συμπεράσματα	35
A'	Κώδικας σε mathematica	37

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Αστεροειδείς

Οι αστεροειδείς, αλλιώς γνωστοί ως ελάσσονες πλανήτες, είναι μικρά στερεά σώματα που βρίσκονται σε τροχιά γύρω από τον Ήλιο με διάφορα μεγέθη, από βραχώδη αντικείμενα με διάμετρο 1 μέτρου έως νάνους πλανήτες με σχεδόν 1000 km διάμετρο.

Η προέλευση τους εντοπίζεται στους πρωτο-πλανητικούς δίσκους, όπου τα θρυμματισμένα απομεινάρια πλανητοειδών που δεν συνέβαλαν στον σχηματισμό κάποιου πλανήτη, αποτέλεσαν τους αστεροειδείς.

Η πλειοψηφία των γνωστών αστεροειδών βρίσκεται σε τροχιές μεταξύ των τροχιών των πλανητών Άρη και Δία, στην περιοχή που ονομάζεται **κύρια ζώνη αστεροειδών**, σε απόσταση μεταξύ 2.2 και 3.2 αστρονομικών μονάδων (AU). Οι αποστάσεις αυτές δεν είναι ομοιόμορφα κατανομημένες αλλά εμφανίζουν κενά, δηλαδή απότομη μείωση πυκνότητας. Τα λεγόμενα **διάκενα Kirkwood** οφείλονται στον συντονισμό των περιόδων των αστεροειδών με τον πλανήτη Δία, συγκεκριμένα στους συντονισμούς 4:1, 3:1, 5:2, 7:3 και 2:1. Στον συντονισμό 3:1 για παράδειγμα, ο αστεροειδής εκτελεί 3 περιφορές γύρω από τον Ήλιο στον χρόνο που χρειάζεται ο Δίας για να εκτελέσει μία. Επομένως, μία στις τρεις περιφορές ο αστεροειδής και ο Δίας να βρίσκονται στην ίδια θέση. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο αστεροειδής μπορεί να δέχεται ισχυρές βαρυτικές δυνάμεις από τον πλανήτη με αποτέλεσμα η τροχιά του να καθίσταται ασταθής ή το αντίθετο.

Οι χαοτικές τροχιές που οφείλονται στους συντονισμούς προκαλούν την απόσπαση αστεροειδών από την κύρια ζώνη και την μετατροπή τους σε παραγήινους αστεροειδείς Near Earth Asteroids, NEAs, δηλαδή αστεροειδείς που οι τροχιές τους διασταυρώνονται με τις τροχιές εσωτερικών πλανητών.

Κάποιες περιπτώσεις συντονισμών συγκεντρώνουν τους αστεροειδείς σε ευσταθείς τροχιές αντί να τους διασκορπίζουν, όπως ο συντονισμός 3:2 όπου παρατηρείται η ομάδα αστεροειδών Hilda, οι Τρωικοί στον 1:1 και οι Hungarians στον 5:1.

Πέρα από την κύρια ζώνη, ομάδες αστεροειδών υπάρχουν στη ζώνη Kuiper που ονομάζονται trans-Neptunian objects, δηλαδή αντικείμενα που ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς τους είναι μεγαλύτερος από αυτόν του Ποσειδώνα. Τα σημαντικότερα υπερ-Ποσειδώνια αντικείμενα σε σχέση με το μέγεθος είναι οι Eris και Pluto, που μαζί με τα Makemake, Haumea και τον μεγαλύτερο αστεροειδή Ceres ανήκουν στο σύνολο των

νάνων πλανητών.

1.1.1 Κατηγοριοποίηση αστεροειδών

Οι αστεροειδείς στην κύρια ζώνη ανάλογα με το φάσμα της ανακλώμενης ακτινοβολίας, το χρώμα και την ανακλαστικότητα (albedo) ταξινομούνται σε 3 κύριους τύπους που χαρακτηρίζουν τη σύνθεση της επιφάνειάς τους:

1. Αστεροειδείς τύπου C (carbonaceous) με ανθρακική σύνθεση
2. Αστεροειδείς τύπου S (silicate) από πυρίτιο
3. Αστεροειδείς τύπου M (metallic) μεταλλική σύνθεση από νικέλιο-σίδηρο

Οι αστεροειδείς τύπου S επικρατούν στο εσωτερικό της κύριας ζώνης, ενώ οι τύπου C βρίσκονται σε πλειοψηφία στην εξωτερική περιοχή της κύριας ζώνης. Οι ανθρακώδεις αστεροειδείς σχηματίστηκαν όταν διάφοροι τύποι σκόνης και σωματιδίων στο νεαρό Ηλιακό Σύστημα συγκεντρώνονται για να σχηματίσουν αστεροειδείς πρώιμου τύπου.

Αυτό το σύστημα κατηγοριοποίησης επεκτείνεται στην συμπερίληψη και άλλων τύπων, όπως οι αστεροειδείς τύπου E των οποίων η επιφάνειά χαρακτηρίζεται από το πέτρωμα ενστατίτης και έχουν υψηλότερο albedo από τους τύπου M. Το 2008 τα φασματικά δεδομένα από τον αστεροειδή τύπου E 2867 Šteins που συνέλεξε το διαστημικό σκάφος Rosetta επιβεβαίωσαν τη σύνθεσή του κυρίως από ορυκτά φτωχά σε σίδηρο, όπως ο ενστατίτης.

1.1.2 Σχήματα αστεροειδών

Το μέγεθος και η μάζα ενός αστεροειδή έχουν ουσιαστικό ρόλο στο σχήμα του. Οι αστεροειδείς εμφανίζονται σε ένα ευρύ φάσμα σχημάτων. Οι μεγαλύτεροι από αυτούς όπως οι νάνοι πλανήτες Ceres (διάμετρος περίπου 1000 χιλιόμετρα), Pallas και Vesta (διάμετροι περίπου 500 χιλιόμετρα) έχουν σφαιρικό σχήμα καθώς όσο μεγαλύτερος είναι ο αστεροειδής και η μάζα του, το κέντρο του ασκεί μεγαλύτερη βαρυτική έλξη. Όταν η δύναμη από το κέντρο του υπερσχύσει την αντοχή του υλικού του σώματός του, το υλικό θα παραμορφωθεί ώστε να σχηματιστεί ένα πιο σταθερό, σφαιρικό σχήμα.

Αντίθετα, οι μικρότεροι αστεροειδείς δεν έχουν αρκετή μάζα για να προκαλέσουν την παραμόρφωση τους σε σφαίρες και συνεπώς έχουν ακανόνιστα σχήματα. Ένα τυπικό τέτοιο παράδειγμα είναι το **ελλειψοειδές σχήμα** που έχει ο αστεροειδής **Eros**.

Ο αστεροειδής 433 Eros είναι πρώτος παραγήτινος αστεροειδής που ανακαλύφθηκε και ο δεύτερος σε μέγεθος με διαστάσεις 33 x 13 x 13 χιλιόμετρα. Η τροχιά του είναι ελαφρώς ελλειπτική και διασταυρώνεται με την τροχιά του Άρη αλλά όχι της Γης. Η αποστολή NEAR Shoemaker που προσεδάφιστηκε στον 433 Eros στις 12/2/2001 υπήρξε η πρώτη προσεδάφιση σε αστεροειδή της ανθρωπότητας. Το διαστημικό σκάφος πέρασε ένα χρόνο σε τροχιά γύρω από τον αστεροειδή συλλέγοντας φωτογραφίες και άλλα δεδομένα πριν φτάσει στην επιφάνειά του.

Πίνακας 1.1: Χαρακτηριστικά του αστεροειδή Eros

Μέγεθος	33 x 13 x 13	km x km x km
Μάζα	7.2×10^{15}	kg
Περίοδος περιστροφής	5.270	ώρες
Περίοδος τροχιάς	1.76	χρόνια
Τύπος	S	
Μεγάλος Ημιάξονας	1.458	AU
Απόσταση Περηλίου	1.13	AU
Απόσταση Αφηλίου	1.78	AU
Εκκεντρότητα	0.223	
Κλίση	10.8	μοίρες
Geometric Albedo	0.16	

Άλλοι αστεροειδείς μπορεί να έχουν διαφορετικά ακανόνιστα σχήματα, όπως ο αστεροειδής Arrokoth που πιστεύεται ότι σχηματίστηκε από δύο διαφορετικά σώματα που συγκρούστηκαν μεταξύ του και έμειναν μαζί.

1.1.3 Σκοπός της πτυχιακής εργασίας

Οι αστεροειδείς αποτελούν το κέντρο ενδιαφέροντος επιστημόνων και θα αποτελέσουν αντικείμενο μελέτης για πολλές μελλοντικές διαστημικές αποστολές. Το σκάφος που πρόκειται να μελετήσει τον αστεροειδή θα πρέπει να βρίσκεται σε τροχιά γύρω του ένα σημαντικό χρονικό διάστημα. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό, ο δορυφόρος θα πρέπει να εκτελέσει μία σειρά από μανούβρες μέχρι να βρεθεί στην κατάλληλη τροχιά η οποία θα είναι ευσταθής, δηλαδή να διατηρεί τη θέση του σε σχέση με τον περιστρεφόμενο αστεροειδή χωρίς να χρειάζεται επιπλέον μανούβρες.

Κατά τη διάρκεια της τροχιάς οι δορυφόροι δέχονται τη βαρυτική έλξη από τον αστεροειδή, η οποία λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη και λόγω της περιστροφής δέχονται και μία φυγόκεντρο δύναμη. Σε συγκεκριμένη απόσταση από τον αστεροειδή, οι δυνάμεις αυτές εξισώνονται με αποτέλεσμα την ύπαρξη τροχιών ευσταθούς ισορροπίας. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις, οι τροχιές είναι ασταθείς. Η αστάθεια σημαίνει ότι το σκάφος που θα βρίσκεται σε μία από αυτές να αδυνατεί να παραμείνει σε τροχιά και είτε πέφτει πάνω στον αστεροειδή είτε εκτοξεύεται μακριά του.

Καθώς οι αστεροειδείς εμφανίζονται στο ηλιακό σύστημα σε ποικίλα σχήματα και μεγέθη, είναι απαραίτητο να πραγματοποιηθεί μελέτη του βαρυτικού δυναμικού και των τροχιών ισορροπίας για σχήματα πέρα του σφαιρικού. Σε αυτή την εργασία εξετάζονται οι αστεροειδείς που χαρακτηρίζονται ως προς το σχήμα τους από το **τριαξονικό ελλειψοειδές** (triaxial ellipsoid) και περιστρέφονται. Η ανάλυση περιλαμβάνει το πώς επηρεάζουν την ύπαρξη ευστάθειας διάφορες παράμετροι του ελλειψοειδούς όπως οι διαστάσεις, η μάζα και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.

Κεφάλαιο 2

Θεωρητική ανάλυση

2.1 Πεδίο κεντρικών δυνάμεων

Σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων με κέντρο O ασκείται σε υλικό σημείο με διάνυσμα θέσης \mathbf{r} δύναμη:

$$\mathbf{F} = f(r)\hat{e}_r$$

όπου e_r είναι το μοναδιαίο διάνυσμα θέσης.

Οι κεντρικές δυνάμεις προέρχονται από δυναμικό:

$$V(r) = - \int F(r)dr \quad (2.1)$$

Επομένως ισχύει η σχέση:

$$F(r) = -\frac{dV}{dr} \quad (2.2)$$

Κεντρικές δυνάμεις είναι οι βαρυτικές, όπως αυτές που δέχεται ένα σώμα που βρίσκεται σε τροχιά γύρω από ένα άλλο σώμα στο διάστημα.

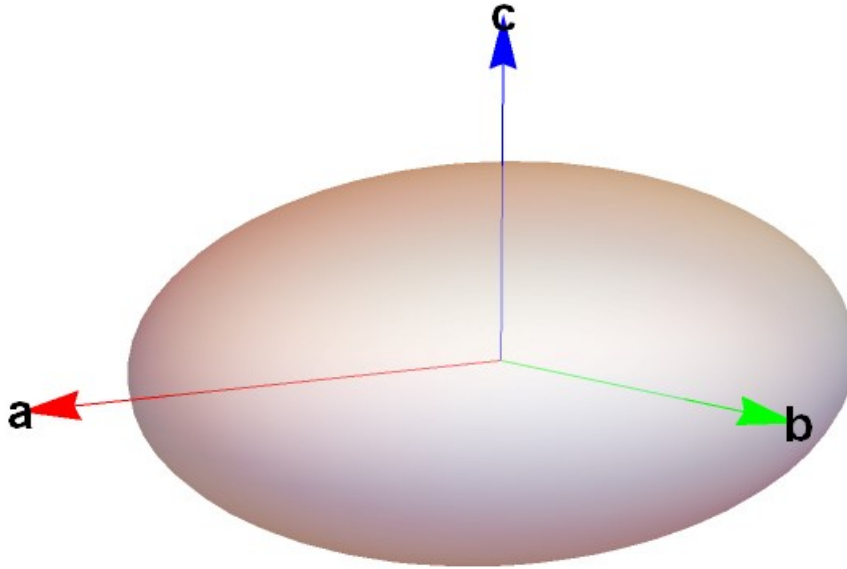
Στην περίπτωση κίνησης σώματος γύρω από περιστρεφόμενο τριαξονικό ελλειψοειδές που θα εξετάσουμε παρακάτω, η ελκτική κεντρική δύναμη που δέχεται αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη. Ορίζοντας ένα περιστρεφόμενο σύστημα (body fixed frame) το οποίο ακολουθεί την περιστροφή του αστεροειδούς, εμφανίζεται η φυγόκεντρος δύναμη η οποία τείνει να απομακρύνει το σώμα από το ελλειψοειδές. Προκειμένου το σώμα να ισορροπήσει σε σταθερή τροχιά γύρω από το ελλειψοειδές, πρέπει η βαρυτική δύναμη να γίνει ίση με την φυγόκεντρο δύναμη.

2.2 Τριαξονικό ελλειψοειδές

Θεωρούμε ομογενές τριαξονικό ελλειψοειδές με κύριους ημιάξονες a, b, c ($a > b > c$) και καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ με αρχή το κέντρο O του ελλειψοειδούς.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.3)$$

Το ελλειψοειδές περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω , έχει μάζα m και επιφανειακή πυκνότητα σ .



Σχήμα 2.1: Τριαξονικό ελλειψοειδές με άξονες $a > b > c$

Το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου του ελλειψοειδούς σε εξωτερικό σημείο $P(x,y,z)$ σύμφωνα με [1] δίνεται από τη σχέση:

$$V(x, y, z) = -\pi\sigma abc \int_{\beta}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \frac{ds}{D(s)}\right) \quad (2.4)$$

όπου:

$$D(s) = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)} \quad (2.5)$$

Το λ που εμφανίζεται ως κάτω όριο των ολοκληρωμάτων είναι η μεγαλύτερη αλγεβρικά ρίζα της εξίσωσης:

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 \quad (2.6)$$

Παραγωγίζουμε την εξίσωση δυναμικού ως προς x, y, z και βρίσκουμε τις συνιστώσες της δύναμης.

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi\sigma abc x \int_{\beta}^{\infty} \left(\frac{ds}{(a^2 + s)D(s)}\right) \quad (2.7)$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -2\pi\sigma abc y \int_{\beta}^{\infty} \left(\frac{ds}{(b^2 + s)D(s)}\right) \quad (2.8)$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi\sigma abc z \int_{\beta}^{\infty} \left(\frac{ds}{(c^2 + s)D(s)} \right) \quad (2.9)$$

Η μελέτη της κίνησης στο βαρυτικό πεδίο του ελλειψοειδούς γίνεται στο επίπεδο XOY, επομένως δεν χρειάζεται η συνιστώσα F_z .

