Πρόχειρη έκδοση του 2ου Κεφ από το βιβλίο Γ. Βουγιατζής, Γ. Μπόζης, Δ.Παπαδόπουλος « Διαφορικές Εξισώσεις και Εφαρμογές », Εκδόσεις Κλειδάριθμος

Σ' αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε μερικές γνωστές μεθόδους για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων (Δ.Ε.) πρώτης τάξης. Θα ξεκινήσουμε με εξισώσεις σε λυμένη μορφή

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

και θα αναζητήσουμε τη γενική τους λύση, είτε σε λυμένη μορφή

$$y = f(x, c), \quad x \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R},\ c \in \mathcal{E} \subseteq \mathbb{R},$$

είτε σε πεπλεγμένη μορφή

$$\Phi(x, y; c) = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^2,\ \ c \in \mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}.$$

Οι μέθοδοι που θα παρουσιάσουμε συνδέονται με συγκεκριμένες μορφές ή κατηγορίες της διαφορικής εξίσωσης (1). Είναι σημαντικό, λοιπόν, όταν μας δίνεται μια εξίσωση να μπορούμε να αναγνωρίσουμε σε ποια ειδική κατηγορία ανήκει ώστε να εφαρμόσουμε την κατάλληλη μέθοδο για την επίλυσή της[1]. Όμως, όπως θα γίνει σαφές στις επόμενες ενότητες, η αναγωγή μιας Δ.Ε. σε μια συγκεκριμένη κατηγορία μπορεί να απαιτεί την αλλαγή μεταβλητών.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι μόνο ελάχιστες ειδικές κατηγορίες εξισώσεων έχουν λύσεις που μπορούν να βρεθούν και να αποδοθούν με στοιχειώδεις μαθηματικές συναρτήσεις. Για παράδειγμα η εξίσωση

$$y' = x \sin(y)$$

ανήκει στην κατηγορία των εξισώσεων της Ενότητας 0.1 και λύνεται αντίστοιχα. Όμως η εξίσωση

$$y' = x + \sin(y)$$

δεν ανήκει σε κάποια κατηγορία για την οποία γνωρίζουμε έναν αντίστοιχο αλγόριθμο επίλυσης.

[1]Μια Δ.Ε. βέβαια μπορεί να ανήκει σε περισσότερες από μία κατηγορίες και να λύνεται με περισσότερους από έναν τρόπους

0.1 Διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών

Πρόκειται για εξισώσεις της μορφής:

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y). \tag{2}$$

Συμβαίνει δηλαδή ο όρος $f(x, y)$ στο δεξιό σκέλος της διαφορικής εξίσωσης $y' = f(x, y)$ να γράφεται ως γινόμενο μιας συνάρτησης του x επί μια συνάρτηση του y. Θα υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $f_1(x)$ και $f_2(y)$ είναι συνεχείς σε ανοιχτά διαστήματα τιμών των x και y, αντίστοιχα. Ιδιαίτερα τη συνάρτηση $f_2(y)$ θα τη θεωρούμε μη μηδενική[2] σε ανοιχτά διαστήματα τιμών της y

Η εξίσωση (2) γράφεται τότε:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx,$$

και ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_2(y) = \sigma_1(x) + c, \tag{3}$$

όπου οι σ_1 και σ_2 είναι συναρτήσεις μόνο του x και του y, αντίστοιχα, και η c είναι αυθαίρετη σταθερά[3]. Ακριβώς αυτή η σχέση αποτελεί τη γενική λύση της Δ.Ε. (2). Αν η (3) μπορεί να λυθεί ως προς y, τότε παίρνουμε τη λύση σε λυμένη μορφή.

Παράδειγμα : Για τη Δ.Ε. $y' = -x(y + 1)$ να βρεθεί η γενική λύση και η μερική λύση που περνάει από το σημείο $(x, y) = (0, 0)$.

Η δεδομένη Δ.Ε. είναι της μορφής (2), δηλαδή χωριζόμενων μεταβλητών, και για $y \neq -1$ γράφεται

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{y+1} &= -xdx \qquad \Rightarrow \qquad & \textstyle\int \frac{dy}{y+1} &= -\textstyle\int xdx \\ 'h & & & \\ \ln|y+1| &= -\tfrac{x^2}{2} + c \qquad \Rightarrow \qquad & y+1 &= \pm e^c e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Η c είναι η αυθαίρετη σταθερά της ολοκλήρωσης, οπότε και η ποσότητα $\pm e^c$ εκφράζει μια πραγματική αυθαίρετη σταθερά· μπορούμε να τη συμβολίσουμε ως c και να γράψουμε τελικά τη γενική λύση στη λυμένη μορφή

$$y = ce^{-\frac{x^2}{2}} - 1 \tag{4}$$

---

[2] Αν για κάποια διακριτή τιμή y_0 είναι $f(y_0) = 0$, τότε η $y = y_0$ θα αποτελεί λύση της Δ.Ε. όπως εύκολα μπορεί να αποδειχθεί.

[3] Είναι προφανές ότι δεν χρειάζεται να γράψουμε δύο αυθαίρετες σταθερές, δηλαδή μία για την ολοκλήρωση του αριστερού και μία για την ολοκλήρωση του δεξιού μέλους. Η αυθαίρετη σταθερά c μπορεί να τοποθετηθεί είτε στο αριστερό είτε στο δεξί μέλος κατά βούληση.

Σχήμα 1: Η οικογένεια λύσεων (4). Η μερική λύση που περνάει από το $(0,0)$ αντιστοιχεί στην έντονη καμπύλη.

Αν στη (4) θέσουμε $x = 0$ και $y = 0$, παίρνουμε $0 = c - 1$, δηλαδή η ζητούμενη μερική λύση αντιστοιχεί σε $c = 1$. Φτάσαμε στη λύση (4) θεωρώντας αρχικά ότι $y \neq -1$. Παρατηρούμε όμως ότι για $c = 0$ η (4) δίνει $y = -1$, η οποία φαίνεται αμέσως από την ίδια τη Δ.Ε. ότι αποτελεί λύση της. ◀

Οι λύσεις (4) παρουσιάζουν ακρότατο στο $x = 0$ και τείνουν ασυμπτωτικά στην τιμή $y = -1$ καθώς $x \to \pm\infty$. Θα μπορούσατε να συμπεράνετε αυτές τις ιδιότητες των λύσεων από τη δεδομένη διαφορική εξίσωση;

Μια διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών μπορεί να εμφανιστεί και ως

$$g_1(x)dx + g_2(y)dy = 0, \quad g_2(y) \neq 0,$$

ή, για $g_1(x) = 1$, και ως

$$g(y)dy = dx.$$

0.1.1 Ειδικές περιπτώσεις

Σε μορφή Δ.Ε. χωριζόμενων μεταβλητών ανάγονται και εξισώσεις της μορφής:

$$y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma), \tag{5}$$

με α, β και γ σταθερές. Πράγματι, για $\beta = 0$ αυτό είναι προφανές. Για $\beta \neq 0$, αν θέσουμε

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

παίρνουμε

$$z' = \alpha + \beta y'$$

και η (5) γράφεται:

$$\frac{z' - \alpha}{\beta} = f(z),$$

δηλαδή

$$z' = \alpha + \beta f(z). \tag{6}$$

Η (6) είναι χωριζόμενων μεταβλητών και ολοκληρώνεται.

Παράδειγμα :Θεωρούμε την εξίσωση

$$y' = \sqrt{x + y + 1} - 1. \tag{7}$$

Είναι της μορφής (5). Θέτουμε $x + y + 1 = z$, οπότε παραγωγίζοντας ως προς x παίρνουμε $1 + y' = z'$, και η (7) γίνεται

$$z' = \sqrt{z}. \tag{8}$$

Οι μεταβλητές στην εξίσωση (8) χωρίζονται και, με ολοκλήρωση των δύο μερών, προκύπτει ότι

$$x + c = 2\sqrt{z},$$

με τον περιορισμό

$$x + c \geq 0 \qquad \text{ή} \qquad x \geq -c. \tag{9}$$

Αντικαθιστώντας το z παίρνουμε τελικά

$$y = \frac{(x + c)^2}{4} - (x + 1), \quad x \geq -c, \tag{10}$$

η οποία είναι γενική λύση της (7). ◄

Σημείωση : Ας θεωρήσουμε τις καμπύλεσ-λύσεις (10) που αντιστοιχούν στις τιμές $c = 0$ και $c = 1$ της αυθαίρετης σταθεράς. Για τις τιμές αυτές παίρνουμε

$$y = \frac{x^2}{4} - (x + 1), \quad x \geq 0,$$

και

$$y = \frac{(x + 1)^2}{4} - (x + 1), \quad x \geq -1.$$

Οι δύο αυτές καμπύλες ορίζονται σε όλο το διάστημα $-\infty < x < \infty$ και τέμνονται στο σημείο $(x, y) = (-\frac{1}{2}, -\frac{7}{16})$, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2α. Όμως, ως λύσεις τις διαφορικής εξίσωσης (7), ορίζονται μόνο για $x > 0$ και $x > -1$, αντίστοιχα, σύμφωνα με τον περιορισμό (9). Άρα, ως λύσεις τής Δ.Ε. δεν τέμνονται και έτσι δεν παραβιάζεται το θεώρημα μοναδικότητας των λύσεων του Cauchy (θεώρημα ;;, σελ. ;;). **Σημείωση :** Σε συνέχεια της παραπάνω παρατήρησης σημειώνουμε και τα

Σχήμα 2: (α) Οι καμπύλες (10) για $c = 0$ και $c = 1$. Λύσεις της (7) αποτελούν μόνο τα συμπαγή τμήματα ($x > -c$). (β) Ενδεικτικά μέλη της μονοπαραμετρικής οικογένειας λύσεων (10) καθώς και η ιδιάζουσα λύση $y = -(x+1)$.