Για την απλοποίηση των υπολογισμών, αντικαθιστούμε τα ολοκληρώματα στις σχέσεις των δυνάμεων και του δυναμικού με τα ελλειπτικά ολοκληρώματα του Legendre 1ου και 2ου είδους:

$$F(\omega_s, k) = \int_0^{\omega_s} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad E(\omega_s, k) = \int_0^{\omega_s} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (2.10)$$

όπου,

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \quad (2.11)$$

και

$$\omega(x, y) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 + s}}\right) \quad (2.12)$$

Μετά τις κατάλληλες αντικαταστάσεις προκύπτει η τελική μορφή του δυναμικού με ελλειπτικά ολοκληρώματα:

$$V = -\frac{2\sigma\pi abc}{\sqrt{a^2 - c^2}} \left[1 - \frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{y^2}{a^2 - b^2} \right] F(\omega_{\beta}, k) + \left[\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{(a^2 - c^2)y^2}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} \right] E(\omega_{\beta}, k) + \frac{(c^2 + k[x, y])}{b^2 - c^2} y^2 - \frac{b^2 + \beta}{b^2 - c^2} z^2 \left] \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{D(\beta)} \quad (2.13)$$

Για να μελετήσουμε την κίνηση ενός σημείου στο επίπεδο XOY ($z=0$) του περιστρεφόμενου ελλειψοειδούς, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση Lagrange για το περιστρεφόμενο σύστημα:

$$L = \frac{1}{2} m [(\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2] - V(x, y) \quad (2.14)$$

Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (2.15)$$

και προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \ddot{y} - 2\omega\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (2.16)$$

Το δυναμικό λαμβάνοντας υπόψιν την περιστροφή είναι:

$$U = V(x, y) - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (2.17)$$

Σε αυτή την περίπτωση το ολοκλήρωμα της ενέργειας (ολοκλήρωμα Jacobi) είναι :

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U \quad (2.18)$$

Για την απλοποίηση των εξισώσεων λαμβάνοντας ότι ο όγκος είναι $V = \frac{4}{3}\pi abc$, εισάγουμε τη σταθερά μάζας :

$$\mu = \sigma\pi abc = \frac{3}{4}m \quad (2.19)$$

Πλέον το δυναμικό γράφεται :

$$V = \mu V_a \quad (2.20)$$

όπου,

$$V_a = -\frac{2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \left[1 - \frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{y^2}{a^2 - b^2} \right] F(\omega_{\beta}, k) + \left[\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{(a^2 - c^2)y^2}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} \right] E(\omega_{\beta}, k) + \frac{(c^2 + k[x, y])y^2 - \frac{b^2 + \beta}{b^2 - c^2}z^2}{D(\beta)} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{D(\beta)} \quad (2.21)$$

Επομένως, μπορούμε να περιγράψουμε το δυναμικό στο περιστρεφόμενο σύστημα ως :

$$U = \mu V_a - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) \quad (2.22)$$

Για περαιτέρω διευκόλυνση στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων, εφαρμόζουμε μετασχηματισμούς για να αλλάξουμε την κλίμακα μονάδων. Ουσιαστικά εκφράζουμε τα μήκη των αξόνων χρησιμοποιώντας ως αναφορά το μήκος του μεγάλου ημιάξονα a .

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{a}, \quad t' = \omega t \quad (2.23)$$

συνεπώς,

$$x = ax', \quad y = ay', \quad t = \frac{t'}{\omega} \quad (2.24)$$

Θέτουμε την παράμετρο d που θα χρησιμοποιηθεί στην στατιστική ανάλυση παρακάτω :

$$d = \frac{\mu}{a^3\omega^2} \quad (2.25)$$

Αξιοποιώντας όλες τις απλοποιήσεις και παραλείποντας τους τόνους από τον μετασχηματισμό των μονάδων, προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης :

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - d\frac{\partial V_a}{\partial x} \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = y - d\frac{\partial V_a}{\partial y} \quad (2.26)$$

ή διαφορετικά :

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = -\frac{\partial U_a}{\partial x} \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = -\frac{\partial U_a}{\partial y} \quad (2.27)$$

με

$$U_a = dV_a - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (2.28)$$

Ισοδύναμα προκύπτει:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x + dF_x^* \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = y + dF_y^* \quad (2.29)$$

όπου:

$$F_x^* = -\frac{\partial V_a}{\partial x} \quad \text{και} \quad F_y^* = -\frac{\partial V_a}{\partial y} \quad (2.30)$$

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να γραφεί και ως σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p \\ \dot{y} &= q \\ \dot{p} &= dF_x^* + x + 2q \\ \dot{q} &= dF_y^* + y - 2p \end{aligned} \quad (2.31)$$

2.3 Σημεία ισορροπίας και ευστάθεια

Σημείο ισορροπίας αποτελεί το σημείο στο οποίο αν τοποθετηθεί ένα υλικό σημείο χωρίς αρχική ταχύτητα, θα μείνει στη θέση αυτή μόνιμα. Στην περίπτωση του περιστρεφόμενου τριαξονικού ελλειψοειδούς, τα σημεία ισορροπίας ορίζονται ως προς τους περιστρεφόμενους άξονες OXYZ, επομένως, για έναν αδρανειακό παρατηρητή αποτελούν **τροχιές ισορροπίας** γύρω από το ελλειψοειδές.

Για τη μελέτη της ευστάθειας ή αστάθειας του σημείου ισορροπίας, μελετάμε πώς συμπεριφέρεται το υλικό σημείο που ισορροπεί όταν δέχεται μικρές εξωτερικές διαταραχές. Στην περίπτωση που η κίνηση του σημείου εξαιτίας των διαταραχών παραμένει στη γειτονιά του σημείου ισορροπίας, τότε το σημείο ονομάζεται σημείο ευσταθούς ισορροπίας [1]. Στην περίπτωση που το υλικό σώμα απομακρυνθεί, το σημείο χαρακτηρίζεται ως ασταθές.

Από τη δυναμική πλευρά, το υλικό σημείο δέχεται την βαρυτική έλξη του ελλειψοειδούς και τη φυγόκεντρο δύναμη λόγω περιστροφής, η οποία στα σημεία ισορροπίας εξουδετερώνει την ελκτική δύναμη. Καθώς η φυγόκεντρος δύναμη διέρχεται πάντα από την αρχή O των αξόνων, στα σημεία ισορροπίας πρέπει και η ελκτική δύναμη να διέρχεται από την αρχή του συστήματος ώστε η συνισταμένη τους να είναι μηδέν, άρα τα σημεία ισορροπίας εμφανίζονται πάνω στους άξονες OX και OY.

Για την εύρεση των σημείων ισορροπίας θέτουμε στις εξισώσεις κίνησης:

$$\dot{x} = \dot{y} = \ddot{x} = \ddot{y} = 0 \quad (2.32)$$

και προκύπτει το σύστημα για επίλυση:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (2.33)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \omega^2 x \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \omega^2 y \quad (2.34)$$

2.3.1 Ευστάθεια σημείων Ισορροπίας

Για να ερευνήσουμε την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας χρησιμοποιούμε το γραμμικοποιημένο σύστημα των εξισώσεων 2.31 το οποίο γράφεται:

$$\dot{Z} = AZ \quad \acute{\eta} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ p \\ q \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

όπου στα σημεία ισορροπίας:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial p} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial p} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial q} \\ \frac{\partial \dot{p}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial q} \\ \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 + d \frac{\partial F_x^*}{\partial x} & d \frac{\partial F_x^*}{\partial y} & 0 & 2 \\ d \frac{\partial F_y^*}{\partial x} & 1 + d \frac{\partial F_y^*}{\partial y} & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Αν παραγωγίσουμε τη σχέση για το δυναμικό περιστρεφόμενου ελλειψοειδούς 2.22 προκύπτει:

$$\frac{\partial U_a}{\partial x} = d \frac{\partial V_a}{\partial x} - x \quad \text{και} \quad \frac{\partial U_a}{\partial y} = d \frac{\partial V_a}{\partial y} - y \quad (2.37)$$

και από 2.30:

$$d \frac{\partial F_x^*}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V_a}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2} = A \quad \text{και} \quad d \frac{\partial F_y^*}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V_a}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 U_a}{\partial y^2} = B \quad (2.38)$$

Επιπλέον,

$$\frac{\partial F_x^*}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V_a}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial F_y^*}{\partial x} \quad (2.39)$$

Επομένως, ο πίνακας A 2.36, μπορεί να γραφεί διαφορετικά :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\partial^2 U_a}{\partial x^2} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{\partial^2 U_a}{\partial y^2} & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A & 0 & 0 & 2 \\ 0 & B & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Ο πίνακας A υπολογίζεται για τα σημεία ισορροπίας, οπότε γίνεται ένας σταθερός πίνακας. Έτσι, οι λύσεις του συστήματος έχουν τη μορφή $\mathbf{Z} = \mathbf{u}e^{\lambda t}$ και αντικαθιστώντας τις λύσεις το σύστημα γράφεται ως $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = 0$. Για να έχει λύση το σύστημα (διάφορη της μηδενικής λύσης), πρέπει η ορίζουσα να είναι ίση με το μηδέν.

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \Rightarrow \quad (2.41)$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ A & 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & B & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.42)$$

Αναλύοντας την ορίζουσα βρίσκουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος.

$$\lambda^4 + (4 - A - B)\lambda^2 + AB = 0 \quad (2.43)$$

Επιλύοντας την βρίσκουμε τις ιδιοτιμές λ_i του πίνακα του συστήματος τις οποίες αξιοποιούμε στον χαρακτηρισμό της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας.

$$\lambda_{1,3} = \pm \sqrt{\frac{-(4 - A - B) + \sqrt{(4 - A - B)^2 - 4AB}}{2}} = \pm \sqrt{R_1} \quad (2.44)$$

$$\lambda_{2,4} = \pm \sqrt{\frac{-(4 - A - B) - \sqrt{(4 - A - B)^2 - 4AB}}{2}} = \pm \sqrt{R_2} \quad (2.45)$$

Όπου το + αφορά τα λ_1, λ_2 και το - τα λ_3, λ_4 . Αρχικά, θεωρούμε ότι $R_1 \neq R_2 \implies \lambda_1 \neq \lambda_2$. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχουν τέσσερις λύσεις γραμμικώς ανεξάρτητες μεταξύ τους και η γενική λύση αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των :

$$u^i e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.46)$$

Στη συνέχεια διακρίνουμε διαφορετικές περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές των R_1 και R_2 :

1. Οι R_1 και R_2 είναι **πραγματικοί και θετικοί αριθμοί**.

Η γενική λύση θα περιέχει τους όρους :

$$u^1 e^{\lambda_1 t}, \quad u^2 e^{\lambda_2 t}, \quad u^3 e^{-\lambda_1 t}, \quad u^4 e^{-\lambda_2 t}$$

οι δύο πρώτοι αυξάνονται συνεχώς με τον χρόνο, συνεπώς, το υλικό σημείο απομακρύνεται από το σημείο ισορροπίας και άρα πρόκειται για σημείο ασταθούς ισορροπίας (**διπλή αστάθεια**).

2. Οι R_1 και R_2 είναι **πραγματικοί και αρνητικοί αριθμοί**.

Επομένως, όλες οι ρίζες λ_i είναι **φανταστικές** και οι όροι $u^i e^{\lambda_i t}$ χαρακτηρίζουν αρμονική ταλάντωση. Η συνολική κίνηση είναι επαλληλία αρμονικών ταλαντώσεων στη γειτονιά του σημείου ισορροπίας, το οποίο είναι σημείο **ευσταθούς ισορροπίας**.

3. Οι R_1 και R_2 είναι **πραγματικοί και ετερόσημοι αριθμοί**.

Στην περίπτωση αυτή οι ρίζες λ_i είναι δύο πραγματικές και αντίθετες, και δύο φανταστικές. Η πραγματική θετική ρίζα οδηγεί σε αστάθεια, όπως στην 1η περίπτωση (**απλή αστάθεια**).

4. Οι R_1 και R_2 είναι **συζυγείς μιγαδικοί**.

Τότε οι ρίζες λ_i είναι **μιγαδικές** και κάποιες από αυτές έχουν **θετικά πραγματικά μέρη**, με αποτέλεσμα οι όροι $e^{\lambda_i t}$ να αυξάνονται με το πέρασμα του χρόνου. Επομένως, και σε αυτή η περίπτωση το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές (**μιγαδική αστάθεια**).

Στην περίπτωση που $R_1 = R_2 = R$, για τις ρίζες ισχύει ότι:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{R}$$

και

$$\lambda_3 = \lambda_4 = -\sqrt{R}$$

Η γενική λύση του συστήματος περιέχει όρους:

$$u = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_1 t} + (c_3 + c_4 t)e^{\lambda_3 t} \quad (2.47)$$

Σε αυτή την περίπτωση, όπως και στις παραπάνω περιπτώσεις, η παρουσία του χρόνου σημαίνει μη περατωμένη κίνηση, συνεπώς **αστάθεια**.

2.3.2 Ευστάθεια σημείων ισορροπίας στους άξονες ΟΧ και ΟΥ

Για τα σημεία ισορροπίας που βρίσκονται πάνω στον άξονα ΟΧ παρατηρούμε ότι ισχύει $U_a(x) = U_a(-x)$. Επομένως, είναι συμμετρικά ως προς την αρχή Ο των αξόνων και έχουν συντεταγμένες της μορφής $(\pm x_0, 0)$. Για να είναι τα σημεία ευσταθή πρέπει να ανήκουν στην δεύτερη κατηγορία, δηλαδή R_1 και R_2 να είναι πραγματικοί και αρνητικοί αριθμοί. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν ικανοποιούνται ταυτόχρονα ορισμένες συνθήκες:

$$\begin{aligned} (4 - A - B)^2 - 4AB &\geq 0 && \text{ώστε } R_1, R_2 \text{ πραγματικοί και } R_1 \neq R_2 \\ 4 - A - B &> 0 && \text{αρνητικοί} \\ AB &> 0 && \text{ομόσημοι} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Αποδεικνύεται ότι τα σημεία ισορροπίας πάνω στον άξονα OX δεν πληρούν τις συνθήκες για να παρουσιάζουν ευστάθεια ([1]). Επομένως, είναι ασταθή.

Τα σημεία ισορροπίας πάνω στον άξονα OY μπορεί να είναι ευσταθή ή ασταθή.

2.3.3 Θέση σημείων ισορροπίας

Εφόσον τα σημεία ισορροπίας του άξονα OX δεν παρουσιάζουν ευστάθεια, θα ασχοληθούμε μόνο με την εύρεση της θέσης των σημείων του άξονα OY με συντεταγμένες $(0, \pm y_0)$ (εμφανίζεται συμμετρία όπως και στην περίπτωση των σημείων του άξονα OX).

Τα σημεία ισορροπίας υπολογίζονται από την επίλυση της εξίσωσης

$$\frac{\partial U_a}{\partial y} = 0 \quad (2.49)$$

όπου U_a δίνεται από τη σχέση 2.22, στην οποία εμφανίζονται οι παράμετροι b,c,d. Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε κάνει την κανονικοποίηση:

$$a = 1 \quad b = \frac{b}{a} \quad c = \frac{c}{a} \quad (2.50)$$

Η επίλυση της εξίσωσης για διάφορες τιμές των παραμέτρων έγινε με αριθμητικές μεθόδους με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica.

Συγκεκριμένα, υπολογίστηκαν τα σημεία ισορροπίας για $d = 0.05 - 100$ και για τιμές $b = 0.05 - 0.95$ και $c = 0.05 - 0.95$.

Στους πίνακες 2.1 και 2.2 παρατηρούμε τη συμμετρία που παρουσιάζουν οι ιδιοτιμές. Στις φανταστικές ιδιοτιμές υπάρχει πολύ μικρό πραγματικό μέρος (της τάξεως του 10^{-16}) το οποίο πρέπει να οφείλεται σε αριθμητικό λάθος.

Βλέπουμε, επιπλέον, ότι τα σημεία ισορροπίας απομακρύνονται από το ελλειψοειδές καθώς αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου d. Από τον ορισμό του $d = \frac{\mu}{a^3 \omega^2}$, το φαινόμενο αυτό μπορεί να οφείλεται σε δύο παράγοντες:

1. Σε περίπτωση που μένει σταθερό το ω και αλλάζει το μ , αύξηση του d σημαίνει αύξηση του μ και συνεπώς αύξηση της μάζας του ελλειψοειδούς. Η αύξηση της μάζας έχει ως αποτέλεσμα το ελλειψοειδές να μπορεί να ασκεί μεγαλύτερη έλξη σε ένα υλικό σημείο που βρίσκεται σε συγκεκριμένη απόσταση. Για να συνεχίσουν να έχουν συνισταμένη μηδέν η βαρυτική έλξη και η φυγόκεντρος δύναμη, το σημείο ισορροπίας πρέπει να απομακρυνθεί από το ελλειψοειδές ώστε να μειωθεί η ελκτική δύναμη και να γίνει ίση με τη φυγόκεντρο (η οποία παραμένει ίδια)
2. Στην περίπτωση που μένει σταθερή η μάζα του ελλειψοειδούς ενώ μειώνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω , η φυγόκεντρος δύναμη μειώνεται. Επομένως, προκειμένου να συνεχίσει η φυγόκεντρος να είναι ίση με την κεντρομόλο δύναμη, απομακρύνεται το σημείο ισορροπίας από το ελλειψοειδές.

Πίνακας 2.1: Θέση σημείων ισορροπίας και ευστάθεια γύρω από περιστρεφόμενο ελλειψοειδές με συγκεκριμένες παραμέτρους b,c,d

d	b	c	y0	ευστάθεια
0.4	0.122	0.059	0.722	Μιγαδική αστάθεια
0.4	0.941	0.293	0.946	Διπλή αστάθεια
1	0.95	0.86	1,108	Ευστάθεια
5	0,689	0,5	1.867	Μιγαδική αστάθεια
5	0.815	0.194	1,900	Ευστάθεια
12	0.203	0.068	2.484	Ευστάθεια
20	0.662	0.455	2.977	Ευστάθεια

Πίνακας 2.2: Ιδιοτιμές σημείων ισορροπίας

d	b	c	y0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
0.4	0.122	0.059	0,722	$0.553 + 0.894i$	$0.553 - 0.894i$	$-0.553 + 0.894i$	$-0.553 - 0.894i$
0.4	0.941	0.293	0.946	1,089	-1,089	-0,600	0,600
1	0.95	0.86	1,108	$4,094 * 10^{-16} + 0,848i$	$4,094 * 10^{-16} - 0,848i$	$-9.749 * 10^{-16} + 0.437i$	$-9.749 * 10^{-16} - 0.437i$
5	0,689	0,5	1.867	$0,073 + 0,696i$	$0,073 - 0,696i$	$-0,073 + 0,696i$	$-0,073 - 0,696i$
5	0.815	0.194	1,900	$2,616 * 10^{-15} + 0,787i$	$2,616 * 10^{-15} - 0,787i$	$-2,248 * 10^{-15} + 0,510i$	$-2,248 * 10^{-15} - 0,510i$
12	0.203	0.068	2,484	$-6.668 * 10^{-15} + 0.754i$	$-6.668 * 10^{-15} + 0.754i$	$6.106 * 10^{-15} + 0.65i$	$6.106 * 10^{-15} - 0.65i$
20	0.662	0.455	2.977	$-5.252 * 10^{-16} + 0.926i$	$-5.252 * 10^{-16} - 0.926i$	$1.256 * 10^{-15} + 0.355i$	$1.256 * 10^{-15} - 0.355i$

Κεφάλαιο 3

Επεξεργασία δεδομένων

3.1 Ανάλυση

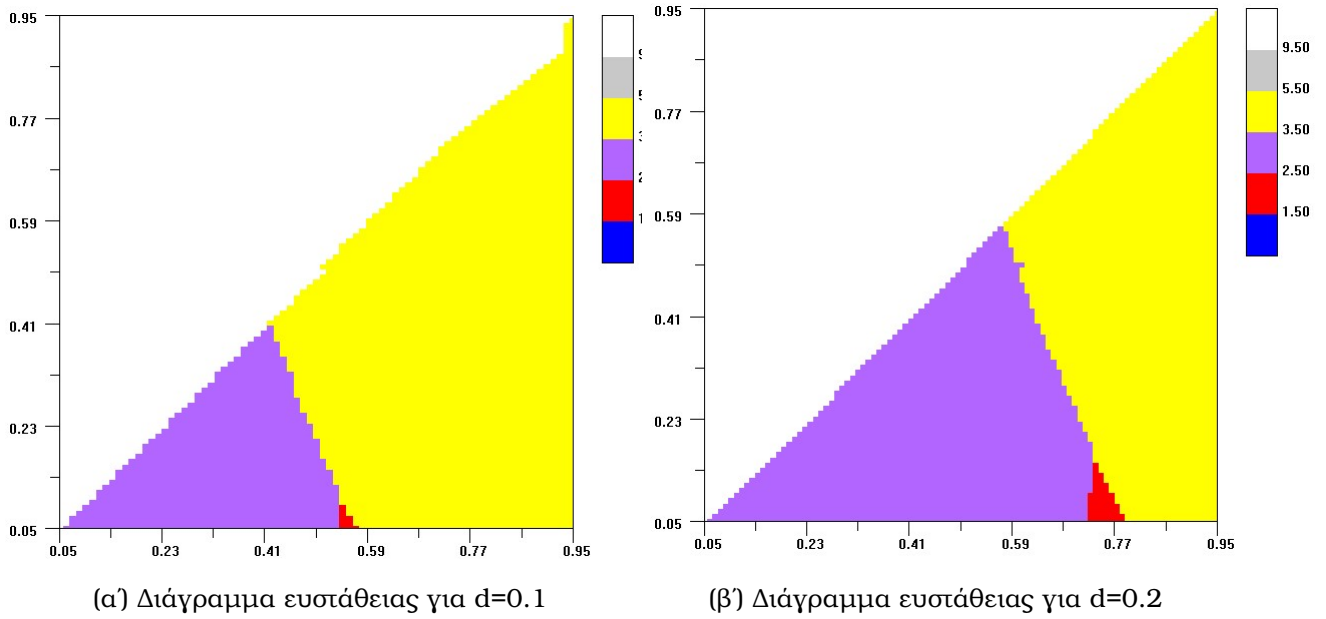
Από την κατανομή των ιδιοτιμών και τις διάφορες περιπτώσεις ευστάθειας, ταξινομούμε τα σημεία ισορροπίας με βάση τους δείκτες του πίνακα 3.1 .

Η απεικόνιση της κατανομής έγινε με τη βοήθεια μιας εφαρμογής "**levelmap**". Στο περιβάλλον του προγράμματος τα σημεία ισορροπίας αποτυπώνονται σε ένα δισδιάστατο διάγραμμα όπου ο άξονας x είναι τιμή της σταθεράς **b** και ο άξονας y είναι η τιμή της σταθεράς **c**. Κάθε είδος ευστάθειας αντιστοιχεί σε έναν δείκτη και ανάλογα με τον δείκτη ευστάθειας, το κάθε σημείο παίρνει ένα διαφορετικό χρώμα. Με αυτόν τον τρόπο παράγεται ένα διάγραμμα ευστάθειας όπως τα παρακάτω για τα σημεία ισορροπίας που αντιστοιχούν σε ένα καθορισμένο **d**. Σημαντικές πληροφορίες που λαμβάνουμε από τα διαγράμματα είναι οι τιμές b,c στα όρια μεταξύ ευστάθειας και αστάθειας των σημείων.

Πίνακας 3.1: Οι δείκτες και τα χρώματα που αντιστοιχούν στα είδη ευστάθειας

Δείκτης	Είδος ευστάθειας	Χρώμα levelmap
0	Ευσταθές Σημείο Ισορροπίας	Μπλε
5	Απλή Αστάθεια	Κίτρινο
3	Μιγαδική Αστάθεια	Μοβ
2	Διπλή αστάθεια	Κόκκινο
10	Σημεία που δεν ορίζονται	Άσπρο

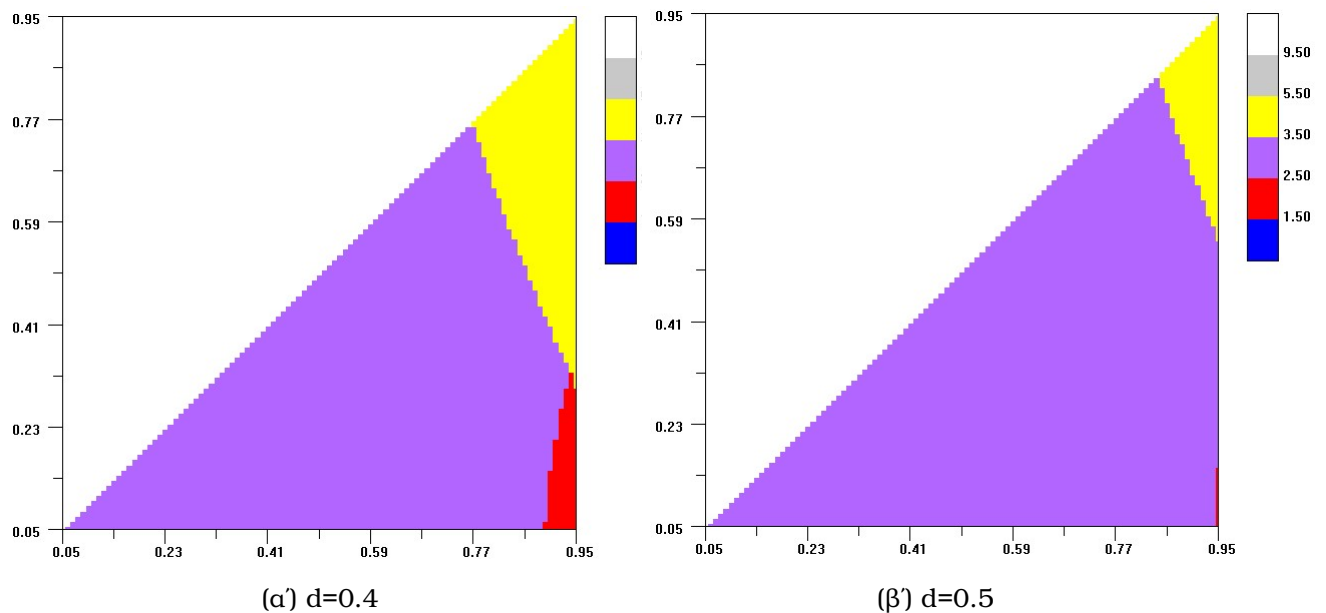
Για πολύ μικρές τιμές του d διακρίνονται τρία είδη σημείων ισορροπίας. Σημεία με μιγαδική αστάθεια για μικρότερα b,c, σημεία με διπλή αστάθεια και λίγα σημεία με απλή αστάθεια για τα οποία ισχύει b αρκετά μεγαλύτερο του c.



Σχήμα 3.1

Σε κάθε διάγραμμα ευστάθειας στον οριζόντιο άξονα είναι η παράμετρος b/a και στον κάθετο το c/a .

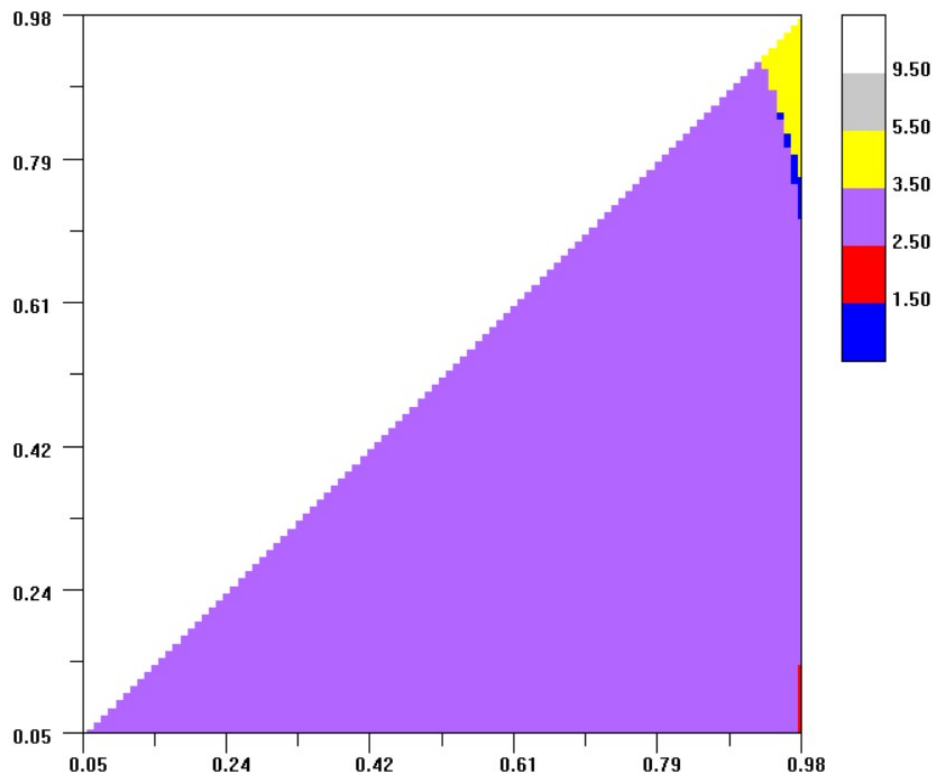
Καθώς η τιμή του d μεγαλώνει, τα σημεία με μιγαδική αστάθεια επικρατούν στα διαγράμματα σε σχέση με τα σημεία διπλής αστάθειας, ενώ για $d=0.5$ δεν υπάρχουν σημεία με απλή αστάθεια.



Σχήμα 3.2

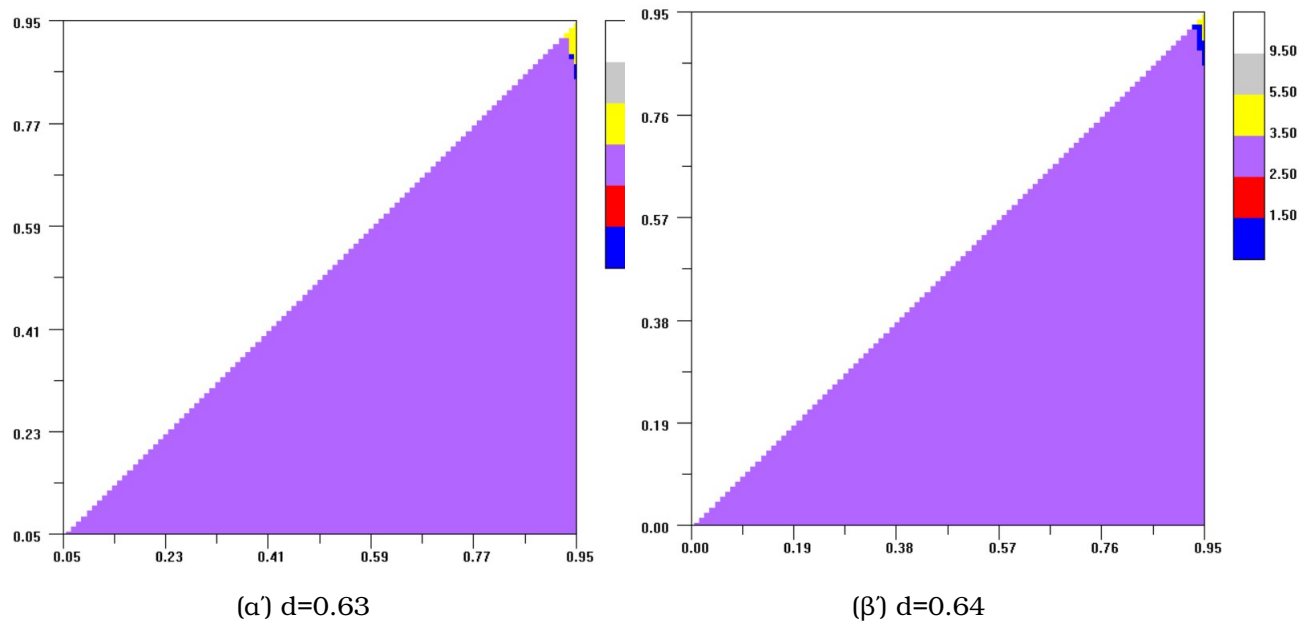
Στα παραπάνω διαγράμματα για μικρές τιμές του d δεν εμφανίζονται σημεία ευσταθούς ισορροπίας, παρά μόνο σημεία ασταθούς ισορροπίας. Με βάση τον ορισμό του $d = \frac{\mu}{a^3 \omega^2}$, το φαινόμενο αυτό είναι πιθανό να οφείλεται στο ότι περιστρεφόμενα ελλειψοειδή με μικρή μάζα ενδέχεται να μην αναπτύσσουν επαρκές βαρυτικό πεδίο για να κρατήσουν ένα υλικό σημείο σε σταθερή τροχιά γύρω τους. Σχετικά με τον όρο της γωνιακής ταχύτητας, εικάζεται ότι ελλειψοειδή με συντομες περιόδους περιστροφής (δηλαδή μεγάλη γωνιακή ταχύτητα ω) δεν έχουν ευσταθείς τροχιές.

Για τιμές του $d = 0.625$ εμφανίζονται τα πρώτα σημεία ευσταθούς ισορροπίας για $b \approx 0.95$ και $c \approx 0.8$.

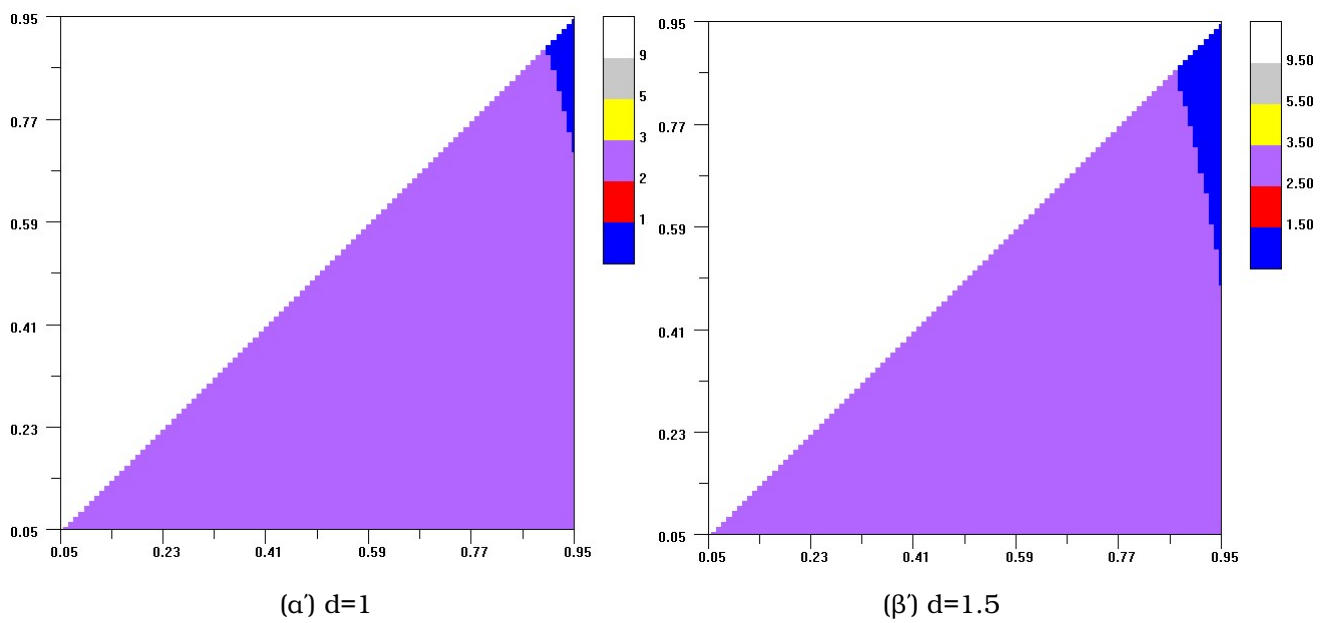


Σχήμα 3.3: $d=0.625$ και $b, c = 0.05 - 0.98$, εμφάνιση των πρώτων σημείων ευσταθούς ισορροπίας (μπλε)

Για $d=0.64$ δεν εμφανίζονται πλέον σημεία διπλής αστάθειας. Τα σημεία μιγαδικής αστάθειας παραμένουν η πλειοψηφία ενώ όσο αυξάνεται η τιμή του d αυξάνεται και ο αριθμός των σημείων ευσταθούς ισορροπίας.