ακόλουθα. Έστω ότι ζητούμε, για παράδειγμα, τη μερική λύση της (7) που περνάει από την αρχή των αξόνων $(0, 0)$. Τότε γράφουμε ότι πρέπει

$$0 = \frac{c^2}{4} - 1 \qquad \Rightarrow \qquad c = \pm 2.$$

Αλλά ακριβώς ο περιορισμός $c \geq -x$ (δηλαδή $c \geq 0$) μας οδηγεί στο να απορρίψουμε την τιμή $c = -2$.

Σημείωση :Μπορεί να δειχθεί με άμεση αντικατάσταση ότι η (7) έχει ιδιάζουσα λύση την ευθεία

$$y = -(x+1).$$

Μία τουλάχιστον λύση της (7) περνάει από κάθε σημείο (x, y) του επιπέδου εφ' όσον $x + y + 1 \geq 0$. Το μονοσήμαντο όμως των λύσεων είναι εξασφαλισμένο μόνο για τα σημεία με $x + y + 1 > 0$ [4]. Στο Σχήμα 2β φαίνεται ότι όλες οι λύσεις (10) ξεκινούν από την ιδιάζουσα λύση και εφάπτονται σ' αυτή.

0.1.2 Προβλήματα

Πρόβλημα Ο πληθυσμός ενός είδους αυξάνεται ανάλογα με τον υπάρχοντα πληθυσμό σε κάθε χρονική στιγμή[5]. Πώς εξελίσσεται ο πληθυσμός του είδους;

Έστω x_0 ο πληθυσμός τού είδους τη χρονική στιγμή $t = 0$ και $x = x(t) > 0$ ο πληθυσμός σε μια τυχαία χρονική στιγμή. Ο *ρυθμός ή η ταχύτητα μεταβολής* της

[4] Παρατηρήστε ότι για τη Δ.Ε. (7), η ποσότητα $\partial f / \partial y$ δεν ορίζεται για $x + y + 1 = 0$, επομένως το θεώρημα του Cauchy δεν εγγυάται τη μοναδικότητα των λύσεων στην ευθεία αυτή.

[5] Πρόκειται για το απλούστερο μοντέλο πληθυσμιακής αύξησης ενός είδους.

ποσότητας x είναι $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ και, σύμφωνα με τον νόμο της αύξησης, συνδέεται με τον πληθυσμό x μέσω της σχέσης

$$\frac{dx}{dt} = k\,x, \quad k > 0, \tag{11}$$

όπου k ο συντελεστής αναλογίας, ο οποίος πρέπει να είναι θετικός αφού έχουμε αύξηση του πληθυσμού, δηλαδή $dx/dt > 0$.

Η (11) είναι χωριζόμενων μεταβλητών και μας δίνει

$$\frac{dx}{x} = k\,dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = k\,dt \quad \Rightarrow \quad \ln x = kt + c \quad \Rightarrow \quad x = c\,e^{kt},$$

όπου c μια αυθαίρετη σταθερά, προφανώς θετική. Μάλιστα, λόγω της αρχικής συνθήκης $x(0) = x_0$, προκύπτει ότι $c = x_0$ και άρα η λύση της εξίσωσης (11) είναι η

$$x = x_0\,e^{k\,t}. \tag{12}$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι ο πληθυσμός διπλασιάζεται σε χρόνο T, δηλαδή $x(T) = 2x_0$, τότε από τη (12) παίρνουμε $k = \frac{\ln 2}{T}$ και η λύση γράφεται $x = x_0 2^{t/T}$. ◀

Σημείωση : Αν είχαμε μείωση του πληθυσμού με τον ίδιο νόμο, τότε θα ίσχυε και πάλι η εξίσωση (11) αλλά με συντελεστή αναλογίας αρνητικό. Έτσι θα γράφαμε τη Δ.Ε. ως $\frac{dx}{dt} = -kx$ με $k > 0$ και η λύση της θα ήταν $x = x_0\,e^{-k\,t}$ (βλ. άσκηση 21)

Σημείωση : Αν ο ρυθμός μεταβολής της ποσότητας x είναι ανάλογος μιας ποσότητας x_1, με συντελεστή αναλογίας k_1, και μιας ποσότητας x_2, με συντελεστή αναλογίας k_2, τότε αυτό σημαίνει ότι $\frac{dx}{dt} = k\,x_1\,x_2$, όπου $k = k_1\,k_2$ (βλ. ασκήσεις 29 και 30).

Πρόβλημα Σώμα μάζας m αφήνεται να πέσει στο ομογενές πεδίο βαρύτητας της γης, με αντίσταση αέρα ανάλογη της ταχύτητας. Ζητάμε την εξίσωση της ταχύτητας πτώσης.

Σχήμα 3: Το Πρόβλημα ;;: πτώση σώματος με αντίσταση

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι οι $B = mg$ και $F_\alpha = -kv$, όπου $k > 0$ ο συντελεστής αναλογίας τής αντίστασης του αέρα. (Παρατηρήστε ότι στο Σχήμα 3α ορίσαμε ως θετική τη φορά προς τα κάτω, δηλαδή τη φορά της κίνησης.) Για την επιτάχυνση $\ddot{z} = \frac{dv}{dt}$ που αποκτά το σώμα θα ισχύει ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής, δηλαδή

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \ \text{ ή } \ \frac{dv}{g - (k/m)v} = dt. \tag{13}$$

Με ολοκλήρωση η (13) μας δίνει $g - \frac{k}{m}v = ce^{-\frac{k}{m}t}$, όπου c η αυθαίρετη σταθερά η οποία για την αρχική συνθήκη $v(0) = 0$ γίνεται $c = g$, οπότε η λύση γράφεται

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Το γράφημα της παραπάνω λύσης παρουσιάζεται στο Σχήμα 3β. Παρατηρούμε ότι για $t \to \infty$, η ταχύτητα τείνει στην τιμή $v_{o\rho} = \frac{mg}{k}$ η οποία ονομάζεται *οριακή ταχύτητα.* ◀

Πρόβλημα Ζητάμε να βρούμε φθίνουσα καμπύλη $y = y(x)$, για $x > 0$, που να περνάει από το σημείο $(1, 1)$ και να χαρακτηρίζεται από την εξής ιδιότητα: η εφαπτομένη της καμπύλης σε τυχόν σημείο της $P(x, y)$ να τέμνει τον άξονα Ox σε σημείο A τέτοιο ώστε το τρίγωνο OPA να είναι ισοσκελές.

Η εξίσωση μιας ευθείας σε τρέχουσες συντεταγμένες X και Y και με κλίση a γράφεται:

$$Y - Y_0 = a(X - X_0). \tag{14}$$

Αφού το σημείο $P(x, y)$ της ζητούμενης καμπύλης $y = y(x)$ ανήκει στην εφαπτομένη ευθεία (14), μπορούμε να θέσουμε $X_0 = x$, $Y_0 = y$ και $a = y'(x)$, οπότε η (14) γράφεται

$$Y - y = y'(X - x). \tag{15}$$

Επίσης, το σημείο $A = (x_A, 0)$ ανήκει στην εφαπτομένη και άρα πληροί τη (15). Μπορούμε λοιπόν να θέσουμε $X = x_A = 2x$ και $Y = 0$, επειδή το τρίγωνο OPT είναι

Σχήμα 4: Το Πρόβλημα ;;.

ισοσκελές. Έτσι, η (15) γίνεται η Δ.Ε. χωριζόμενων μεταβλητών

$$y' = -\frac{y}{x},$$

με λύση (που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(1) = 1$) την υπερβολή

$$y = \frac{1}{x}. \quad \blacktriangleleft$$

Πρόβλημα Να βρεθεί η ατμοσφαιρική πίεση p ως συνάρτηση του ύψους h από την επιφάνεια της Γης.

Έστω ένας στοιχειώδης κυλινδρικός όγκος αέρα ($S \times dh$) μάζας dm (Σχήμα 5). Η συνθήκη ισορροπίας του θα είναι[6]

$$S\,p - S(p + dp) - g\,dm = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dh} = -g\rho, \tag{16}$$

δεδομένου ότι $dm = \rho\,S\,dh$, όπου ρ η πυκνότητα της ατμόσφαιρας. Αλλά η ρ εξαρτάται από το ύψος ή και την πίεση. Γι' αυτό διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

1. Αν δεχθούμε ότι έχουμε σταθερή θερμοκρασία, τότε ισχύει

$$p\,dV = \frac{dm}{\mu}RT \;\text{ ή }\; \rho = \frac{p\mu}{RT}, \tag{17}$$

όπου μ το μοριακό βάρος τού αέρα, R η παγκόσμια σταθερά αερίων και T η απόλυτη θερμοκρασία.

Η (16) γράφεται, σύμφωνα με τη (17),

$$\frac{dp}{dh} = -k\,p, \quad k = \frac{g\mu}{RT}. \tag{18}$$

Η (18) είναι μια Δ.Ε. χωριζόμενων μεταβλητών από την οποία, για την αρχική συνθήκη $p = p_0$ όταν $h = 0$, βρίσκουμε τη λύση

$$p = p_0 e^{-k\,h}.$$

2. Αν δεχθούμε αδιαβατική μεταβολή για τη μάζα dm, έχουμε την εξίσωση

$$p\,(dV)^\gamma = C^\gamma = \text{σταθ.} \quad \text{ή} \quad \rho = \frac{dm\,p^{1/\gamma}}{C}.$$

---

[6] Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στον στοιχειώδη όγκο αέρα, δηλαδή της $F_1 = S(p + dp)$ που εφαρμόζεται στην επάνω διατομή, της $F_2 = S\,p$ που εφαρμόζεται στην κάτω διατομή και του βάρους $B = dm\,g$, θα πρέπει να είναι μηδέν.

Σχήμα 5: Στοιχειώδης κατακόρυφος κυλινδρικός όγκος αέρα, μάζας dm.

Η (16) τώρα γράφεται

$$\frac{dp}{p^{1/\gamma}} = -\lambda dh, \quad \lambda = \frac{gdm}{C}. \tag{19}$$

Η σταθερά λ είναι απροσδιόριστη αφού περιέχει την ποσότητα dm. Όμως, όπως γνωρίζουμε, για $\gamma \to 1$ θα πρέπει η (19) να συμπίπτει με τη (18). Άρα $\lambda = k$. Από τη Δ.Ε. (19), και πάλι με $p = p_0$ για $h = 0$, προκύπτει

$$p = \left\{ p_0^{(\gamma-1)/\gamma} - \frac{k(\gamma-1)}{\gamma} h \right\}^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad ◀$$

Πρόβλημα Βάζουμε σε λειτουργία το σύστημα κλιματισμού τη στιγμή που ο αέρας ενός κλειστού δωματίου, όγκου V_0 m^3, έχει $\alpha\%$ περιεκτικότητα σε CO_2. Καθαρός αέρας, περιεκτικότητας $\beta\%$ σε CO_2 (με $\beta < \alpha$), αρχίζει να μπαίνει στο δωμάτιο με παροχή $\omega \frac{m^3}{\sec}$. Ζητούμε την περιεκτικότητα σε CO_2 του δωματίου σε χρόνο t.

Έστω ότι σε χρόνο t υπάρχουν στο δωμάτιο x m^3 CO_2. Τη στιγμή εκείνη η περιεκτικότητα σε CO_2 είναι $\frac{x}{V_0}$.

Στο διάστημα από t μέχρι $t + dt$ μπαίνουν στο δωμάτιο ωdt m^3 αέρα που περιέχουν $V_1 = \beta\omega dt/100$ m^3 CO_2. Στον ίδιο χρόνο βγαίνουν από το δωμάτιο ωdt m^3 αέρα που περιέχουν $V_2 = \frac{x}{V_0}\omega dt$ m^3 CO_2. Η διαφορά $V_2 - V_1$ είναι ίση με τη μεταβολή $-dx$ της ποσότητας CO_2 στο δωμάτιο κατά το χρονικό διάστημα dt (το αρνητικό πρόσημο της μεταβολής δηλώνει ότι το x είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου t).

Έχουμε έτσι τη Δ.Ε. του προβλήματος

$$\frac{dx}{dt} = -\omega\Big(\frac{x}{V_0} - \frac{\beta}{100}\Big). \tag{20}$$

Η (20) είναι εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές. Η γενική της λύση είναι:

$$x = V_0\Big(\frac{\beta}{100} + c\, e^{-t\frac{\omega}{\Omega}}\Big). \tag{21}$$

Χρειάζεται να καθοριστεί η σταθερά c. Από το δεδομένο ότι για $t = 0$ είναι $x = \alpha V_0/100$, προκύπτει ότι $c = (\alpha - \beta)/100$. Η (21) γράφεται τώρα

$$x = \frac{V_0}{100}\Big(\beta + (\alpha - \beta)e^{-t\frac{\omega}{V_0}}\Big).$$

Επομένως, η ποσοστιαία περιεκτικότητα του αέρα του δωματίου σε CO_2 είναι ίση με $\beta + (\alpha - \beta)e^{-t\omega/V_0}$. ◀

0.2 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Μια διαφορική εξίσωση $y' = f(x, y)$ καλείται ομογενής[7] αν η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι ομογενής βαθμού μηδέν, αν δηλαδή, για κάθε $\lambda \in R$, ισχύει

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$$

Είναι φανερό ότι μια ομογενής συνάρτηση βαθμού μηδέν είναι τελικά συνάρτηση του λόγου[8] y/x. Μπορούμε επομένως να πούμε ότι γενική μορφή μιας ομογενούς Δ.Ε. 1ης τάξης είναι η

$$y' = f(\frac{y}{x}), \qquad x \neq 0. \tag{22}$$

Για τη λύση της (22) θέτουμε $z = \frac{y}{x}$, οπότε, παραγωγίζοντας ως προς x, έχουμε $y' = z + xz'$, ήτοι

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}, \qquad x \neq 0. \tag{23}$$

Η (23), στην οποία κατέληξε η (22), είναι Δ.Ε. με χωριζόμενες μεταβλητές και λύνεται σύμφωνα με όσα περιγράφουμε στην Ενότητα §0.1.

Παράδειγμα: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{x\,y}, \quad x \neq 0, \;\; y \neq 0.$$

Η Δ.Ε. γράφεται ως ομογενής στη μορφή

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}. \tag{24}$$

[7] Στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων ο όρος *ομογενής* χρησιμοποιείται και με άλλες έννοιες. Δείτε για παράδειγμα την Ενότητα §0.3.

[8] Ή, ισοδύναμα, του λόγου x/y

Θέτουμε $z = y/x$, οπότε είναι $y = x\,z$ και $y' = x\,z' + z$. Αντικαθιστώντας στη (24), παίρνουμε

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z},$$

ή, χωρίζοντας τις μεταβλητές,

$$z\,dz = \frac{dx}{x}.$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$z^2 = 2\ln|x| + c \quad \text{ή} \quad z = \pm\sqrt{2\ln|x| + c}, \tag{25}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά υπό τον περιορισμό $2\ln|x| + c \geq 0$. Αντικαθιστώντας τη $z = y/x$ στη (25) παίρνουμε

$$y = \pm x\sqrt{2\ln|x| + c}. \tag{26}$$

Μερικές από τις παραπάνω λύσεις παρουσιάζονται στο Σχήμα 6. ◄

Σχήμα 6: Μερικές από τις λύσεις της οικογένειας (26).

0.2.1 Ειδικές περιπτώσεις

Η Δ.Ε. της μορφής

$$y' = f\left(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y}{\alpha_2 x + \beta_2 y}\right)$$

μπορεί πάντα να γραφεί ως ομογενής στη μορφή

$$y' = f\left(\frac{\alpha_1 + \beta_1 \frac{y}{x}}{\alpha_2 + \beta_2 \frac{y}{x}}\right), \qquad x \neq 0.$$

Μια Δ.Ε. της μορφής

$$y' = f\left(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}\right) \tag{27}$$

έρχεται στη μορφή (22) ως εξής: Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 &= 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Έστω (x_0, y_0) η λύση τού συστήματος[9]. Θέτουμε[10] $x = x_0 + z$ και $y = y_0 + \omega$, οπότε

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\omega}{dz} = f\left(\frac{\alpha_1 + \beta_1 \frac{\omega}{z}}{\alpha_2 + \beta_2 \frac{\omega}{z}}\right), \qquad z \neq 0. \tag{28}$$

Η (28) είναι ομογενής της μορφής (22) και λύνεται κατά τα γνωστά.

Παράδειγμα :

$$y' = -\frac{x - 2y + 5}{2x - y + 4} \tag{29}$$

Λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} x - 2y + 5 &= 0 \\ 2x - y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

είναι η $(x_0 = -1, y_0 = 2)$. Θέτουμε $x = -1 + z$ και $y = 2 + \omega$. Επειδή $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\omega}{dz}$, η (29) γίνεται

$$\frac{d\omega}{dz} = -\frac{z - 2\omega}{2z - \omega}$$

ή

$$\frac{d\omega}{dz} = -\frac{1 - 2\omega/z}{2 - \omega/z}, \qquad z \neq 0. \tag{30}$$

Θέτουμε $\omega/z = \phi$, οπότε η ομογενής Δ.Ε. (30) έρχεται στη μορφή

$$\frac{(\phi - 2)d\phi}{(1 - \phi^2)} = \frac{dz}{z}, \qquad \phi \neq \pm 1.$$

[9] Δεν υπάρχει λύση αν $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$. Όμως, σε αυτή την περίπτωση η Δ.Ε. είναι της μορφής (5)

[10] Κάνουμε μια παράλληλη μετατόπιση στο σύστημα συντεταγμένων xy, έτσι ώστε οι ευθείες $\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i = 0$, με $i = 1, 2$, να τέμνονται στο $(0, 0)$ και, συνεπώς, οι σταθερές γ_1 να απαλείφονται.

Η τελευταία αυτή εξίσωση είναι Δ.Ε. χωριζόμενων μεταβάσεων. Η γενική λύση της είναι η

$$|(\phi - 1)/(\phi + 1)^3| = cz^2,$$

η οποία, αν επαναφέρουμε τις μεταβάσεις z και ω, παίρνει τη μορφή $|(\omega - z)/(\omega + z)^3| = c$. Γυρίζοντας ακόμη πιο πίσω στις μεταβλητές x και y, βρίσκουμε ως γενική λύση της (29) την

$$|x - y + 3| = c|x + y - 1|^3. \quad \blacktriangleleft$$

0.2.2 Προβλήματα

Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις προκύπτουν σε προβλήματα εύρεσης *τροχιών καταδίωξης* (pursuit curves). Πρόκειται για τροχιές που ακολουθεί ένα σώμα όταν κατευθύνει την κίνησή του προς ένα σταθερό ή κινούμενο σημείο. Ένα δείγμα αυτής της κατηγορίας προβλημάτων αποτελεί το παρακάτω πρόβλημα.