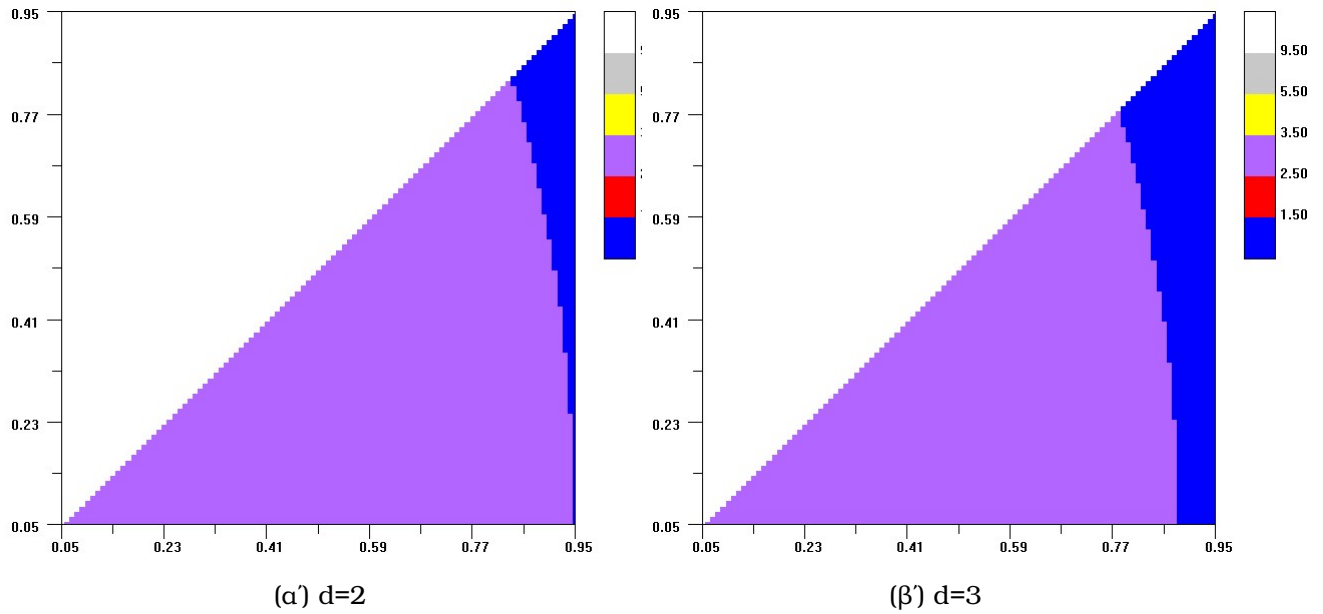


Σχήμα 3.4



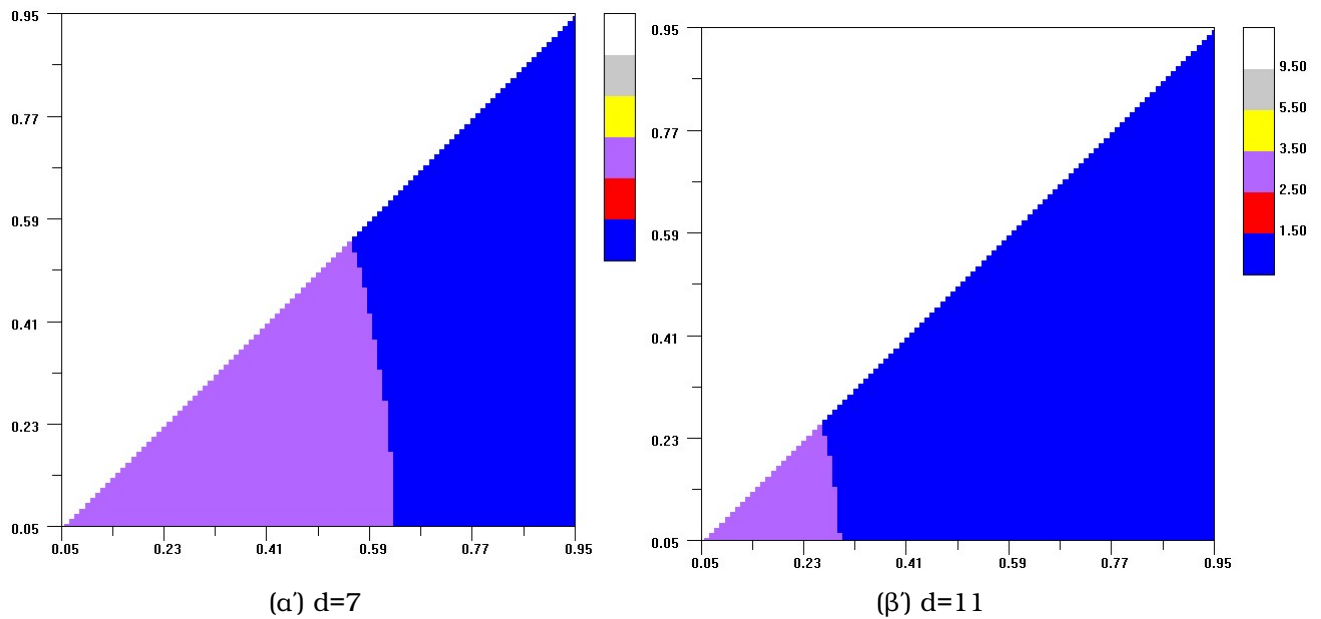
Σχήμα 3.5

Για $d=2$ και $d=3$ αρχίζουμε να βλέπουμε ευσταθή σημεία ισορροπίας και για b σημαντικά μεγαλύτερο του c .



Σχήμα 3.6

Για $d > 7$ τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας επικρατούν στο διάγραμμα σε σχέση με τα σημεία μιγαδικής αστάθειας.

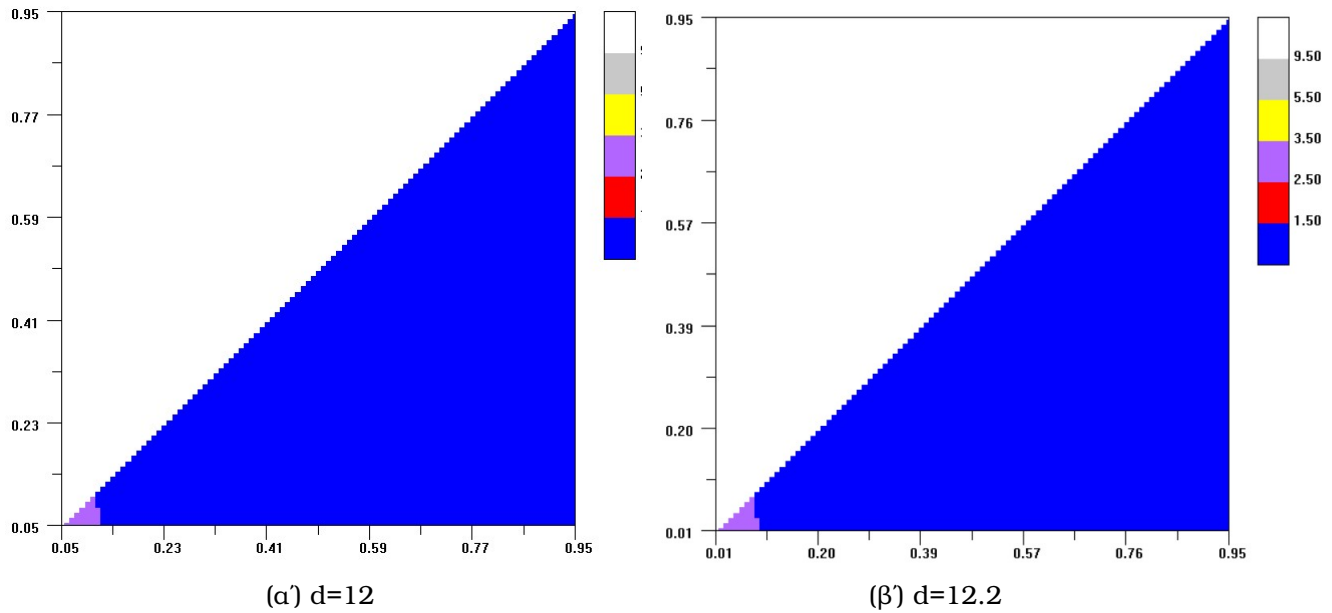


Σχήμα 3.7

Σε κάθε διάγραμμα ευστάθειας για μία συγκεκριμένη τιμή του d εμφανίζονται σημεία ευσταθούς ισορροπίας για μεγαλύτερες τιμές των b, c . Εφόσον το d παραμένει σταθερό δεν αλλάζει η μάζα του ελλειψοειδούς ούτε η ταχύτητα περιστροφής. Επιπλέον, σύμφωνα με τον πίνακα 2.1 η σχετική θέση των σημείων ισορροπίας δεν έχει σημαντικές μεταβολές για ίδιο d . Αυτό που διαφοροποιείται είναι οι διαστάσεις του ελλειψοειδούς και συνεπώς η κατανομή της μάζας στο ελλειψοειδές. Καθώς αυξάνονται τα b, c ,

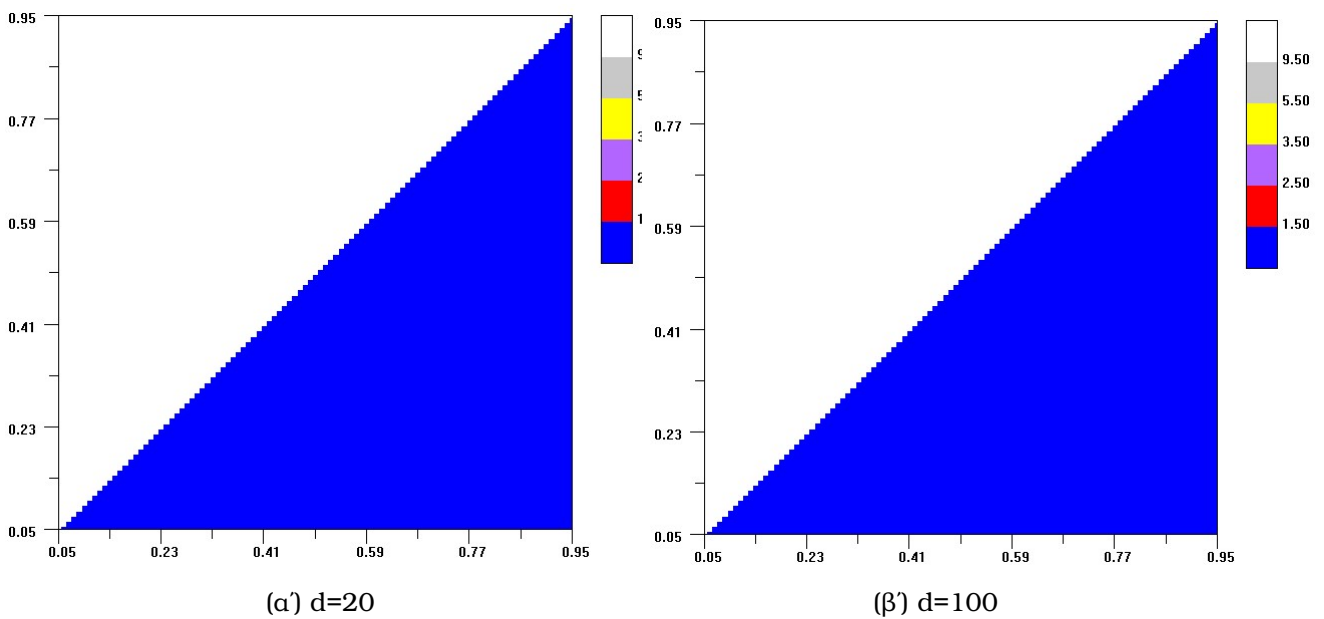
μεγαλώνουν οι διαστάσεις του ελλειψοειδούς, τα σημεία ισορροπίας πλησιάζουν στο ελλειψοειδές και εμφανίζονται περισσότερες ευσταθείς τροχιές.

Για τιμές $d \approx 12$ τα σημεία μιγαδικής αστάθειας περιορίζονται σε πολύ μικρές τιμές των b, c . Η μεγαλύτερη τιμή για την οποία συναντάμε σημεία μιγαδικής αστάθειας είναι για $d \approx 12.2$



Σχήμα 3.8

Από $d=12.3$ έως $d=100$ εμφανίζονται μόνο σημεία ευσταθούς ισορροπίας.



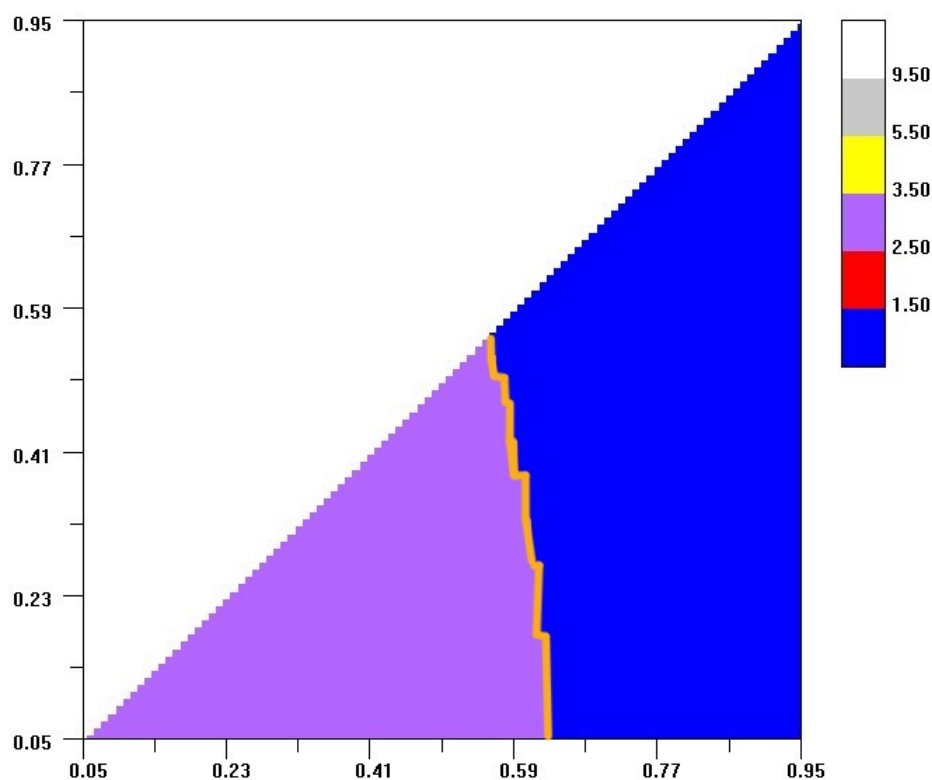
Σχήμα 3.9

Κεφάλαιο 4

Παραμετρικό κριτήριο ευστάθειας

4.1 Κρίσιμα Σημεία Ευστάθειας

Από τα διαγράμματα levelmap συλλέξαμε τα σημεία που βρίσκονται στη γραμμή μεταξύ της περιοχής σημείων μιγαδικής αστάθειας και των σημείων ευσταθούς ισορροπίας με στόχο να σχηματίσουμε μια διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ ευστάθειας - αστάθειας με παραμέτρους b,c,d.