Πρόβλημα Κολυμβητής κολυμπάει από τη μια όχθη ενός ποταμού (σημείο Α) προς ένα σημείο Β ακριβώς απέναντι, στην άλλη όχθη, σε απόσταση d. Κολυμπάει με ταχύτητα σταθερού μέτρου υ_κ και με κατεύθυνση πάντα προς το Ο. Αν το ποτάμι ρέει και παρασύρει τον κολυμβητή με ταχύτητα υ_π, να βρεθεί η τροχιά που ακολουθεί ο κολυμβητής.

Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων του Σχήματος 7, όπου έστω $K(x, y)$, με $x \geq 0, y \geq 0$, η θέση του κολυμβητή την τυχαία χρονική στιγμή t. Η ταχύτητα με την οποία προσπαθεί να κινηθεί ο κολυμβητής είναι

$$\vec{\upsilon}_\kappa = \upsilon_\kappa \frac{\vec{KO}}{|\vec{KO}|} = -\upsilon_\kappa \cos\theta \vec{i} - \upsilon_\kappa \sin\theta \vec{j},$$

όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων Ox και Oy αντίστοιχα.

Σχήμα 7: Σχηματική παράσταση της τροχιάς του κολυμβητή και το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο περιγράφεται.

Η ταχύτητα με την οποία παρασύρεται ο κολυμβητής από το ποτάμι είναι $\vec{\upsilon}_\pi = \upsilon_\pi \vec{j}$. Η συνολική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ του κολυμβητή θα είναι η συνισταμένη των $\vec{\upsilon}_\kappa$ και $\vec{\upsilon}_\pi$, δηλαδή

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_\kappa + \vec{\upsilon}_\pi = -\upsilon_\kappa \cos\theta \vec{i} + (\upsilon_\pi - \upsilon_\kappa \sin\theta)\vec{j}.$$

Σε κάθε στιγμή, η τροχιά $y = y(x)$ θα εφάπτεται στην ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j}$, οπότε θα είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = -\frac{\upsilon_\pi - \upsilon_\kappa \sin\theta}{\upsilon_\kappa \cos\theta} = -\frac{a - \sin\theta}{\cos\theta}, \tag{31}$$

όπου $a = \upsilon_\pi / \upsilon_\kappa$.

Για το τυχαίο σημείο $K(x, y)$, και σύμφωνα με το Σχήμα 7β, ισχύουν οι σχέσεις

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{και} \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

οι οποίες, αν αντικατασταθούν στη (31) και μετά από λίγες πράξεις, μας δίνουν τη σχέση

$$\frac{dy}{dx} = -a\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}. \tag{32}$$

Η (32) αποτελεί τη Δ.Ε. της τροχιάς του κολυμβητή και είναι ομογενής. Αν θέσουμε $z = y/x$ και $y' = x\,z' + z$, οι μεταβλητές χωρίζονται και η Δ.Ε. ολοκληρώνεται δίνοντας

$$\ln\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) = -a \ln x + c, \qquad x > 0. \tag{33}$$

Για $x = d$, είναι $y = 0$ ή $z = 0$ (αρχικές συνθήκες) και η αυθαίρετη σταθερά προσδιορίζεται στην τιμή $c = a \ln d$. Αντικαθιστώντας τη c και τη $z = y/x$ στη (33), παίρνουμε μετά από λίγες πράξεις

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \left(\frac{d}{x}\right)^a, \qquad x > 0,$$

και η εξίσωση της τροχιάς του κολυμβητή γράφεται

$$y = \frac{x}{2}\left\{\left(\frac{d}{x}\right)^a - \left(\frac{d}{x}\right)^{-a}\right\}. \tag{34}$$

Στο Σχήμα 8 παρουσιάζεται η τροχιά (34) για διάφορες τιμές του λόγου ταχυτήτων $a = \upsilon_\pi/\upsilon_\kappa$. Παρατηρούμε πως αν $\upsilon_\kappa > \upsilon_\pi$, οπότε $a < 1$, τότε ο κολυμβητής διαγράφει καμπύλη τροχιά από τη μια όχθη στην άλλη, η οποία είναι τόσο συντομότερη όσο μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα υ_κ με την οποία μπορεί να κολυμπήσει. Αν $\upsilon_\pi > \upsilon_\kappa$, οπότε $a > 1$, ο κολυμβητής παρασύρεται από το ρεύμα του ποταμού και δεν φτάνει στην απέναντι όχθη[11]. Στην κρίσιμη περίπτωση όπου $\upsilon_\pi = \upsilon_\kappa$, οπότε $a = 1$, ο κολυμβητής φτάνει στην απέναντι όχθη αλλά σε απόσταση $d/2$ από τον αρχικό του στόχο (αποδείξτε το!). ◀

[11] Αν βέβαια συνεχίσει να κολυμπάει με κατεύθυνση τον αρχικό του στόχο (σημείο B ή O) και δεν αλλάξει στρατηγική.

Σχήμα 8: Περιπτώσεις τροχιών (34) του κολυμβητή για διαφορετικές τιμές του λόγου $a = \upsilon_\pi / \upsilon_\kappa$.

0.3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Πρόκειται για διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$y' + g(x)y + h(x) = 0. \tag{35}$$

Για την ανεξάρτητη μεταβλητή θα θεωρήσουμε το διάστημα $\alpha < x < \beta$ στο οποίο οι συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$ είναι συνεχείς.

Αν $h(x) = 0$, η εξίσωση (35) γράφεται

$$y' + g(x)y = 0. \tag{36}$$

Η (36) καλείται *ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξεως*, είναι εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές και έχει προφανή μερική λύση την $y = 0$. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η γενική λύση της είναι η

$$y = c\, e^{-\int g(x)dx}, \tag{37}$$

όπου η c είναι αυθαίρετη σταθερά.

Σημείωση : Είναι φανερό ότι αν $\phi_1(x)$ και $\phi_2(x)$ είναι δύο μερικές λύσεις της (36), τότε και κάθε έκφραση της μορφής

$$y = C_1\phi_1 + C_2\phi_2,$$

με C_1 και C_2 σταθερές, είναι λύση της Δ.Ε. Αυτό είναι αποτέλεσμα της γραμμικότητας της εξίσωσης, οι λύσεις της οποίας αποτελούν διανυσματικό χώρο (βλέπε και Κεφάλαιο ;;).

Ερχόμαστε τώρα να λύσουμε την *πλήρη* (όπως την ονομάζουμε) Δ.Ε. (35). Για τον σκοπό αυτόν θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο που είναι γνωστή ως *μέθοδος της μεταβολής των αυθαιρέτων σταθερών* ή μέθοδος του Lagrange. Θα θεωρήσουμε λύση της μορφής (37), αλλά στη θέση της σταθεράς c θα έχουμε μια συνάρτηση $z(x)$ και θα προσδιορίσουμε αυτήν τη συνάρτηση έτσι ώστε λύση της Δ.Ε. (35) να είναι η

$$y = z(x)e^{-\int g(x)dx}. \tag{38}$$

Αν αντικαταστήσουμε τη (38) στη (35) παίρνουμε

$$z'e^{-\int g(x)dx} - g(x)z(x)e^{-\int g(x)dx} + g(x)z(x)e^{-\int g(x)dx} + h(x) = 0,$$

δηλαδή

$$z' = -h(x)e^{\int g(x)dx}$$

ή

$$z = c - \int h(x)e^{\int g(x)dx}dx.$$

Άρα η γενική λύση της (35) είναι η

$$y = \{c - \int h(x)e^{\int g(x)dx}dx\}e^{-\int g(x)dx}. \tag{39}$$

Σημείωση : Η λύση (37) προκύπτει ως ειδική περίπτωση της λύσης (39) αν τεθεί $h(x) = 0$.

Σημείωση : Οι σταθερές που προκύπτουν από τις ολοκληρώσεις στον τύπο (39) μπορούν να ενσωματωθούν στην αυθαίρετη σταθερά c και, κατά συνέπεια, μπορούν να αγνοηθούν (ένας αυστηρός αναγνώστης θα 'πρεπε και θα μπορούσε να το διαπιστώσει αυτό ο ίδιος!).

Είναι θέμα μερικών πράξεων να δείξει κανείς ότι η συνάρτηση

$$\phi_0(x) = -\left\{\int h(x)e^{\int g(x)dx}dx\right\}e^{-\int g(x)dx}$$

είναι μια μερική λύση της Δ.Ε. (35). Επειδή όμως η (39) γράφεται και ως

$$y = c\,e^{-\int g(x)dx} + \phi_0(x),$$

προκύπτει, σύμφωνα και με την εξίσωση (37), ότι η γενική λύση μιας πλήρους γραμμικής Δ.Ε. είναι άθροισμα δύο όρων: της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. και μιας μερικής λύσης της πλήρους Δ.Ε. Η ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζει και τις γραμμικές Δ.Ε. ανώτερης τάξης (βλ. Κεφάλαιο ;;).