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα ευστάθειας για $d=7$, με πορτοκαλί απεικονίζονται τα κρίσιμα σημεία ευστάθειας

Πίνακας 4.1: Κρίσιμα σημεία ευστάθειας

	d	b	c
1	0,63	0,812	0,895
2	0,63	0,819	0,893
3	0,63	0,838	0,884
4	0,65	0,843	0,942
5	0,65	0,875	0,942
6	0,65	0,892	0,932
7	0,65	0,908	0,925
8	0,7	0,768	0,898
9	0,7	0,784	0,893
10	0,7	0,810	0,884
11	0,7	0,821	0,884
12	0,7	0,835	0,884
13	0,7	0,849	0,877
14	0,7	0,858	0,877
15	1	0,664	0,895
16	1	0,675	0,893
17	1	0,703	0,886
18	1	0,729	0,884
19	1	0,740	0,877
20	1	0,772	0,867
21	1	0,800	0,867
22	1	0,830	0,856
23	1	0,831	0,851
24	2	0,009	0,895

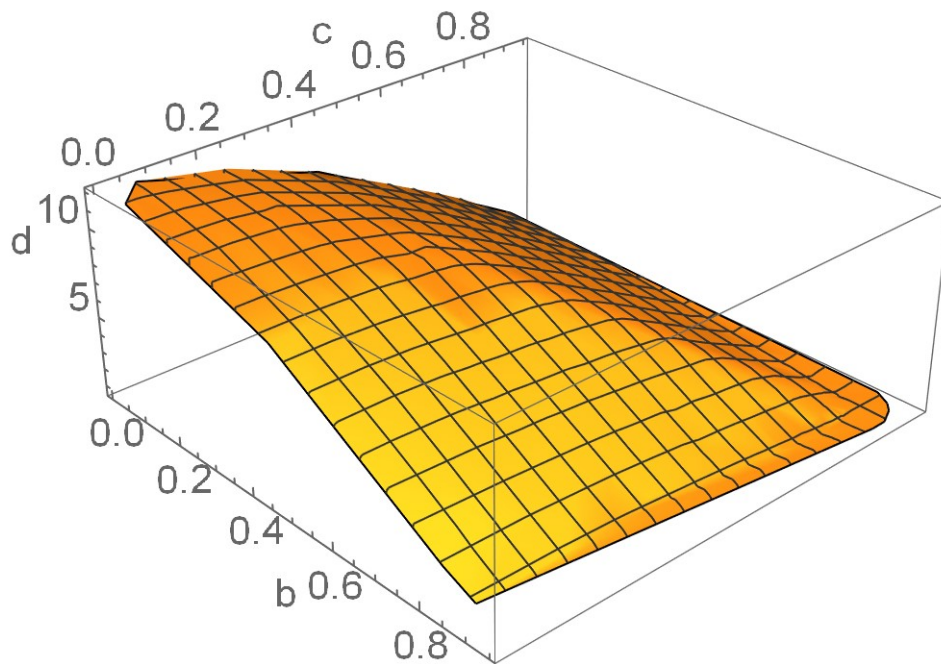
	d	b	c
25	2	0,190	0,893
26	2	0,297	0,886
27	2	0,378	0,877
28	2	0,438	0,868
29	2	0,499	0,856
30	2	0,543	0,842
31	2	0,587	0,835
32	2	0,633	0,826
33	2	0,671	0,816
34	2	0,717	0,805
35	2	0,765	0,795
36	3	0,004	0,831
37	3	0,181	0,830
38	3	0,279	0,821
39	3	0,350	0,814
40	3	0,454	0,796
41	3	0,515	0,786
42	3	0,554	0,768
43	3	0,596	0,765
44	3	0,636	0,751
45	3	0,680	0,742
46	3	0,710	0,733
47	4	0,005	0,777
48	4	0,181	0,766

Πίνακας 4.2: Κρίσιμα σημεία ευστάθειας

	d	b	c
49	4	0,271	0,758
50	4	0,332	0,751
51	4	0,396	0,742
52	4	0,441	0,731
53	4	0,487	0,722
54	4	0,531	0,714
55	4	0,568	0,705
56	4	0,661	0,679
57	5	0,009	0,715
58	5	0,179	0,705
59	5	0,264	0,693
60	5	0,322	0,687
61	5	0,380	0,677
62	5	0,431	0,670
63	5	0,469	0,657
64	5	0,513	0,650
65	5	0,548	0,642
66	5	0,606	0,624
67	7	0,012	0,580
68	7	0,125	0,580
69	7	0,214	0,571
70	7	0,272	0,559

	d	b	c
71	7	0,327	0,547
72	7	0,371	0,541
73	7	0,417	0,531
74	7	0,450	0,526
75	7	0,476	0,517
76	7	0,490	0,508
77	9	0,005	0,436
78	9	0,088	0,436
79	9	0,171	0,427
80	9	0,223	0,418
81	9	0,271	0,408
82	9	0,308	0,396
83	9	0,341	0,390
84	9	0,366	0,381
85	11	0,007	0,246
86	11	0,014	0,237
87	11	0,091	0,237
88	11	0,146	0,227
89	11	0,179	0,220
90	11	0,193	0,211
91	12	0,007	0,067
92	12	0,018	0,067
93	12	0,030	0,063
94	12	0,042	0,058

Με τη βοήθεια της Mathematica, τοποθετούμε τα παραπάνω σημεία σε ένα τρισδιάστατο διάγραμμα σχηματίζοντας μία επιφάνεια. Αν και η επιφάνεια ορίζεται για $b > c$, για λόγους συνέχειας στο διάστημα $(0, 1)$ χρησιμοποιούμε εκτός των τριάδων (b, c, d) και τις (c, b, d) .



Σχήμα 4.2: Διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ ευστάθειας και αστάθειας

4.2 Προσεγγιστικές επιφάνειες

Προκειμένου να προσεγγίσουμε την κρίσιμη επιφάνεια ευστάθειας 4.2, θεωρούμε τρεις πολυωνυμικές συναρτήσεις επιφανειών 2ου ($f1$), 3ου ($f2$) και 4ου ($f3$) βαθμού. Οι τιμές b, c, d των κρίσιμων σημείων αντιστοιχούν στις μεταβλητές x, y, z . Για την κάθε επιφάνεια ισχύει ότι:

$$f(b, c) = d \quad \text{ή} \quad f(x_i, y_i) = d_i \quad (4.1)$$

$$f1(x, y) = a + b \cdot x^1 + c \cdot y^1 + d \cdot x^2 + e \cdot y^2 + f \cdot x^1 \cdot y^1 \quad (4.2)$$

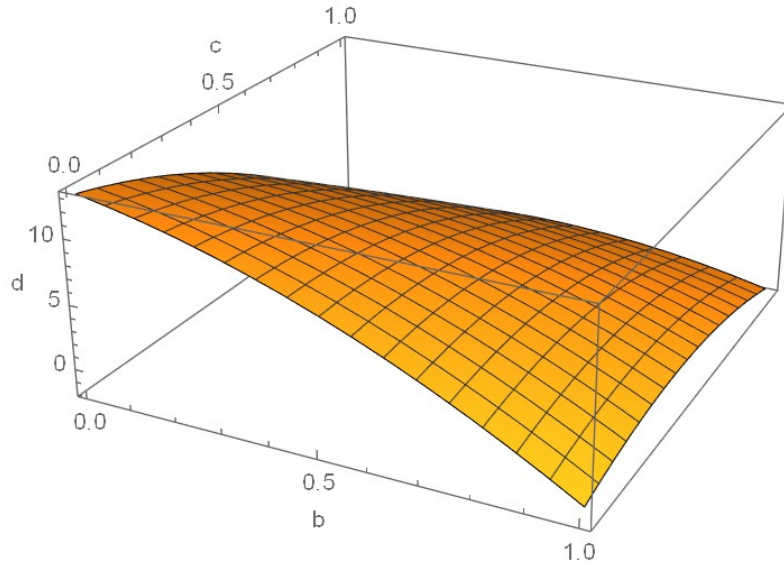
$$f2(x, y) = a + b \cdot x^1 + c \cdot y^1 + d \cdot x^2 + e \cdot y^2 + f \cdot x^1 \cdot y^1 + g \cdot x^3 + h \cdot y^3 + k \cdot x^2 \cdot y + m \cdot x \cdot y^2 \quad (4.3)$$

$$f3(x, y) = a + b \cdot x + c \cdot y + d \cdot x^2 + e \cdot x \cdot y + f \cdot y^2 + g \cdot x^3 + h \cdot x^2 \cdot y + k \cdot x \cdot y^2 + m \cdot y^3 + n \cdot x^4 + p \cdot x^3 \cdot y + q \cdot x^2 \cdot y^2 + r \cdot x \cdot y^3 + s \cdot y^4 \quad (4.4)$$

όπου a, b, \dots, s είναι οι παράμετροι που παίρνουν τις βέλτιστες δυνατές τιμές για την προσαρμογή της προσεγγιστικής επιφάνειας στην αρχική.

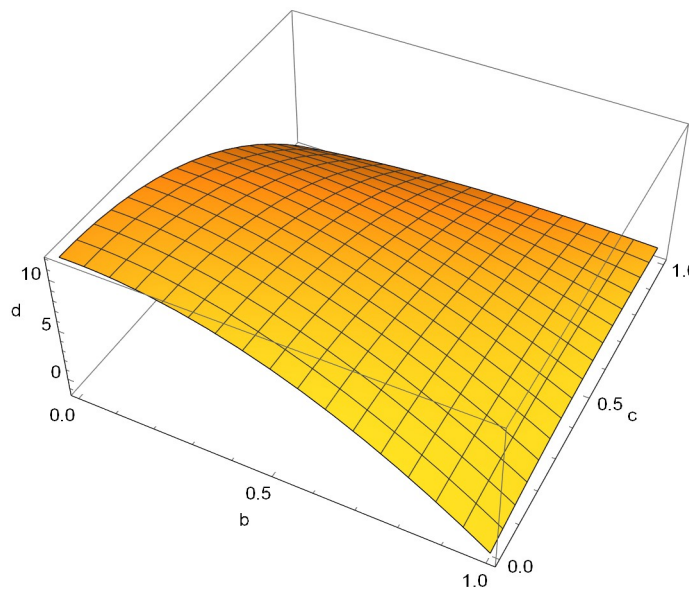
Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την εντολή **FindFit** της Mathematica πραγματοποιούμε γραμμική προσαρμογή των σταθερών παραμέτρων των προσεγγιστικών επιφανειών στα πραγματικά δεδομένα.

$$f1(x, y) = 13.1742 - 6.25911x - 7.94159x^2 - 6.25911y + 13.4029xy - 7.94159y^2 \quad (4.5)$$



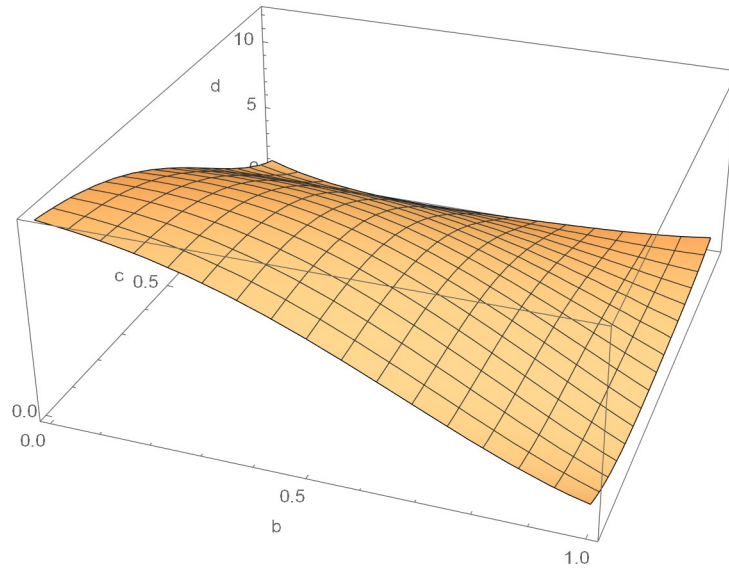
Σχήμα 4.3: Προσεγγιστική επιφάνεια 2ου βαθμού

$$f_2(x,y) = 11.8806 + 0.693466x - 14.9005x^2 + 0.852288x^3 + 0.693466y - 6.20852xy + 10.4193x^2y - 14.9005y^2 + 10.4193xy^2 + 0.852288y^3 \quad (4.6)$$



Σχήμα 4.4: Προσεγγιστική επιφάνεια 3ου βαθμού

$$f_3(x,y) = 12.3422 - 3.373x - 7.18814x^2 - 12.1644x^3 + 11.6376x^4 - 3.373y + 19.1279xy - 10.5244x^2y - 15.945x^3y - 7.18814y^2 - 10.5244xy^2 + 44.432x^2y^2 - 12.1644y^3 - 15.945xy^3 + 11.6376y^4 \quad (4.7)$$



Σχήμα 4.5: Προσεγγιστική επιφάνεια 4ου βαθμού

Συγκρίνοντας τα διαγράμματά τους, παρατηρούμε ότι και οι τρεις επιφάνειες μοιάζουν να προσεγγίζουν την αρχική, καθώς τηρούν κάποια βασικά χαρακτηριστικά, όπως το γεγονός ότι μικρές τιμές των b, c αντιστοιχούν σε μεγάλες τιμές του d . Για να αξιολογήσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια την αξιοπιστία τους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κριτήρια σύγκρισης.

4.2.1 Παραμετρικό Κριτήριο Ευστάθειας

Για κάθε προσεγγιστική επιφάνεια f_1, f_2, f_3 ορίστηκε δείκτης ευστάθειας (**stability index**) ο οποίος υπολογίζει την ευστάθεια του σημείου με παραμέτρους (b, c, d) .

$$stability_index = f_i(b, c) - d \quad (4.8)$$

Η λειτουργία του δείκτη βασίζεται στα διαγράμματα ευστάθειας. Αν τοποθετούσαμε όλα τα διαγράμματα ευστάθειας το ένα πάνω στο άλλο από μικρότερο σε μεγαλύτερο d , τα κρίσιμα σημεία ευστάθειας θα σχημάτιζαν την διαχωριστική επιφάνεια που προσεγγίσαμε. Καθώς η τιμή του d αυξάνεται, τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας είναι περισσότερα και αντιστοιχούν και σε μικρότερες τιμές του b, c . Εάν για μία τιμή του d_i εμφανίζεται σημείο ευστάθειας στο σημείο με (b_i, c_i) , τότε για κάθε τιμή $d > d_i$, για τις ίδιες τιμές (b_i, c_i) , το σημείο ισορροπίας είναι πάλι ευσταθές.

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την ευστάθεια σημείου με παραμέτρους (b_1, c_1, d_1) . Στον δείκτη ευστάθειας, η συνάρτηση f υπολογίζει ποια είναι η ελάχιστη (κρίσιμη) τιμή του d στην οποία για τα (b_1, c_1) εμφανίζεται σημείο ευσταθούς ισορροπίας. Εάν $d_1 > d_{critical}$, τότε το σημείο υπό εξέταση είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας και ο δείκτης ευστάθειας είναι αρνητικός. Στην αντίθετη περίπτωση, $d_1 < d_{critical}$ το σημείο υπό εξέταση είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας και ο δείκτης ευστάθειας είναι θετικός.

- $stability\ index = f(b, c) - d > 0$: **αστάθεια**
- $stability\ index = f(b, c) - d < 0$: **ευστάθεια**

Για τον έλεγχο της αξιοπιστίας των παραμετρικών επιφανειών, ελέγξαμε την ευστάθεια ορισμένων σημείων ισορροπίας όπως προκύπτει αν εφαρμόσουμε το παραμετρικό κριτήριο ευστάθειας για τις f_1, f_2, f_3 . Τα αποτελέσματα που προέκυψαν ήταν παρόμοια και για τις τρεις επιφάνειες

Πίνακας 4.3: Έλεγχος παραμετρικού κριτηρίου ευστάθειας

b	c	d	f1 index	f2 index	f3 index	εκτίμηση ευστάθειας	πραγματική ευστάθεια
0,284	0,059	0,1	10,484	10,740	10,525	ασταθές	ασταθές
0,4819	0,302	0,1	7,550	7,909	8,075	ασταθές	ασταθές
0,554	0,536	0,1	5,513	5,487	5,787	ασταθές	ασταθές
0,563	0,95	0,1	1,088	0,653	0,446	ασταθές	ασταθές
0,095	0,05	0,6	11,639	11,188	11,243	ασταθές	ασταθές
0,365	0,347	1	7,401	7,825	8,067	ασταθές	ασταθές
0,527	0,203	1	6,506	6,916	6,811	ασταθές	ασταθές
0,941	0,833	1	-0,966	-0,598	-0,514	ευσταθές	ευσταθές
0,941	0,923	1	- 1,650	-0,859	-0,532	ευσταθές	ευσταθές
0,473	0,131	4	4,311	4,807	4,569	ασταθές	ασταθές
0,824	0,149	4	-0,839	-0,930	-1,067	ευσταθές	ευσταθές
0,824	0,815	4	-2,751	-2,760	-2,816	ευσταθές	ευσταθές
0,932	0,05	4	-3,266	-3,541	-2,441	ευσταθές	ευσταθές
0,176	0,05	4	7,612	7,509	7,429	ασταθές	ασταθές
0,068	0,05	10	2,425	1,840	1,949	ασταθές	ασταθές
0,131	0,122	10	1,550	1,525	1,481	ασταθές	ασταθές
0,419	0,068	10	-0,923	-0,436	-0,782	ευσταθές	ευσταθές
0,752	0,077	10	-5,777	-5,556	-5,794	ευσταθές	ευσταθές
0,833	0,824	10	-8,900	-8,868	-8,916	ευσταθές	ευσταθές
0,95	0,905	10	-10,585	-9,483	-10,269	ευσταθές	ευσταθές
0,104	0,086	12	-0,040	-0,295	-0,295	ευσταθές	ασταθές
0,104	0,095	12	-0,097	-0,316	-0,324	ευσταθές	ασταθές
0,113	0,077	12	-0,047	-0,301	-0,304	ευσταθές	ασταθές
0,113	0,086	12	-0,101	-0,320	-0,330	ευσταθές	ευσταθές
0,221	0,122	12	-1,117	-0,891	-0,973	ευσταθές	ευσταθές
0,95	0,941	12	-12,880	-11,946	-11,520	ευσταθές	ευσταθές

Με τον δείκτη ευστάθειας που αξιοποιεί τις παραμετρικές προσεγγιστικές επιφάνειες καταφέραμε να εκτιμήσουμε σωστά την ευστάθεια 23 σημείων ισορροπίας από τα 26 (ποσοστό επιτυχίας 88,46%). Τα αποτελέσματα αυτά μας δείχνουν αρχικά ότι όλες οι επιφάνειες προσεγγίζουν σχετικά ικανοποιητικά την κρίσιμη επιφάνεια. Επιπλέον, υπάρχουν σωστές προβλέψεις για την ευστάθεια σημείων ισορροπίας με διαφορετικές τιμές d, b και c.