Παράδειγμα : Έστω η γραμμική Δ.Ε.

$$y' + \frac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0, \qquad x \neq 0.$$

Έχουμε από τον τύπο (39) ότι

$$y = \{c + \int e^{\int \frac{1-2x}{x^2}dx} dx\} e^{-\int \frac{1-2x}{x^2}dx}.$$

Είναι όμως

$$\int \frac{1-2x}{x^2}dx = -\frac{1}{x} - 2\ln|\,x\,| = -\frac{1}{x} - \ln x^2$$

και άρα

$$\begin{aligned} y = & \left(c + \int \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2}dx\right) x^2 e^{\frac{1}{x}} \\ = & \left(c + e^{-\frac{1}{x}}\right) x^2 e^{\frac{1}{x}} = \left(1 + c\,e^{\frac{1}{x}}\right) x^2, \qquad x \neq 0, \end{aligned}$$

όπως άλλωστε μπορεί και να επαληθευτεί. (Σύστασή μας προς όλους τους αναγνώστες είναι να επαληθεύουν πάντα τις λύσεις που βρίσκουν.) ◄

Παράδειγμα : Θεωρούμε τη Δ.Ε.

$$y' = \frac{1}{xy^2+1} \tag{40}$$

η οποία μετατρέπεται σε γραμμική αν θεωρήσουμε ως άγνωστη συνάρτηση τη $x = x(y)$. Πράγματι, η (40) γράφεται ως

$$\frac{dx}{dy} - y^2 x - 1 = 0$$

και είναι γραμμική με $g(y) = y^2$ και $h(y) = 1$. Εφαρμόζοντας τον αντίστοιχο τύπο (39), αλλά για τη $x = x(y)$, παίρνουμε[12]

$$x = (c + \gamma(y))e^{y^3/3}, \quad \text{όπου} \quad \gamma(y) = \int e^{-y^3/3}dy. \quad ◄$$

0.3.1 Προβλήματα

Οι γραμμικές Δ.Ε. βρίσκουν εφαρμογή σε πολλά θέματα Μηχανικής και Ηλεκτρισμού. Θα δώσουμε εδώ δύο παραδείγματα από τον Ηλεκτρισμό. Υπενθυμίζουμε για τον σκοπό αυτό μερικά βασικά πειραματικά δεδομένα σχετικά με τα ηλεκτρικά κυκλώματα.

---

[12] Η $\gamma(y)$ υπολογίζεται με τη βοήθεια της ειδικής συνάρτησης $\Gamma(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$.

(α) Η πτώση της τάσης E_R στα άκρα μιας αντίστασης R είναι ανάλογη προς την ένταση I του ρεύματος που διαρρέει την αντίσταση. Είναι δηλαδή

$$E_R = RI.$$

(β) Η πτώση τάσης E_L στα άκρα ενός πηνίου είναι ανάλογη προς την ταχύτητα μεταβολής της έντασης του ρεύματος. Είναι δηλαδή

$$E_L = L\frac{dI}{dt}.$$

(γ) Η πτώση τάσης E_C στα άκρα ενός πυκνωτή είναι ανάλογη προς το ηλεκτρικό φορτίο Q του πυκνωτή. Είναι δηλαδή

$$E_C = \frac{1}{C}Q.$$

Με βάση τα παραπάνω εκφράζουμε τον *2ο Νόμο του Kirchoff*: Η ηλεκτρεγερτική δύναμη $E = E(t)$ που εφαρμόζεται στα άκρα ενός κλειστού κυκλώματος RLC είναι ίση με το άθροισμα των πτώσεων τάσεων κατά μήκος του κυκλώματος, δηλαδή

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t). \tag{41}$$

Θα θεωρήσουμε κυκλώματα με μία αντίσταση και ένα ηλεκτρικό στοιχείο, πηνίο ή πυκνωτή.

Σχήμα 9: Τα ηλεκτρικά κυκλώματα (α) RL και (β) RC.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το ρεύμα στο κύκλωμα με αντίσταση και πηνίο του Σχήματος 9α θα δίνεται από τη γραμμική Δ.Ε.

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t). \tag{42}$$

Για συνεχές ρεύμα $E = E_0$ =σταθερό, η (42) έχει γενική λύση την

$$I(t) = \frac{E_0}{R} + ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Για εναλλασσόμενο ρεύμα της μορφής $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$, η (42) έχει γενική λύση την

$$I(t) = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \phi),$$

όπου η c είναι μια σταθερά και $\tan(\phi) = \frac{\omega L}{R}$

Για το κύκλωμα με αντίσταση και πυκνωτή (Σχήμα 9β), έχουμε

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

ή, επειδή $I = dQ/dt$,

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dE}{dt}. \tag{43}$$

Έχουμε δηλαδή και πάλι μια γραμμική Δ.Ε. με άγνωστη τη συνάρτηση $I = I(t)$. Για $E = E_0$, από τη (43) προκύπτει $I(t) = ce^{-\frac{t}{RC}}$.

Για $E = E_0 \sin(\omega t)$, προκύπτει από τη (43)

$$I(t) = ce^{-\frac{t}{RC}} + \frac{\omega E_0 C}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} \sin(\omega t - \phi),$$

όπου $\tan(\phi) = -\frac{1}{\omega RC}$.

0.4 Ειδικές μορφές Δ.Ε. που ανάγονται σε γραμμικές

0.4.1 Η διαφορική εξίσωση του Bernoulli

Πρόκειται για Δ.Ε. της μορφής

$$y' + g(x)y + h(x)y^\rho = 0, \quad \rho \neq 0,\ 1, \tag{44}$$

με τις συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$ συνεχείς σε κάποιο διάστημα $\mathcal{I} = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$. Για $\rho = 0$ η (44) είναι πλήρης γραμμική, ενώ για $\rho = 1$ είναι ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση.

Προσέχουμε πάντα να έχει έννοια η δύναμη y^ρ. Έτσι, π.χ., για $y > 0$ η y^ρ έχει έννοια για όλες τις πραγματικές τιμές που μπορεί να πάρει το ρ. Ή, αν το ρ είναι ακέραιος, το y^ρ ορίζεται για όλα τα y. Αν όμως, για παράδειγμα, $\rho = 1/2$, η δύναμη y^ρ ορίζεται μόνο για $y \geq 0$.

Η εξίσωση (44) μετατρέπεται σε γραμμική Δ.Ε. με τον μετασχηματισμό

$$y = z^{1/(1-\rho)}. \tag{45}$$

Πράγματι, είναι τότε

$$y' = \frac{1}{1-\rho} z^{\rho/(1-\rho)} z'$$

και η (44) γράφεται

$$\frac{1}{1-\rho}z^{\rho/(1-\rho)}z' + g(x)z^{1/(1-\rho)} + h(x)z^{\rho/(1-\rho)} = 0$$

ή, μετά από πολλαπλασιασμό με $z^{-\rho/(1-\rho)}$,

$$\frac{1}{1-\rho}z' + g(x)z + h(x) = 0.$$

Καταλήγουμε δηλαδή σε μια γραμμική Δ.Ε. με άγνωστη τη συνάρτηση $z = z(x)$. Με τη βοήθεια της (45) βρίσκουμε στη συνέχεια την $y = y(x)$.

Παράδειγμα :

$$y' + xy - x^3y^3 = 0 \tag{46}$$

Είναι εξίσωση Bernoulli με $\rho = 3$. Έτσι, σύμφωνα με τη (45), θέτουμε $y = z^{-1/2}$ με $z > 0$ και καταλήγουμε στη γραμμική Δ.Ε.

$$z' - 2xz + 2x^3 = 0,$$

με γενική λύση την

$$z = c\,e^{x^2} + 1 + x^2, \quad z > 0.$$

Επομένως, η γενική λύση της (46) είναι η

$$y = \frac{1}{\sqrt{c\,e^{x^2} + 1 + x^2}}, \quad c\,e^{x^2} + 1 + x^2 > 0. \quad \blacktriangleleft$$

0.4.2 Η διαφορική εξίσωση του Riccati

Πρόκειται για Δ.Ε. που μπορούμε να τη φέρουμε στη μορφή

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x). \tag{47}$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f(x), g(x)$ και $h(x)$ είναι συνεχείς σε κάποιο διάστημα $\mathcal{I} = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι αν $h(x) \equiv 0$, $\forall x \in \mathcal{I}$, η (47) είναι της μορφής Bernoulli με $\rho = 2$. Επίσης παρατηρούμε ότι αν $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in \mathcal{I}$, η (47) είναι γραμμική.