Οι μόνες περιπτώσεις στις οποίες το κριτήριο έδωσε μια λανθασμένη πρόβλεψη είναι τα σημεία ισορροπίας που φαίνονται με διαφορετικό χρώμα στον πίνακα 4.3 και αντιστοιχούν όλα σε d=12. Κάθε ένα από τα αυτά επιλέχθηκε στοχευμένα για τις δοκιμές επειδή είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας αλλά βρίσκεται οριακά κοντά σε σημεία ευσταθούς ισορροπίας. Οι μικρές τιμές του δείκτη σε αυτές τις περιπτώσεις αποδεικνύουν ότι οι τιμές d_i των σημείων βρίσκονται πολύ κοντά με την κρίσιμη τιμή d που υπολογίζει η κάθε επιφάνεια.

Τα σφάλματα ενδέχεται να οφείλονται στην επιλογή των σημείων για τον σχηματισμό της κρίσιμης επιφάνειας ευστάθειας η οποία δεν έγινε με ακριβή μέθοδο. Ε-

πομένως, είναι πιθανό ορισμένα σημεία αστάθειας να συμπεριλήφθηκαν στην περιοχή ευστάθειας.

Συνολικά, το παραμετρικό κριτήριο ευστάθειας δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα για τα περισσότερα σημεία ισορροπίας. Ωστόσο, σφάλματα εμφανίζονται σε σημεία ισορροπίας που βρίσκονται οριακά μεταξύ ευστάθειας και αστάθειας.

4.2.2 Mean Squared Error

Η αξιολόγηση των προσεγγιστικών μοντέλων γίνεται με τον υπολογισμό του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (**Mean Squared Error**). Η ποιότητα των επιφανειών αξιολογείται με το μέσο τετραγωνικό σφάλμα με βάση την ακρίβειά τους, δηλαδή την απόκλιση από τα πραγματικά σημεία. Η πολυπλοκότητα της επιφάνειας δεν λαμβάνεται υπόψη.

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (function(b_i, c_i) - d_i)^2 \quad (4.9)$$

Ουσιαστικά βρήκαμε την τιμή της συνάρτησης κάθε επιφάνειας για όλες τις τιμές b, c η οποία αντιστοιχεί στην προσεγγιστική τιμή του d και αφαιρέσαμε την πραγματική τιμή του d από τα δεδομένα.

Τα αποτελέσματα για τις επιφάνειες 2ου, 3ου και 4ου βαθμού αντίστοιχα είναι:

$$MSE_1 = 0,33763826$$

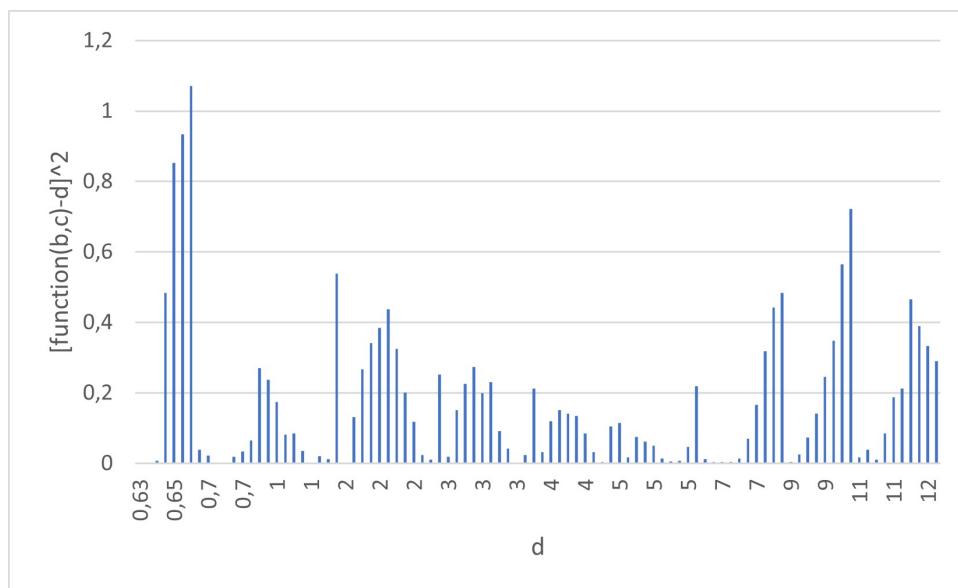
$$MSE_2 = 0,21234050$$

$$MSE_3 = 0,12839991$$

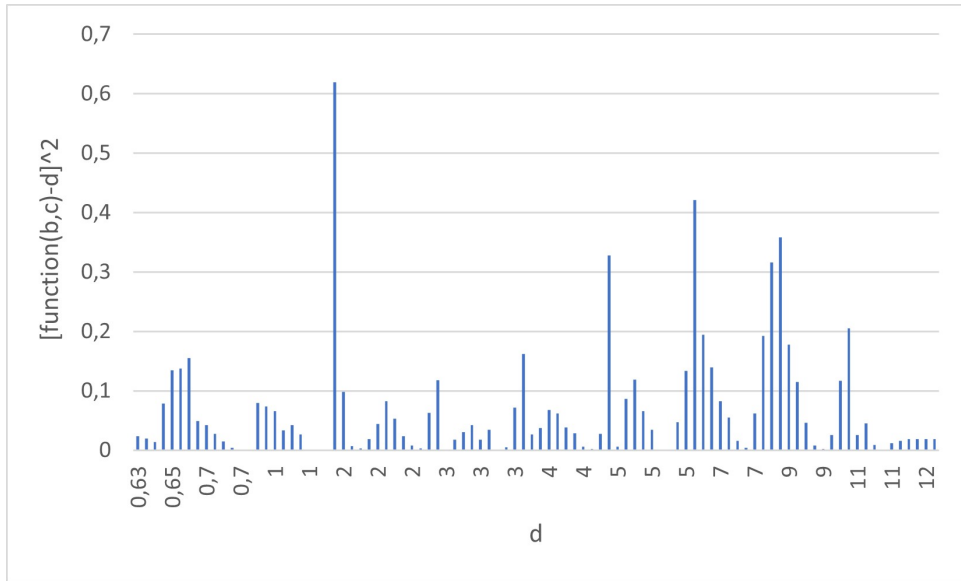
Η προσεγγιστική επιφάνεια 4ου βαθμού έχει το μικρότερο σφάλμα από τα δεδομένα καθώς είναι και η πιο πολύπλοκη.

Αναλύοντας το τετράγωνο της διαφοράς της πρόβλεψης από την πραγματική τιμή μπορούμε να παρατηρήσουμε σε κάθε μοντέλο για ποιες τιμές του d υπάρχουν οι σημαντικότερες αποκλίσεις καθώς και ομοιότητες μεταξύ τους.

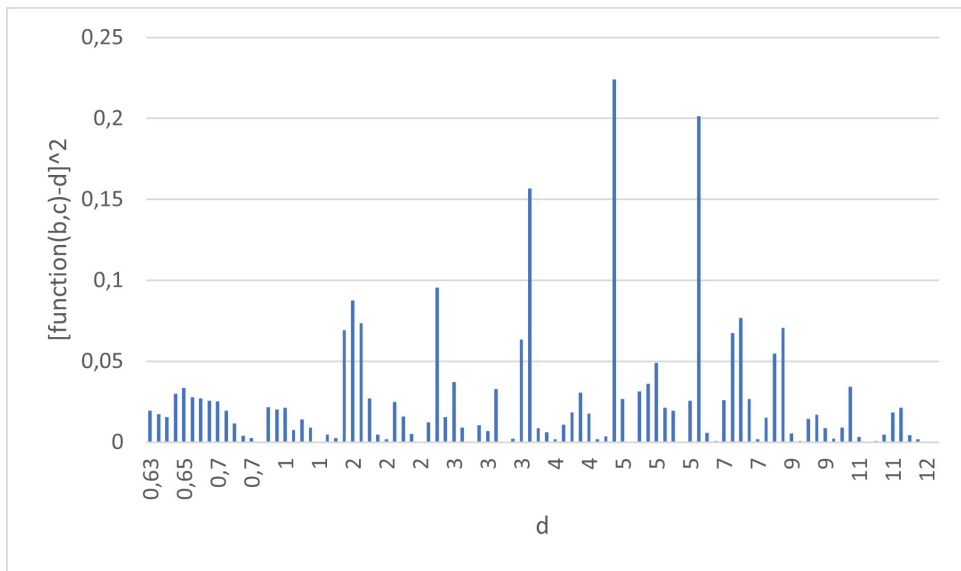
Η επιφάνεια 2ου βαθμού παρουσιάζει μεγάλα σφάλματα για $d \approx 0.65$ και τις τιμές $d = 9 - 12$



Σχήμα 4.6: Αποκλίσεις της προσεγγιστικής επιφάνειας 2ου βαθμού



Σχήμα 4.7: Αποκλίσεις της προσεγγιστικής επιφάνειας 3ου βαθμού



Σχήμα 4.8: Αποκλίσεις της προσεγγιστικής επιφάνειας 4ου βαθμού

Κατά μέσο όρο η επιφάνεια 4ου βαθμού είναι η πιο αξιόπιστη για το σύνολο των τιμών του d . Ωστόσο, εμφανίζει σημαντικό σφάλμα στις τιμές για $d=5$. Παρόμοιο σφάλμα εμφανίζεται και στην επιφάνεια 3ου βαθμού, όχι όμως στην επιφάνεια 2ου βαθμού. Επομένως, παρόλο που συνολικά είναι η λιγότερο αξιόπιστη, η επιφάνεια 2ου βαθμού δίνει τις πιο ακριβείς προβλέψεις στην περιοχή $d=5$.

4.2.3 Κριτήρια AIC - BIC

Τα **AIC** (Akaike Information Criterion) και **BIC** (Bayesian Information Criterion) αποτελούν στατιστικά κριτήρια που χρησιμοποιούνται για την επιλογή μοντέλων στη στατιστική ανάλυση. Είναι εργαλεία που καθορίζουν ποιο μοντέλο προσεγγίζει καλύτερα ένα σύνολο δεδομένων. Χαρακτηριστικό και των δύο κριτηρίων είναι η εξισορρόπηση της πολυπλοκότητας του μοντέλου με την καλή προσαρμογή στα δεδομένα.

Σχετικά με το **AIC**:

1. Ορίζεται ως

$$AIC = -2 * \log_likelihood + 2 * number_of_parameters \quad (4.10)$$

όπου

$$\log_likelihood = -0.5 * \frac{(z - func)^2}{variance} - 0.5 * \log(2 * \pi * variance) \quad (4.11)$$

$$variance(\sigma^2) = \frac{1}{N} * \sum (z_i - \mu)^2 \quad (4.12)$$

$$\mu = \frac{1}{N} * \sum (z_i) \quad (4.13)$$

func: η τιμή της συνάρτησης για ορισμένα x,y

number of parameters: είναι ο αριθμός των παραμέτρων

z_i : η πραγματική τιμή των δεδομένων

N: ο αριθμός των δεδομένων

2. Ο όρος $2 * number_of_parameters$ επιβαρύνει τα υπερβολικά περίπλοκα μοντέλα
3. Ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της τιμής του AIC. Χαμηλότερη τιμή AIC σημαίνει μοντέλα με καλύτερη προσαρμογή

Σχετικά με το **BIC**:

1. Ορίζεται ως

$$BIC = -2 * \log_likelihood + \log(N) * number_of_parameters \quad (4.14)$$

2. Ο όρος που "τιμωρεί" την πολυπλοκότητα είναι πιο σημαντικός από τον αντίστοιχο στο κριτήριο AIC
3. Ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της τιμής του BIC. Χαμηλότερη τιμή BIC σημαίνει μοντέλα με καλύτερη προσαρμογή
4. Εφόσον υπάρχουν στενότερα περιθώρια για πολυπλοκότητα, το κριτήριο τείνει να επιβραβεύει απλούστερα μοντέλα, ειδικά στην περίπτωση που το ο αριθμός των δειγμάτων είναι μικρός

Εφαρμόζοντας τα κριτήρια AIC, BIC στις προσεγγιστικές επιφάνειες προκύπτει :

Πίνακας 4.4: AIC - BIC criteria of goodness

	AIC	BIC
Επιφάνεια 2ου βαθμού	215.271	237.926
Επιφάνεια 3ου βαθμού	50.5001	86.101
Επιφάνεια 4ου βαθμού	-128.019	-76.2364

Η επιφάνεια τετάρτου βαθμού προκύπτει ως η καλύτερη προσέγγιση στα πραγματικά δεδομένα σύμφωνα και με τα δύο κριτήρια, παρόλο που είναι η πιο περίπλοκη.

Για να ερευνήσουμε αν υπάρχει κάποια καταλληλότερη επιφάνεια πολυωνυμικής προσαρμογής στις πραγματικές τιμές σύμφωνα με τα κριτήρια AIC - BIC, αφαιρέσαμε ορισμένες παραμέτρους από τις επιφάνειες 2ου, 3ου και 4ου βαθμού ώστε να μειωθεί η πολυπλοκότητα.

$$f1_a = 13.7048 + -12.9823x + -3.72933y + 11.4892xy + -9.57099y^2 \quad (4.15)$$

$$f1_b = 12.2675 + -13.4892x^2 + -7.91592y + 12.4916xy + -5.85416y^2 \quad (4.16)$$

$$f2 = 12.2152 + -5.03587x + -9.102x^3 + 1.35917y + -7.55536xy + 9.56131x^2y + -15.0667y^2 + 12.8293xy^2 \quad (4.17)$$

Πίνακας 4.5: AIC - BIC κριτήρια καταλληλότητας για επιφάνειες με λιγότερες παραμέτρους

	AIC	BIC
$f1_a$	380.564	399.983
$f1_b$	337.18	356.598
$f2$	108.94	138.068

Σε όλες τις περιπτώσεις, παρόλο που η πολυπλοκότητα έχει μειωθεί, οι τιμές AIC και BIC είναι μεγαλύτερες, συνεπώς οι συγκεκριμένες πολυωνυμικές επιφάνειες έχουν χειρότερη προσαρμογή στα δεδομένα.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογές σε αστεροειδείς

Το μοντέλο του περιστρεφόμενου τριαξονικού ελλειψοειδούς μπορεί να εφαρμοστεί στην εύρεση σημείων ισορροπίας γύρω από αστεροειδείς. Καθώς ο αστεροειδής περιστρέφεται, το σημείο ισορροπίας που υπολογίζουμε είναι στο περιστρεφόμενο σύστημα του ελλειψοειδούς, άρα για έναν αδρανειακό παρατηρητή αποτελεί τροχιά ισορροπίας. Σε μία διαστημική αποστολή σε ένα αστεροειδή, το σκάφος θα πρέπει να βρεθεί ιδανικά σε τροχιά ευσταθούς ισορροπίας γύρω από αυτόν για να τον προσεγγίσει και να συλλέξει στοιχεία όπως φωτογραφίες, δεδομένα για τη δομή του και άλλες παραμέτρους.

Χρησιμοποιώντας τα πραγματικά στοιχεία για τα χαρακτηριστικά αστεροειδών στο μοντέλο του περιστρεφόμενου τριαξονικού ελλειψοειδούς ([3] *Scheeres 1994*), μπορούμε να υπολογίσουμε τη θέση των σημείων ισορροπίας τους. Η ευστάθειά τους προκύπτει από το παραμετρικό κριτήριο ευστάθειας.

Πίνακας 5.1: Θέση και Ευστάθεια σημείων ισορροπίας πραγματικών αστεροειδών

Αστεροειδής	b	c	d	Σημείο Ισορροπίας y_0	Ευστάθεια
Vesta	0,9731	0,7796	6,9014	2,1088	ευσταθές
Ida	0,4247	0,3110	0,7379	0.9354	ασταθές
Eros	0,3256	0,3256	0,7997	0.9485	ασταθές

Τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν την ταξινόμηση που έγινε ([3]) για τους αστεροειδείς σε Τύπου 1 (Vesta) που παρουσιάζουν ευσταθείς τροχιές και Τύπου 2 με ασταθείς τροχιές.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

Στόχος της εργασίας αυτής ήταν η διερεύνηση της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας γύρω από περιστρεφόμενο τριαξονικό ελλειψοειδές. Εξετάσθηκε η εξάρτησή της ευστάθειας των σημείων από τις τιμές των ημιαξόνων, την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω και τη μάζα του ελλειψοειδούς. Για τη διερεύνηση χρησιμοποιήθηκαν τιμές για τους ημιάξονες $b, c = 0.05 - 0.95$, ενώ η παράμετρος $d = 0.1 - 100$ περιλαμβάνει τη μάζα και τη γωνιακή ταχύτητα του ελλειψοειδούς.