Στη γενική της μορφή η εξίσωση (47) δεν μπορεί να λυθεί παρά μόνο αν είναι γνωστή μια μερική λύση της, π.χ. η $y = \psi(x)$. Τη λύση αυτήν τη βρίσκουμε απ' ευθείας από την εξίσωση (47), μαντεύοντας ενδεχομένως τη μορφή της. Αν βρεθεί μια μερική λύση $\psi(x)$, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό

$$y = \psi(x) + \frac{1}{z}, \quad \text{όπου } z = z(x) \neq 0, \tag{48}$$

και η εξίσωση (47) ανάγεται σε γραμμική με άγνωστη τη συνάρτηση $z = z(x)$. Πράγματι, αντικαθιστώντας τη (48) στο δεξί μέλος της (47) παίρνουμε

$$y' = f(x)\left(\psi(x)^2 + \frac{1}{z^2} + \frac{2\psi(x)}{z}\right) + g(x)\left(\psi(x) + \frac{1}{z}\right) + h(x). \tag{49}$$

Επίσης, με παραγώγιση της (48) ως προς x,

$$y' = \psi'(x) - \frac{z'}{z^2}. \tag{50}$$

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των (49) και (50) και λαμβάνοντας υπόψη ότι η $\psi(x)$ είναι λύση της (47), δηλαδή είναι $\psi' = f\psi^2 + g\psi + h$, παίρνουμε τελικά τη σχέση

$$z' + (2f(x)\psi(x) + g(x))z + f(x) = 0 \tag{51}$$

που αποτελεί μια γραμμική Δ.Ε. για τη συνάρτηση $z = z(x)$. Βρίσκουμε τη γενική λύση $z = z(x, c)$ της (51), οπότε, σύμφωνα με τη (48), η γενική λύση της Δ.Ε. του Riccati (47) θα είναι η

$$y = \psi(x) + \frac{1}{z(x,c)}.$$

Παράδειγμα : Να λυθεί η Δ.Ε.

$$y' = -y^2 + (2x^2 - 1)y - (x^4 - x^2 - 2x) \tag{52}$$

Παρατηρούμε ότι $y = \psi(x) = x^2$ είναι μια μερική λύση της (52). Θέτουμε

$$y = x^2 + \frac{1}{z}, \quad z \neq 0,$$

οπότε, ακολουθώντας τη μεθοδολογία που περιγράψαμε παραπάνω, απ' τη (52) προκύπτει η

$$z' - z - 1 = 0. \tag{53}$$

Η (53) είναι γραμμική και έχει ως γενική λύση την

$$z = c\,e^x - 1, \quad c\,e^x - 1 \neq 0.$$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι γενική λύση της εξίσωσης (52) του Riccati είναι η

$$y = x^2 + \frac{1}{c\,e^x - 1}. \quad \blacktriangleleft$$

0.5 Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις και πολλαπλασιαστές Όϋλερ

0.5.1 Πλήρης Δ.Ε.

Έστω η διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

$$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

με P και Q συνεχείς συναρτήσεις σε έναν τόπο $\mathcal{T}$, και $Q(x,y) \neq 0$. Γράφουμε τη Δ.Ε. στη μορφή

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{54}$$

Αν υπάρχει μια συνάρτηση $\Phi(x,y)$, που να ορίζεται και να έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ και $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ στον απλώς συνεκτικό τόπο $\mathcal{T}$, τέτοια ώστε το διαφορικό της

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy$$

να ισούται με το αριστερό μέλος της (54), η Δ.Ε. ονομάζεται *πλήρης*[13]. Έτσι μια πλήρης Δ.Ε. γράφεται ως $d\Phi(x,y) = 0$ και ολοκληρώνεται άμεσα δίνοντας ως γενική λύση τη

$$\Phi(x,y) = c. \tag{55}$$

Η (55) παριστάνει μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών που δίνονται σε πεπλεγμένη μορφή. Μπορεί πάντως να ελεγχθεί ότι, αν για κάποια τιμή της $c = c_0$, η καμπύλη $\Phi(x,y) = c_0$ περνάει από το σημείο $(\xi,\eta) \in \mathcal{T}$, τότε αυτή είναι και η μόνη λύση της (54) που περνάει από το συγκεκριμένο σημείο. Και τούτο διότι η $(\frac{\partial \Phi}{\partial y})_{(\xi,\eta)} = Q(\xi,\eta) \neq 0$ και επομένως η εξίσωση $\Phi(x,y) = c_0$ λύνεται μονότιμα ως προς y και δίνει $y = \phi(x)$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό της πληρότητας, θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y), \quad (x,y) \in \mathcal{T}. \tag{56}$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να ορίσουμε τη Δ.Ε. (54) ως πλήρη αν ισχύουν οι σχέσεις (56) για μια συνάρτηση $\Phi = \Phi(x,y)$.

Σύμφωνα με το *θεώρημα της πληρότητας*, ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η (54) πλήρης είναι η

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in \mathcal{T}. \tag{57}$$

Άρα, όταν μας δίνεται μια εξίσωση στη μορφή της (54), ελέγχουμε αν ισχύει η συνθήκη (57). Αν αυτό συμβαίνει, τότε η ολοκλήρωση της $d\Phi(x,y)$ και, συνεπώς, η εύρεση της $\Phi(x,y)$, δίνεται από τον τύπο

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(\chi,y)d\chi + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\psi)d\psi, \tag{58}$$

όπου (x_0,y_0) ένα σταθερό σημείο του $\mathcal{T}$. Προϋπόθεση για να ισχύει η (58) είναι το παραλληλόγραμμο που ορίζεται από τα σημεία (x_0,y_0), (x,y_0), (x_0,y) και (x,y) να

[13]Θυμηθείτε ότι ο όρος *πλήρης* χρησιμοποιήθηκε με άλλη έννοια στην Ενότητα 0.3.

Σχήμα 10: Η διαδρομή ολοκλήρωσης της πλήρους διαφορικής εξίσωσης (54).

ανήκει εξολοκλήρου στον απλώς συνεκτικό τόπο $\mathcal{T}$. Επίσης, η $\Phi(x, y)$ μπορεί να βρεθεί με ολοκλήρωση των σχέσεων (;;). Στη συνέχεια παραθέτουμε δύο παραδείγματα αυτών των δύο μεθόδων ολοκλήρωσης, η διαδρομή των οποίων απεικονίζεται στο Σχήμα 10.

Παράδειγμα :

$$(\frac{1}{y} + x)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0 \tag{59}$$

Η (59) είναι πλήρης διότι

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y} + x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{1}{y^2}.$$

Επομένως υπάρχει $\Phi(x, y)$ την οποία μπορούμε να βρούμε μέσω της σχέσης (58). Έχουμε

$$\int_{x_0}^{x} P(\chi, y)d\chi = \int_{x_0}^{x} (\frac{1}{y} + \chi)d\chi = \frac{\chi}{y} + \frac{\chi^2}{2} \mid_{x_0}^{x} = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} - \frac{x_0}{y} + \frac{x_0^2}{2}$$

και

$$\int_{y_0}^{y} Q(x_0, \psi)d\psi = \int_{y_0}^{y} -\frac{x_0}{\psi^2}d\psi = \frac{x_0}{\psi} \mid_{y_0}^{y} = \frac{x_0}{y} - \frac{x_0}{y_0}.$$

Συνεπώς

$$\Phi(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + \underbrace{\frac{x_0^2}{2} - \frac{x_0}{y_0}}_{\text{σταθ.}}.$$

Άρα, σύμφωνα με τη (55), η γενική λύση της (59) θα είναι η

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=c \quad \text{ή} \quad y=\frac{2x}{2c-x^2}, \quad x^2 \neq 2c. \quad \blacktriangleleft$$

Παράδειγμα :

$$x(1-y^2)dx+y(1-x^2)dy=0, \qquad y\neq 0, x\neq \pm 1. \tag{60}$$

Η (60) είναι πλήρης διότι

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(x(1-y^2)\big)=\frac{\partial}{\partial x}\big(y(1-x^2)\big)=-2xy.$$

Άρα υπάρχει συνάρτηση $\Phi=\Phi(x,y)$ για την οποία να ισχύουν οι σχέσεις (;;), δηλαδή

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=x(1-y^2), \tag{61}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=y(1-x^2). \tag{62}$$

Ολοκληρώνουμε τη (61) ως προς x θεωρώντας το y σταθερό:

$$\Phi=\int_{(y=\sigma\tau\alpha\theta)} x(1-y^2)dx=\frac{x^2}{2}(1-y^2)+C(y). \tag{63}$$

Παραγωγίζοντας τη (63) ως προς y, παίρνουμε

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=-x^2y+\frac{dC(y)}{dy}. \tag{64}$$

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των (62) και (64), έχουμε

$$y-x^2y=-x^2y+\frac{dC(y)}{dy}\Rightarrow \frac{dC(y)}{dy}=y\Rightarrow C(y)=\frac{y^2}{2}+c_0,$$

όπου c_0 μια σταθερά. Άρα από τη (63) έχουμε ότι $\Phi=\frac{x^2}{2}(1-y^2)+\frac{y^2}{2}+c_0$ και η γενική λύση της (60) θα είναι η

$$\frac{x^2}{2}(1-y^2)+\frac{y^2}{2}=c. \quad \blacktriangleleft$$

0.5.2 Πολλαπλασιαστής Όϋλερ

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μας δόθηκε η εξίσωση (54) και ότι δεν ισχύει η συνθήκη πληρότητας (57). Μπορούμε ωστόσο να θέσουμε το ερώτημα: *Μήπως υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση $R(x,y) \neq 0$ τέτοια ώστε η Δ.Ε.*

$$R(x,y)P(x,y)dx + R(x,y)Q(x,y)dy = 0 \tag{65}$$

να είναι πλήρης;

Μια τέτοια συνάρτηση (αν μπορεί να βρεθεί) ονομάζεται *πολλαπλασιαστής του Euler* ή αλλιώς *ολοκληρωτικός παράγοντας*.

Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της (54) με τον παράγοντα $R(x,y)$ ώστε να οδηγηθούμε σε μια ισοδύναμη Δ.Ε. (τη 65) η οποία να είναι πλήρης. Η λύση τότε θα μπορεί να βρεθεί σύμφωνα με όσα εκθέσαμε προηγουμένως.