Συνολικά, σε μικρότερες τιμές του d παρατηρούνται ασταθή σημεία ισορροπίας γύρω από το τριαξονικό ελλειψοειδές, το οποίο είναι πιθανό να οφείλεται στο ότι ελλειψοειδή με μικρή μάζα ή μεγάλη ταχύτητα περιστροφής δεν έχουν αρκετά μεγάλο βαρυτικό πεδίο για να κρατήσουν ένα υλικό σώμα σε σταθερή τροχιά γύρω τους. Ένα σημείο ισορροπίας χαρακτηρίζεται ως ασταθές όταν αν τοποθετηθεί κοντά του ένα υλικό σημείο χωρίς αρχική ταχύτητα, αυτό θα ξεκινήσει να απομακρύνεται με την κίνησή του από το σημείο ισορροπίας. Αν στη θέση του τριαξονικού ελλειψοειδούς έχουμε έναν περιστρεφόμενο αστεροειδή και για υλικό σημείο θεωρούμε ένα διαστημικό σκάφος που βρίσκεται σε τροχιά γύρω του, στην περίπτωση που η τροχιά ήταν ασταθής το σκάφος είτε θα πλησιάζε όλο και περισσότερο στον αστεροειδή μέχρι να προσκρούσει σε αυτόν, είτε θα απομακρυνόταν τελείως από αυτόν. Για $d = 0.1 - 0.63$ εμφανίζονται τα διάφορα είδη αστάθειας που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές. Η πιο συνηθισμένη, η μιγαδική αστάθεια, αντιστοιχεί σε τέσσερις συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές.

Επιπλέον, καθώς μεγαλώνουν οι τιμές του d , τα σημεία ισορροπίας απομακρύνονται από το ελλειψοειδές προκειμένου η συνισταμένη της βαρυτικής έλξης και της φυγόκεντρου δύναμης να παραμείνει μηδέν. Για μεγαλύτερες τιμές του $d = 12, 3 - 100$ εμφανίζονται αποκλειστικά σημεία ευσταθούς ισορροπίας. Αυτό είναι πιθανό να συμβαίνει καθώς η σημαντική μάζα του ελλειψοειδούς προκαλεί επαρκή βαρυτική έλξη σε υλικό σημείο που βρίσκεται σε σταθερή τροχιά γύρω του, χωρίς αναγκαία να έχει ταυτόχρονα μεγάλες διαστάσεις. Η τροχιά ευσταθούς ισορροπίας είναι ιδανική για ένα σκάφος που έχει ως αποστολή να προσεγγίσει και να παρατηρήσει έναν αστεροειδή.

Στη συνέχεια, υπολογίσαμε παραμετρικές επιφάνειες που προσεγγίζουν τα σημεία ισορροπίας που βρίσκονται στα όρια μεταξύ ευστάθειας και αστάθειας. Με τις επιφάνειες αυτές σχηματίσαμε το παραμετρικό κριτήριο ευστάθειας, το οποίο βρίσκει την ευστάθεια ή την αστάθεια ενός σημείου ισορροπίας χρησιμοποιώντας μόνο τις παραμέτρους (b, c, d) του σημείου. Το κριτήριο έδωσε ακριβή αποτελέσματα για το 88,46 % των δειγμάτων,

ωστόσο παρουσίασε ανακριβές αποτέλεσμα για σημεία που βρίσκονταν πολύ κοντά στα όρια μεταξύ ευστάθειας και αστάθειας.

Παράρτημα Α'

Κώδικας σε mathematica

Εύρεση της θέσης και της ευστάθειας σημείων ισορροπίας σε δυναμικό περιστρεφόμενου τριαξονικού ελλειψοειδούς

```
a = 1;
kk2 = (a^2 - b^2) / (a^2 - c^2);
dd[s_] = \[Sqrt]((a^2 + s) (b^2 + s) (c^2 + s));
eq = x^2/(a^2 + L) + y^2/(b^2 + L) == 1;
sol = Solve[eq, L];
L2 = L /. sol[[2]];
k[x_, y_] = L2;
w[x_, y_] = ArcSin[Sqrt[(a^2 - c^2)/(a^2 + k[x, y])]];

Fs[x_, y_] = EllipticF[w[x, y], kk2];
Fsc[x_, y_] = EllipticK[w[x, y]];
Es[x_, y_] = EllipticE[w[x, y], kk2];
Esc[x_, y_] = EllipticE[w[x, y]];
Va[x_, y_] := -2*(1/(\[Sqrt](a^2 -
    c^2)))*((1 - (x^2 - y^2)/(a^2 - b^2))*
    Fs[x, y] + (x^2/(a^2 - b^2) - ((a^2 - c^2)*
    y^2)/((a^2 - b^2)*(b^2 - c^2)))*
    Es[x, y] + ((c^2 + k[x, y])/(b^2 - c^2))*
    y^2*(\[Sqrt](a^2 - c^2))/dd[k[x, y]]);
Vr = d*Va[x, y] - (1/2) (x^2 + y^2);
AA = -D[Vr, {x, 2}] /. x -> 0;
BB = -D[Vr, {y, 2}] /. x -> 0;
matrixA[b_, c_, d_,
    y_] = {{0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {AA, 0, 0, 2}, {0, BB, -2, 0}};
VrOy = Vr /. x -> 0; (* Potential at x=0 *)
dV[b_, c_, d_, y_] = D[VrOy, y];
```

Test

```
d0 = 0.4;
```

```

dv = dV[0.1, 0.05, d0, y];
sol = FindRoot[dv == 0, {y, 1.1}];
y0 = y /. sol[[1]] // Chop
MA = matrixA[0.1, 0.05, d0, y0];
LE = Eigenvalues[MA]
indexRe = 0; indexIm = 0;
For[i = 1, i <= 4, i++, Print[i, " ", Re[LE[[i]]]];
  If[Re[LE[[i]]] > 10^(-10), indexRe++]]
For[i = 1, i <= 4, i++, Print[i, " ", Im[LE[[i]]]];
  If[Abs[Im[LE[[i]]]] > 10^(-10), indexIm++]]
Print[indexRe, " -- ", indexIm]
If[indexRe != 0 && indexIm > 2, indexRe++]
indexRe

d0 = 20;
N1 = 101;
N2 = 101;
bmin = 0.05; bmax = 0.95; bstep = (bmax - bmin)/(N1 - 1);
y00 = 0.7208377336012824;
cmin = 0.05; cmax = 0.95; cstep = (cmax - cmin)/(N2 - 1);
LDATA = {};
EIGN = {};
For[ii = 0, ii < N1, ii++,
  b0 = bmin + ii*bstep;
  For[jj = 0, jj < N2, jj++,
    c0 = cmin + jj*cstep;
    If[c0 < b0,
      dv = dV[b0, c0, d0, y];
      sol = FindRoot[dv == 0, {y, y00}];
      y0 = y /. sol[[1]] // Chop;
      y00 = y0;
      If[y0 > b0,
        MA = matrixA[b0, c0, d0, y0];
        LE = Eigenvalues[MA];
        index = 0; indexRe = 0; indexIm = 0;
        For[i = 1, i <= 4, i++, If[Re[LE[[i]]] > 10^(-10), indexRe++]];
        For[i = 1, i <= 4, i++,
          If[Abs[Im[LE[[i]]]] > 10^(-10), indexIm++]];
        index = indexRe;
        If[indexRe != 0 && indexIm > 2, index++];
        AppendTo[LDATA, {b0, c0, y0, index}];
        AppendTo[
          EIGN, {b0, c0, y0, LE[[1]], LE[[2]], LE[[3]], LE[[4]], index,
            indexIm}],
        AppendTo[

```

```

        LDATA, {b0, c0, y0, 5, LE[[1]], LE[[2]], LE[[3]], LE[[4]]},
        AppendTo[LDATA, {b0, c0, 0.0, 10}]
    ]]]
Print["Requested loops =", N1, "x", N2, "=", N1*N2]
Print["Data =", Length[LDATA]]

```

```
AppendTo[LDATA, ""];
```

Fitting κρίσιμων σημείων, παραμετρικές επιφάνειες, δείκτης ευστάθειας, κριτήρια AIC - BIC

```

data = {{0.895, 0.812, 0.63}, {0.893, 0.819, 0.63}, {0.884, 0.838,
0.63}, {0.942, 0.843, 0.65}, {0.941586, 0.8748, 0.65}, {0.932318,
0.891541, 0.65}, {0.924904, 0.908223, 0.65}, {0.898242, 0.768164,
0.7}, {0.892969, 0.783984, 0.7}, {0.88418, 0.810352,
0.7}, {0.88418, 0.820898, 0.7}, {0.88418, 0.834961,
0.7}, {0.877148, 0.849023, 0.7}, {0.877148, 0.857812,
0.7}, {0.894727, 0.664453, 1.}, {0.892969, 0.675, 1.}, {0.885937,
0.703125, 1.}, {0.88418, 0.72942, 1.}, {0.877148, 0.740039,
1.}, {0.866602, 0.77195, 1.}, {0.866602, 0.799805, 1.}, {0.856055,
0.829687, 1.}, {0.850781, 0.831445, 1.}, {0.894727, 0.008789,
2.}, {0.892969, 0.189844, 2.}, {0.885937, 0.29707, 2.}, {0.877148,
0.37793, 2.}, {0.868359, 0.437695, 2.}, {0.856055, 0.499219,
2.}, {0.841992, 0.543164, 2.}, {0.834961, 0.587109,
2.}, {0.826172, 0.632813, 2.}, {0.815625, 0.671484,
2.}, {0.805078, 0.717187, 2.}, {0.794531, 0.764648,
2.}, {0.831445, 0.003516, 3.}, {0.829687, 0.181055,
3.}, {0.820898, 0.279492, 3.}, {0.813867, 0.349805,
3.}, {0.796289, 0.453516, 3.}, {0.785742, 0.515039,
3.}, {0.768164, 0.553711, 3.}, {0.764648, 0.595898,
3.}, {0.750586, 0.636328, 3.}, {0.741797, 0.680273,
3.}, {0.733008, 0.710156, 3.}, {0.71543, 0.008789, 5.}, {0.704883,
0.179297, 5.}, {0.692578, 0.263672, 5.}, {0.687305, 0.32168,
5.}, {0.676758, 0.379687, 5.}, {0.669727, 0.430664,
5.}, {0.657422, 0.469336, 5.}, {0.650391, 0.513281,
5.}, {0.641602, 0.548437, 5.}, {0.624023, 0.606445,
5.}, {0.580078, 0.012305, 7.}, {0.580078, 0.124805,
7.}, {0.571289, 0.214453, 7.}, {0.558984, 0.272461, 7.}, {0.54668,
0.326953, 7.}, {0.541406, 0.370898, 7.}, {0.530859, 0.416602,
7.}, {0.525586, 0.45, 7.}, {0.516797, 0.476367, 7.}, {0.508008,
0.49043, 7.}, {0.435937, 0.005273, 9.}, {0.435937, 0.087891,
9.}, {0.427148, 0.170508, 9.}, {0.418359, 0.223242,
9.}, {0.407812, 0.270703, 9.}, {0.395508, 0.307617, 9.}, {0.390234,
0.341016, 9.}, {0.381445, 0.365625, 9.}, {0.246094, 0.007031,

```

11.}, {0.237305, 0.014062, 11.}, {0.237305, 0.091406,
 11.}, {0.226758, 0.145898, 11.}, {0.219727, 0.179297,
 11.}, {0.210937, 0.193359, 11.}, {0.066797, 0.007031,
 12.}, {0.066797, 0.017578, 12.}, {0.063281, 0.029883,
 12.}, {0.058008, 0.042187, 12.}, {0.776953, 0.005273,
 4.}, {0.766406, 0.181055, 4.}, {0.757617, 0.270703,
 4.}, {0.750586, 0.332227, 4.}, {0.741797, 0.395508, 4.}, {0.73125,
 0.441211, 4.}, {0.722461, 0.486914, 4.}, {0.713672, 0.530859,
 4.}, {0.704883, 0.567773, 4.}, {0.678516, 0.660937, 4.}, {0.812`,
 0.895`, 0.63`}, {0.819`, 0.893`, 0.63`}, {0.838`, 0.884`,
 0.63`}, {0.843`, 0.942`, 0.65`}, {0.8748`, 0.941586`,
 0.65`}, {0.891541`, 0.932318`, 0.65`}, {0.908223`, 0.924904`,
 0.65`}, {0.768164`, 0.898242`, 0.7`}, {0.783984`, 0.892969`,
 0.7`}, {0.810352`, 0.88418`, 0.7`}, {0.820898`, 0.88418`,
 0.7`}, {0.834961`, 0.88418`, 0.7`}, {0.849023`, 0.877148`,
 0.7`}, {0.857812`, 0.877148`, 0.7`}, {0.664453`, 0.894727`,
 1}, {0.675`, 0.892969`, 1}, {0.703125`, 0.885937`, 1}, {0.72942`,
 0.88418`, 1}, {0.740039`, 0.877148`, 1}, {0.77195`, 0.866602`,
 1}, {0.799805`, 0.866602`, 1}, {0.829687`, 0.856055`,
 1}, {0.831445`, 0.850781`, 1}, {0.008789`, 0.894727`,
 2}, {0.189844`, 0.892969`, 2}, {0.29707`, 0.885937`,
 2}, {0.37793`, 0.877148`, 2}, {0.437695`, 0.868359`,
 2}, {0.499219`, 0.856055`, 2}, {0.543164`, 0.841992`,
 2}, {0.587109`, 0.834961`, 2}, {0.632813`, 0.826172`,
 2}, {0.671484`, 0.815625`, 2}, {0.717187`, 0.805078`,
 2}, {0.764648`, 0.794531`, 2}, {0.003516`, 0.831445`,
 3}, {0.181055`, 0.829687`, 3}, {0.279492`, 0.820898`,
 3}, {0.349805`, 0.813867`, 3}, {0.453516`, 0.796289`,
 3}, {0.515039`, 0.785742`, 3}, {0.553711`, 0.768164`,
 3}, {0.595898`, 0.764648`, 3}, {0.636328`, 0.750586`,
 3}, {0.680273`, 0.741797`, 3}, {0.710156`, 0.733008`,
 3}, {0.005273`, 0.776953`, 4}, {0.181055`, 0.766406`,
 4}, {0.270703`, 0.757617`, 4}, {0.332227`, 0.750586`,
 4}, {0.395508`, 0.741797`, 4}, {0.441211`, 0.73125`,
 4}, {0.486914`, 0.722461`, 4}, {0.530859`, 0.713672`,
 4}, {0.567773`, 0.704883`, 4}, {0.660937`, 0.678516`,
 4}, {0.008789`, 0.71543`, 5}, {0.179297`, 0.704883`,
 5}, {0.263672`, 0.692578`, 5}, {0.32168`, 0.687305`,
 5}, {0.379687`, 0.676758`, 5}, {0.430664`, 0.669727`,
 5}, {0.469336`, 0.657422`, 5}, {0.513281`, 0.650391`,
 5}, {0.548437`, 0.641602`, 5}, {0.606445`, 0.624023`,
 5}, {0.012305`, 0.580078`, 7}, {0.124805`, 0.580078`,
 7}, {0.214453`, 0.571289`, 7}, {0.272461`, 0.558984`,
 7}, {0.326953`, 0.54668`, 7}, {0.370898`, 0.541406`,
 7}, {0.416602`, 0.530859`, 7}, {0.45`, 0.525586`, 7}, {0.476367`,
 0.516797`, 7}, {0.49043`, 0.508008`, 7}, {0.005273`, 0.435937`,
 9}, {0.087891`, 0.435937`, 9}, {0.170508`, 0.427148`,
 9}, {0.223242`, 0.418359`, 9}, {0.270703`, 0.407812`,

```

    9}, {0.307617`, 0.395508`, 9}, {0.341016`, 0.390234`,
    9}, {0.365625`, 0.381445`, 9}, {0.007031`, 0.246094`,
    11}, {0.014062`, 0.237305`, 11}, {0.091406`, 0.237305`,
    11}, {0.145898`, 0.226758`, 11}, {0.179297`, 0.219727`,
    11}, {0.193359`, 0.210937`, 11}, {0.007031`, 0.066797`,
    12}, {0.017578`, 0.066797`, 12}, {0.029883`, 0.063281`,
    12}, {0.042187`, 0.058008`, 12}};
ListPlot3D[data]
ListPointPlot3D[data]

Trial 1 (2nd degree surface)

tryFunc =
  a + b*x^1*y^0 + c*x^0*y^1 + d*x^2*y^0 + e*x^0*y^02 + f*x^1*y^1;
f1 = FindFit[data, tryFunc, {a, b, c, d, e, f}, {x, y}]
func1 = a + b*x^1*y^0 + c*x^0*y^1 + d*x^2*y^0 + e*x^0*y^02 +
  f*x^1*y^1 /. f1
Plot3D[func1, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}]

AIC - BIC

func1["AIC"]
f1["BIC"]

Stability Index

StabIndex[b_, c_, d_] = -d + func1 /. {x -> b, y -> c}
StabIndex[0.22, 0, 14]

test1[b_, c_] = func1 /. {x -> b, y -> c}
test1[0.22, 0.14]

Mean Square Error

functionValues = func1 /. {x -> #[[1]], y -> #[[2]]} & /@ data;

dValues = data[[All, 3]];
Error1 = Abs[functionValues - dValues];
mse1 = Mean[Error1^2]
LT1 = {};
AppendTo[LT1, {dValues, Error1}];