Πότε όμως η εξίσωση (65) είναι πλήρης; Για να συμβαίνει αυτό πρέπει να είναι

$$\frac{\partial(RP)}{\partial y} = \frac{\partial(RQ)}{\partial x} \Rightarrow P_yR + PR_y = Q_xR + QR_x,$$

όπου οι δείκτες στις συναρτήσεις δηλώνουν τις αντίστοιχες μερικές παραγώγους. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται τελικά:

$$R_yP - QR_x = R(Q_x - P_y). \tag{66}$$

Πρέπει λοιπόν η συνάρτηση $R(x,y)$ να επιλεγεί έτσι ώστε να ικανοποιεί τη (66). Η τελευταία αυτή σχέση είναι Δ.Ε. με μερικές παραγώγους και η λύση της είναι, εν' γένει, πρόβλημα πολύ πιο δύσκολο από τη λύση της αρχικής εξίσωσης (54). Ωστόσο, δεν ζητάμε τη γενική λύση της (66) αλλά *μια* από τις λύσεις της. Συμβαίνει λοιπόν κάποιες φορές να' ναι εύκολη η εύρεση μιας τέτοιας λύσης, δηλαδή ενός πολλαπλασιαστή Euler. Μερικές τέτοιες περιπτώσεις παρουσιάζουμε στη συνέχεια.

α) πολλαπλασιαστής της μορφής $R = R(y)$

Έστω ότι αναζητάμε έναν πολλαπλασιαστή που να εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή y, δηλαδή $R = R(y)$. Η εξίσωση (66) γράφεται τότε

$$\frac{R_y}{R} = \frac{Q_x - P_y}{P}. \tag{67}$$

Από τη (67) συμπεραίνουμε ότι για να υπάρχει πολλαπλασιαστής Euler της μορφής $R = R(y)$, πρέπει η παράσταση $(Q_x - P_y)/P$ να είναι ανεξάρτητη του x, δηλαδή

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \sigma(y). \tag{68}$$

Άρα, όταν μας δοθεί η (54) ελέγχουμε μήπως πράγματι η έκφραση (68) είναι ανεξάρτητη του x (εξαρτάται δηλαδή μόνο από το y). Αν αυτό συμβαίνει, τότε η (67) είναι συνήθης Δ.Ε. πρώτης τάξης, χωριζόμενων μεταβλητών, με *μια* λύση την

$$R(y) = e^{\int \sigma(y)dy}.$$

Παράδειγμα : Η Δ.Ε.

$$(y + x\,y^2)dx - xdy = 0 \tag{69}$$

δεν είναι πλήρης διότι

$$\frac{\partial(y+xy^2)}{\partial y} \neq \frac{\partial(-x)}{\partial x}.$$

Συμβαίνει όμως να ισχύει γι' αυτή την εξίσωση η σχέση (68), είναι δηλαδή

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{-1-(1+2xy)}{y(1+xy)} = -\frac{2}{y} = \sigma(y).$$

Άρα υπάρχει πολλαπλασιαστής Euler της μορφής $R = R(y)$, για τον οποίο βρίσκουμε από την εξίσωση (67) ότι είναι

$$\frac{R_y}{R} = -\frac{2}{y} \Rightarrow R = \frac{1}{y^2}.$$

Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (69) με τη συνάρτηση $R = \frac{1}{y^2}$, παίρνουμε την ισοδύναμη Δ.Ε.

$$(\frac{1}{y} + x)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0 \tag{70}$$

η οποία, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε αμέσως, είναι πλήρης. Λύνοντας κατά τα γνωστά, βρίσκουμε από τη (70) ότι

$$y = -\frac{2x}{x^2+c}, \quad x^2 + c \neq 0. \tag{71}$$

Η (71) είναι λύση τόσο της (70) όσο και της (69).◀

β) πολλαπλασιαστής της μορφής $R = R(x)$

Αν το αριστερό μέλος της (68) δεν είναι ανεξάρτητο του x (πράγμα που μόνο συμπτωματικά θα μπορούσε να συμβαίνει), αναζητούμε πολλαπλασιαστή Euler της μορφής $R = R(x)$. Τότε η εξίσωση (66) γίνεται

$$\frac{R_x}{R} = -\frac{Q_x - P_y}{Q}. \tag{72}$$

Άρα, για να υπάρχει τέτοιος πολλαπλασιαστής, πρέπει

$$\frac{Q_x - P_y}{Q} = \phi(x), \tag{73}$$

δηλαδή το δεξί μέλος της (72) να είναι ανεξάρτητο του y. Βρίσκουμε τότε από τη (72) ότι η

$$R(x) = e^{-\int \phi(x)dx}$$

είναι ένας κατάλληλος πολλαπλασιαστής.

γ) Πολλαπλασιαστές $R = R(x,y)$ ειδικής μορφής

Οι δύο περιπτώσεις που αναφέραμε για την εύρεση μιας λύσης της Δ.Ε. (54) δεν είναι οι μόνες. Σε αρκετά βιβλία διαφορικών εξισώσεων παρουσιάζονται διάφορες μορφές πολλαπλασιαστών Euler που θα μπορούσαμε να αναζητήσουμε, και ενδεχομένως να προσδιορίσουμε, ώστε μια εξίσωση όπως η (54) να γίνει πλήρης και επιλύσιμη. Δεν θα εξαντλήσουμε εδώ το θέμα, θα αναφέρουμε μόνο ότι συχνά χρειάζεται κανείς να αυτενεργήσει και, έχοντας εξοικειωθεί με την εξίσωση που έχει να λύσει, να αναζητήσει έναν πολλαπλασιαστή Euler με όποιον τρόπο θεωρεί πιο πρόσφορο. Δίνουμε εδώ ένα τέτοιο παράδειγμα.

Παράδειγμα : Η Δ.Ε.

$$(4xy + 3y^4)dx + (2x^2 + 5xy^3)dy = 0 \tag{74}$$

δεν είναι πλήρης. Και όχι μόνο αυτό, αλλά ούτε η (68) ούτε η (73) ισχύουν, όπως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε.

Η πολυωνυμική μορφή της (74) ωστόσο μας δίνει την ιδέα να αναζητήσουμε έναν πολλαπλασιαστή της μορφής

$$R(x,y) = x^\kappa y^\lambda.$$

Χωρίς φυσικά να είναι βέβαιο ότι τέτοιος πολλαπλασιαστής υπάρχει, επιχειρούμε να καθορίσουμε τα κ και λ ώστε η εξίσωση

$$\underbrace{(4x^{\kappa+1}y^{\lambda+1} + 3x^\kappa y^{\lambda+4})}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(2x^{\kappa+2}y^\lambda + 5x^{\kappa+1}y^{\lambda+3})}_{Q(x,y)}dy = 0$$

να είναι πλήρης, δηλαδή $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ ή

$$4(\lambda+1)x^{\kappa+1}y^\lambda + 3(4+\lambda)x^\kappa y^{3+\lambda} = 2(\kappa+2)x^{\kappa+1}y^\lambda + 5(\kappa+1)x^\kappa y^{3+\lambda}.$$

Άρα πρέπει

$$\left.\begin{array}{l} 4(\lambda+1) = 2(\kappa+2) \\ 3(4+\lambda) = 5(\kappa+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \kappa = 2, \quad \lambda = 1.$$

Βρήκαμε λοιπόν έναν πολλαπλασιαστή Euler, τον $R(x,y)=x^2y$, και η εξίσωση (74) γίνεται

$$(4x^3y^2+3x^2y^5)dx+(2x^4y+5x^3y^4)dy=0.$$

Αυτή η τελευταία Δ.Ε. είναι πλήρης και λύνεται κατά τα γνωστά. ◀

Πρόβλημα Να βρεθεί μια καμπύλη του επιπέδου xy που να περνάει από το σημείο $(2,1)$ και να έχει την εξής ιδιότητα: το τρίγωνο που σχηματίζεται από την επιβατική ακτίνα OM στο τυχαίο σημείο $M(x,y)$ της καμπύλης, την εφαπτομένη στο σημείο M και έναν από τους ημιάξονες Ox να έχει σταθερό εμβαδόν $E=1$.

Τα γεωμετρικά προβλήματα, όπως αυτό, πρέπει να διατυπώνονται και να αντιμετωπίζονται με τη μεγαλύτερη δυνατή προσοχή, επειδή το σχήμα που θα χρησιμοποιήσουμε για την επίλυσή του μπορεί να μας οδηγήσει σε παραπλανητικά αποτελέσματα. Η εξοικείωση με το συγκεκριμένο πρόβλημα μας οδηγεί σε κάποιους χρήσιμους περιορισμούς. Στο θέμα μας π.χ. μπορούμε να συμπεράνουμε για την καμπύλη που αναζητάμε ότι (α) δεν μπορεί να τέμνει τον άξονα των x και (β) δεν μπορεί η εφαπτομένη σε κάποιο σημείο της να περνάει από την αρχή των αξόνων. Διότι, στις περιπτώσεις αυτές, θα μηδενιζόταν το εμβαδόν του τριγώνου που καθορίζει η εκφώνηση.

Η καμπύλη που ζητούμε λοιπόν θα 'χει είτε $y>0$ είτε $y<0$ σ' όλα τα σημεία της. Αφού, σύμφωνα με την εκφώνηση, θέλουμε η καμπύλη να περνάει από το σημείο $(2,1)$, θα 'χει $y>0$ σ' όλα τα σημεία της.

Η εξίσωση της εφαπτομένης τής καμπύλης στο τυχαίο σημείο της $M(x,y)$ θα είναι

$$Y-y=(X-x)\frac{dY}{dX}|_M. \tag{75}$$

Από τη (75) βρίσκουμε ότι η τετμημένη του σημείου K στο οποίο

η εφαπτομένη MK τέμνει τον άξονα των x θα είναι ίση με

$$x-\frac{y}{dy/dx}\neq 0,$$

σύμφωνα με τον παραπάνω περιορισμό (β).