```

Trial 2 (3rd degree surface)

```
tryFunc =  
  a + b*x^1*y^0 + c*x^0*y^1 + d*x^2*y^0 + e*x^0*y^02 + f*x^1*y^1 +  
  g*x^3 + h*y^3 + k*x^2*y + m*x*y^2  
f2 = FindFit[data, tryFunc, {a, b, c, d, e, f, g, h, k, m}, {x, y}]  
  
func2 = tryFunc /. f2  
Plot3D[func2, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}]
```

Stability index

```
StabIndex[b_, c_, d_] = -d + func2 /. {x -> b, y -> c}  
StabIndex[0.66, 0, 6]  
test2[b_, c_] = func2 /. {x -> b, y -> c}  
test2[0.66, 0.6]
```

Mean Squared Error

```
unctionValues2 = func2 /. {x -> #[[1]], y -> #[[2]]} & /@ data;  
  
Error2 = Abs[functionValues2 - dValues];  
mse2 = Mean[Error2^2]  
LT2 = {};  
AppendTo[LT2, {dValues, Error2}];
```

Trial 3: 4th degree surface

```
model3 = a + b*x + c*y + d*x^2 + e*x*y + f*y^2 + g*x^3 + h*x^2*y +  
  k*x*y^2 + m*y^3 + n*x^4 + p*x^3*y + q*x^2*y^2 + r*x*y^3 +  
  s*y^4 (*to do ομαδοποίηση όρων*)  
f3 = FindFit[data,  
  model3, {a, b, c, d, e, f, g, h, k, m, n, p, q, r, s}, {x, y}]  
  
f3["AIC"]  
func3 = model3 /. f3;  
func3[x, y];
```

Stability index : possitive = unstable , negative = stable

```
StabIndex[b_, c_, d_] = -d + func3 /. {x -> b, y -> c}
```

Mean Squared Error

```
functionValues3 = func3 /. {x -> #[[1]], y -> #[[2]]} & /@ data;  
  
Error3 = Abs[functionValues3 - dValues];
```

```
mse3 = Mean[Error3^2]
LT3 = {};
AppendTo[LT3, {dValues, Error3}];
```

NONLINEAR FIT and AIC (AKAIKE) or BIC (BAHESIAN) criterion of goodness

2nd degree surface

```
tryFunc =
  a + b*x^1*y^0 + c*x^0*y^1 + d*x^2*y^0 + e*x^0*y^02 + f*x^1*y^1;
f1 = NonlinearModelFit[data, tryFunc, {a, b, c, d, e, f}, {x, y}]
aic1 = f1["AIC"];
bic1 = f1["BIC"];
Print["AIC_1=", f1["AIC"]]
Print["BIC_1=", f1["BIC"]]
```

3rd degree surface

```
tryFunc2 =
  a + b*x^1*y^0 + c*x^0*y^1 + d*x^2*y^0 + e*x^0*y^02 + f*x^1*y^1 +
  g*x^3 + h*y^3 + k*x^2*y + m*x*y^2
f2 = NonlinearModelFit[data,
  tryFunc2, {a, b, c, d, e, f, g, h, k, m}, {x, y}]
aic2 = f2["AIC"];
bic2 = f2["BIC"];
Print["AIC_2=", f2["AIC"]]
Print["BIC_2=", f2["BIC"]]
```

4th degree surface

```
tryFunc3 =
  a + b*x + c*y + d*x^2 + e*x*y + f*y^2 + g*x^3 + h*x^2*y + k*x*y^2 +
  m*y^3 + n*x^4 + p*x^3*y + q*x^2*y^2 + r*x*y^3 + s*y^4
f3 = NonlinearModelFit[data,
  model3, {a, b, c, d, e, f, g, h, k, m, n, p, q, r, s}, {x, y}]
aic3 = f3["AIC"];
bic3 = f3["BIC"];
Print["AIC_3=", f3["AIC"]]
Print["BIC_3=", f3["BIC"]]
```

Best Model

```
bestAICModel =
```

```

    If[aic1 < aic2 && aic1 < aic3, "Model 1",
      If[aic2 < aic3, "Model 2", "Model 3"]];

(*Determine the best model based on BIC*)
bestBICModel =
  If[bic1 < bic2 && bic1 < bic3, "Model 1",
    If[bic2 < bic3, "Model 2", "Model 3"]];

Print["Best model based on AIC: ", bestAICModel]
Print["Best model based on BIC: ", bestBICModel]

AIC - BIC Non Linear Fit with less parameters

2nd degree surface

tryFunc = a + b*x^1*y^0 + c*x^0*y^1 + e*x^0*y^02 + f*x^1*y^1
f1 = NonlinearModelFit[data, tryFunc, {a, b, c, e, f}, {x, y}]
aic1 = f1["AIC"];
bic1 = f1["BIC"];
Print["AIC_1=", f1["AIC"]]
Print["BIC_1=", f1["BIC"]]

tryFunc = a + c*x^0*y^1 + d*x^2*y^0 + e*x^0*y^02 + f*x^1*y^1
f1 = NonlinearModelFit[data, tryFunc, {a, c, d, e, f}, {x, y}]
aic1 = f1["AIC"];
bic1 = f1["BIC"];
Print["AIC_1=", f1["AIC"]]
Print["BIC_1=", f1["BIC"]]

tryFunc = a + b*x^1*y^0 + c*x^0*y^1 + d*x^2*y^0 + e*x^0*y^02
f1 = NonlinearModelFit[data, tryFunc, {a, b, c, d, e}, {x, y}]
aic1 = f1["AIC"];
bic1 = f1["BIC"];
Print["AIC_1=", f1["AIC"]]
Print["BIC_1=", f1["BIC"]]

tryFunc2 =
  a + b*x^1*y^0 + c*x^0*y^1 + e*x^0*y^02 + f*x^1*y^1 + g*x^3 +
  k*x^2*y + m*x*y^2
f2 = NonlinearModelFit[data,
  tryFunc2, {a, b, c, e, f, g, k, m}, {x, y}]
aic2 = f2["AIC"];
bic2 = f2["BIC"];
Print["AIC_2=", f2["AIC"]]
Print["BIC_2=", f2["BIC"]]

```


Παραμετρικό κριτήριο ευστάθειας - δοκιμές

Trial 1 (2nd degree surface)

```
tryFunc =  
  a + b*x^1*y^0 + c*x^0*y^1 + d*x^2*y^0 + e*x^0*y^02 + f*x^1*y^1;  
f1 = FindFit[data, tryFunc, {a, b, c, d, e, f}, {x, y}]  
func1 = a + b*x^1*y^0 + c*x^0*y^1 + d*x^2*y^0 + e*x^0*y^02 +  
  f*x^1*y^1 /. f1  
Plot3D[func1, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}]  
  
testvalues = func1 /. {x -> #[[1]], y -> #[[2]]} & /@ points;  
realvalues = points[[All, 3]];  
tester = testvalues - realvalues;  
results = {};  
  
For[i = 1, i <= 28, i++,  
  If[tester[[i]] > 0, index = "ασταθές", index = "ευσταθές"];  
  setOfValues = points[[i]];  
  firstElement = setOfValues[[1]];  
  secondElement = setOfValues[[2]];  
  thirdElement = setOfValues[[3]];  
  AppendTo[  
    results, {firstElement, secondElement, thirdElement, tester[[i]],  
    index}];  
  ]  
results;
```

Trial 2 (3rd degree surface)

```
tryFunc =  
  a + b*x^1*y^0 + c*x^0*y^1 + d*x^2*y^0 + e*x^0*y^02 + f*x^1*y^1 +  
  g*x^3 + h*y^3 + k*x^2*y + m*x*y^2  
f2 = FindFit[data, tryFunc, {a, b, c, d, e, f, g, h, k, m}, {x, y}]  
func2 = tryFunc /. f2  
Plot3D[func2, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}]  
  
testvalues2 = func2 /. {x -> #[[1]], y -> #[[2]]} & /@ points;  
realvalues2 = points[[All, 3]];  
tester2 = testvalues2 - realvalues2;  
results2 = {};  
For[i = 1, i <= 28, i++,  
  If[tester2[[i]] > 0, index2 = "ασταθές", index2 = "ευσταθές"];  
  setOfValues = points[[i]];  
  firstElement = setOfValues[[1]];
```

```

secondElement = setOfValues[[2]];
thirdElement = setOfValues[[3]];
AppendTo[
  results2, {firstElement, secondElement, thirdElement, tester2[[i]],
    index2}];
]
results2;

```

Trial 3: 4th degree surface

```

model3 = a + b*x + c*y + d*x^2 + e*x*y + f*y^2 + g*x^3 + h*x^2*y +
  k*x*y^2 + m*y^3 + n*x^4 + p*x^3*y + q*x^2*y^2 + r*x*y^3 + s*y^4 ;
f3 = FindFit[data,
  model3, {a, b, c, d, e, f, g, h, k, m, n, p, q, r, s}, {x, y}];

```

```

func3 = model3 /. f3
func3[x, y];

```

```

Plot3D[func3, {x, 0, 1}, {y, 0, 1},
  PlotStyle -> RGBColor[1., 0.87, 0.68], PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"b", "c", "d"}, PlotLegends -> Automatic]

```

```

testvalues3 = func3 /. {x -> #[[1]], y -> #[[2]]} & /@ points;
realvalues3 = points[[All, 3]];
tester3 = testvalues3 - realvalues3;
results3 = {};
For[i = 1, i <= 28, i++,
  If[tester3[[i]] > 0, index3 = "ασταθές", index3 = "ευσταθές"];
  setOfValues = points[[i]];
  firstElement = setOfValues[[1]];
  secondElement = setOfValues[[2]];
  thirdElement = setOfValues[[3]];
  AppendTo[
    results3, {firstElement, secondElement, thirdElement, tester3[[i]],
      index3}];
]
results3;

```

Εφαρμογές σε πραγματικούς αστεροειδείς

```

a = 1;
kk2 = (a^2 - b^2) / (a^2 - c^2);
dd[s_] = \[Sqrt]((a^2 + s) (b^2 + s) (c^2 + s));
eq = x^2/(a^2 + L) + y^2/(b^2 + L) == 1;
sol = Solve[eq, L];
L2 = L /. sol[[2]];
k[x_, y_] = L2;
w[x_, y_] = ArcSin[Sqrt[(a^2 - c^2)/(a^2 + k[x, y])]];

Fs[x_, y_] = EllipticF[w[x, y], kk2];
Fsc[x_, y_] = EllipticK[w[x, y]];
Es[x_, y_] = EllipticE[w[x, y], kk2];
Esc[x_, y_] = EllipticE[w[x, y]];
Va[x_, y_] := -2*(1/(\[Sqrt](a^2 -
      c^2)))*((1 - (x^2 - y^2)/(a^2 - b^2))*
      Fs[x, y] + (x^2/(a^2 - b^2) - ((a^2 - c^2)*
      y^2)/((a^2 - b^2)*(b^2 - c^2)))*
      Es[x, y] + ((c^2 + k[x, y])/(b^2 - c^2))*
      y^2*(\[Sqrt](a^2 - c^2))/dd[k[x, y]]);
Vr = d*Va[x, y] - (1/2) (x^2 + y^2);
AA = -D[Vr, {x, 2}] /. x -> 0;
BB = -D[Vr, {y, 2}] /. x -> 0;
matrixA[b_, c_, d_,
  y_] = {{0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {AA, 0, 0, 2}, {0, BB, -2, 0}};
VrOy = Vr /. x -> 0; (* Potential at x=0 *)
dV[b_, c_, d_, y_] = D[VrOy, y];

d0 = 2.07;
dv = dV[0.53, 0.52, d0, y];
sol = FindRoot[dv == 0, {y, 1.1}];
y0 = y /. sol[[1]] // Chop
MA = matrixA[0.53, 0.52, d0, y0];
LE = Eigenvalues[MA]
indexRe = 0; indexIm = 0;
For[i = 1, i <= 4, i++, Print[i, " ", Re[LE[[i]]]];
  If[Re[LE[[i]]] > 10^(-10), indexRe++]]
For[i = 1, i <= 4, i++, Print[i, " ", Im[LE[[i]]]];
  If[Abs[Im[LE[[i]]]] > 10^(-10), indexIm++]]
Print[indexRe, " -- ", indexIm]
If[indexRe != 0 && indexIm > 2, indexRe++]
indexRe

points = {{0.94, 0.83, 7.06}, {0.430, 0.37, 1.11}, {0.35, 0.35,
  1}, {0.63, 0.58, 5.75}, {0.53, 0.53, 2.07}};

```

Trial 1 (2nd degree surface)

Stability Index

```
func1 = 13.174188163976945` - 6.259105645776938` x -  
 7.941588182224928` x^2 - 6.259105645776944` y +  
 13.402946069487003` x y - 7.941588182224919` y^2;  
testvalues = func1 /. {x -> #[[1]], y -> #[[2]]} & /@ points  
realvalues = points[[All, 3]]  
tester = testvalues - realvalues  
results = {};
```

```
For[i = 1, i <= 5, i++,  
  If[tester[[i]] > 0, index = "ασταθές", index = "ευσταθές"];  
  setOfValues = points[[i]];  
  firstElement = setOfValues[[1]];  
  secondElement = setOfValues[[2]];  
  thirdElement = setOfValues[[3]];  
  AppendTo[  
    results, {firstElement, secondElement, thirdElement, tester[[i]],  
    index}];  
  ]  
results
```

Trial 2 (3rd degree surface)

Stability index

```
func2 = 11.880639371207351` + 0.6934659722562244` x -  
 14.900479033044318` x^2 + 0.8522879333569406` x^3 +  
 0.6934659722561909` y - 6.208524986552963` x y +  
 10.419293992861492` x^2 y - 14.900479033044409` y^2 +  
 10.41929399286147` x y^2 + 0.8522879333569039` y^3  
testvalues2 = func2 /. {x -> #[[1]], y -> #[[2]]} & /@ points;
```

```
realvalues2 = points[[All, 3]];  
tester2 = testvalues2 - realvalues2;  
results2 = {};  
For[i = 1, i <= 5, i++,  
  If[tester2[[i]] > 0, index2 = "ασταθές", index2 = "ευσταθές"];  
  setOfValues = points[[i]];  
  firstElement = setOfValues[[1]];  
  secondElement = setOfValues[[2]];  
  thirdElement = setOfValues[[3]];  
  AppendTo[  
    results2, {firstElement, secondElement, thirdElement, tester2[[i]],  
    index2}];  
  ]  
results2;
```

Trial 3: 4th degree surface

```
func3 = 12.342217080650682` - 3.373000823085807` x -  
  7.188137760522843` x^2 - 12.164381327276269` x^3 +  
  11.63764719214619` x^4 - 3.3730008230856607` y +  
  19.12792594430729` x y - 10.524417010221102` x^2 y -  
  15.944988827969844` x^3 y - 7.1881377605233645` y^2 -  
  10.524417010220994` x y^2 + 44.43196105383115` x^2 y^2 -  
  12.164381327275729` y^3 - 15.944988827969908` x y^3 +  
  11.637647192145911` y^4  
testvalues3 = func3 /. {x -> #[[1]], y -> #[[2]]} & /@ points;  
  
realvalues3 = points[[All, 3]];  
tester3 = testvalues3 - realvalues3;  
results3 = {};  
For[i = 1, i <= 5, i++,  
  If[tester3[[i]] > 0, index3 = "ασταθές", index3 = "ευσταθές"];  
  setOfValues = points[[i]];  
  firstElement = setOfValues[[1]];  
  secondElement = setOfValues[[2]];  
  thirdElement = setOfValues[[3]];  
  AppendTo[  
    results3, {firstElement, secondElement, thirdElement, tester3[[i]],  
      index3}];  
  ]  
results3;
```

Bibliography

- [1] M. Μιχαλοδημητράκης, “Μελέτη της κινήσεως εις το πεδίο βαρύτητος περιστροφόμενης ράβδου,” Ph.D. dissertation, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 1974.
- [2] V. Voutsas, “Orbital dynamics around ellipsoid distribution of mass,” *Master thesis, Aristotle University of Thessaloniki*, 2018.
- [3] D. Scheeres, “Dynamics about uniformly rotating triaxial ellipsoids: Applications to asteroids,” *Icarus*, vol. 110, no. 2, pp. 225–238, 1994. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103584711183>
- [4] V. Romanov and E. Doedel, “Periodic orbits associated with the libration points of the homogeneous rotating gravitating triaxial ellipsoid,” *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, vol. 22, 10 2012.
- [5] D. Karydis, G. Voyatzis, and K. Tsiganis, “A continuation approach for computing periodic orbits around irregular-shaped asteroids. an application to 433 eros,” *Advances in Space Research*, vol. 68, no. 11, pp. 4418–4433, 2021. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0273117721006864>
- [6] W. D. MacMillan, “The theory of the potential,” *New York [etc.] McGraw-Hill Book Company*, 1930.
- [7] E. F. Tedesco, “asteroid.” [Online]. Available: <https://www.britannica.com/science/asteroid>
- [8] J. Brownlee, “Probabilistic model selection with aic, bic, and mdl.” [Online]. Available: <https://machinelearningmastery.com/probabilistic-model-selection-measures/>