Θα πρέπει λοιπόν να έχουμε για το εμβαδόν του τριγώνου

$$\frac{1}{2}|x-\frac{y}{dy/dx}|y=1$$

ή

$$\epsilon(x-\frac{y}{dy/dx})y=2, \tag{76}$$

όπου $\epsilon=\pm1$ για το ενδεχόμενο να τέμνει η εφαπτομένη ΜΚ τον θετικό ή αρνητικό ημιάξονα των x αντίστοιχα.

Σχήμα 11: Οι λύσεις (80) και (81) (καμπύλες I και II αντίστοιχα).

Η (76) γράφεται

$$\epsilon y^2 dx + (2 - \epsilon xy)dy = 0. \tag{77}$$

Η (77) δεν είναι πλήρης. Επιδέχεται όμως, όπως εύκολα μπορεί να αποδειχθεί, έναν πολλαπλασιαστή Euler της μορφής

$$R(y) = \frac{1}{y^3}.$$

Πλήρης λοιπόν είναι η Δ.Ε.

$$\frac{\epsilon}{y}dx + (\frac{2}{y^3} - \frac{\epsilon x}{y^2})dy = 0. \tag{78}$$

Από αυτήν προκύπτει

$$\Phi(x, y) = \frac{\epsilon x}{y} - \frac{1}{y^2}.$$

Γενική λύση της (78), ή ισοδύναμα της (77), είναι λοιπόν η

$$\Phi(x, y) = c \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{\epsilon}(c\,y + \frac{1}{y}). \tag{79}$$

Από τη (79) παίρνουμε ως μερικές λύσεις, που περνούν από το σημείο $(2, 1)$, τις εξής **δύο** συναρτήσεις (Σχήμα 11):

I. για $\epsilon = 1$ την

$$x = y + \frac{1}{y} \tag{80}$$

II. για $\epsilon = -1$ την

$$x = 3y - \frac{1}{y} \tag{81}$$

0.6 Αλλαγή μεταβλητών

Σε πολλές από τις κατηγορίες Δ.Ε. που μελετήσαμε ως εδώ, θεωρήσαμε σκόπιμο να εισαγάγουμε μια καινούργια (βοηθητική) μεταβλητή. Για παράδειγμα, στη λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y' = f(\frac{y}{x})$ θέσαμε $\frac{y}{x} = z$, για τη λύση της εξίσωσης του Bernoulli: $y' + g(x)y + h(x)y^{\rho} = 0$ θέσαμε $y = z^{1/(1-\rho)}$, κ.λπ. Άλλοτε πάλι, όπως στην περίπτωση της εξίσωσης (27) της Ενότητας §0.2.1, αντί των μεταβλητών x και y χρησιμοποιήσαμε δύο νέες μεταβλητές z και ω αντίστοιχα, όπου θεωρήσαμε $\omega = \omega(z)$.

Οπωσδήποτε δεν υπάρχουν καθορισμένες συνταγές για το πότε είναι σκόπιμο ή αναγκαίο να χρησιμοποιούμε αντί των Καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y) κάποιο άλλο ζεύγος συντεταγμένων (u, w), όπως π.χ. πολικές συντεταγμένες. Είναι θέμα κρίσης και εξοικείωσης με τη συγκεκριμένη Δ.Ε. που επιχειρούμε να λύσουμε και με τη μορφή των λύσεων που ενδεχομένως αναμένουμε.

Για παράδειγμα, η διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών

$$y' = \frac{x}{y} \tag{82}$$

έχει λύσεις την οικογένεια των ομόκεντρων κύκλων $x^2 + y^2 = c$ (με $c > 0$). Οι λύσεις αυτές σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) θα περιγράφονταν από την απλή σχέση $r = c$ που προκύπτει από την εξίσωση

$$\frac{dr}{d\theta} = 0. \tag{83}$$

Πράγματι, αν στη Δ.Ε. (82) αντικαταστήσουμε τις Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) με τις πολικές (r, θ), χρησιμοποιώντας τις σχέσεις μετασχηματισμού

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{84}$$

και

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta, \quad dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta,$$

καταλήγουμε στην εξίσωση (83).

Στη συνέχεια παραθέτουμε δύο πιο σύνθετα παραδείγματα.

Παράδειγμα : Να λυθεί η Δ.Ε.

$$(xdx + ydy) - xy(xdy - ydx) = 0. \tag{85}$$

Η εμφάνιση των συμπλεγμάτων $xdx + ydy$ και $xdy - ydx$ μας οδηγεί στη σκέψη να χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες. Έχουμε τις σχέσεις μετασχηματισμού (84) αλλά, επίσης, από τη $x^2 + y^2 = r^2$ παίρνουμε την

$$x\,dx + y\,dy = r\,dr,$$

και από την $\tan\theta = y/x$ παίρνουμε την

$$x\,dy - y\,dx = r^2\,d\theta.$$

Έτσι η (85) γράφεται

$$rdr - r^4 \sin\theta \cos\theta d\theta = 0, \quad r \neq 0. \tag{86}$$

Η (86) είναι χωριζόμενων μεταβλητών και η ολοκλήρωσή της μας δίνει

$$\frac{1}{2r^2} = -\frac{\sin^2\theta}{2} + c$$

ή, σε Καρτεσιανές συντεταγμένες,

$$c\,x^2 + (c-1)y^2 = 1. \tag{87}$$

Η (87) παριστάνει γενικά μια μονοπαραμετρική οικογένεια κωνικών τομών. Πιο συγκεκριμένα, για $c > 1$ η (87) ορίζει οικογένεια ελλείψεων και για $0 < c < 1$ μια οικογένεια υπερβολών. Ειδικά για $c = 1$, βρίσκονται από τη (87) ως λύσεις οι ευθείες $x = \pm 1$, ενώ για $c < 0$ δεν ορίζεται καμιά πραγματική καμπύλη. ◀

Παράδειγμα : Να λυθεί η Δ.Ε.

$$(1 + xy)\frac{x}{y}y' = 1, \quad y \neq 0. \tag{88}$$

Επειδή στη (88) εμφανίζονται τα συμπλέγματα xy και $\frac{x}{y}$, θέτουμε[14]

$$x\,y = u, \quad \frac{x}{y} = w. \tag{89}$$

Πρέπει τώρα να εκφράσουμε την y' ως συνάρτηση των νέων μεταβλητών u, w και της $\frac{du}{dw}$. Παραγωγίζοντας τις (89) ως προς x, παίρνουμε

$$y + x\,y' = \frac{du}{dw}\frac{dw}{dx} \;\text{ και }\; 1 = y'w + y\frac{dw}{dx}. \tag{90}$$

Απαλείφοντας το $\frac{dw}{dx}$ από τις (90), βρίσκουμε

$$y' = \frac{\dfrac{du}{dw} - \dfrac{u}{w}}{u + w\dfrac{du}{dw}}. \tag{91}$$

Σύμφωνα με τις (89) και (91), η Δ.Ε. (88) γράφεται

$$w(1+u)(\frac{du}{dw} - \frac{u}{w}) = u + w\frac{du}{dw} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u+2} = \frac{dw}{w}. \tag{92}$$

Από τη (92) παίρνουμε

$$(2 + u) = c\,w \quad \text{ή} \quad x\,y + 2 = \frac{c\,x}{y}, \quad c \neq 0.$$

Η σχέση αυτή αποτελεί τη γενική λύση της (88). ◀

[14]Αυτό φυσικά δεν σημαίνει ότι η μέθοδος οπωσδήποτε θα λειτουργήσει. Για καμία Δ.Ε. δεν θα μπορούσαμε να βεβαιώσουμε εκ των προτέρων κάτι τέτοιο. Ούτε σημαίνει ότι οι μετασχηματισμοί (89) είναι το μόνο που μπορούμε να κάνουμε. Για παράδειγμα, θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει τη (88) ως γραμμική Δ.Ε. με άγνωστη τη συνάρτηση $x = x(y)$.

0.7 Διαφορικές εξισώσεις ανωτέρου ή άνευ βαθμού

Συνεχίζουμε και σε αυτή την ενότητα να μελετούμε Δ.Ε. πρώτης τάξης, δηλαδή εξισώσεις της μορφής
$$F(x,y,y')=0 \tag{93}$$
που όμως δεν μπορούν να γραφούν σε λυμένη μορφή[15]. Τέτοιου είδους εξισώσεις ή είναι ανωτέρου βαθμού ή δεν έχουν βαθμό.

0.7.1 Διαφορικές ανωτέρου βαθμού

Μια Δ.Ε. (93) ή οποία είναι αλγεβρικής μορφής k βαθμού ($k \neq 1$) ως προς την y', μπορεί να γραφεί ως γινόμενο παραγόντων στη μορφή[16]
$$(y'-f_1(x,y))\,(y'-f_2(x,y))\ldots(y'-f_k(x,y))=0.$$

Για απλότητα, ας υποθέσουμε ότι η (93) είναι δευτέρου βαθμού και μπορεί να γραφεί στη μορφή
$$(y'-f_1(x,y))(y'-f_2(x,y))=0, \tag{94}$$
$$\begin{array}{ll} y' & =f_1(x,y) \quad (α) \\ y' & =f_2(x,y). \quad (β) \end{array} \tag{95}$$
Οι παραπάνω εξισώσεις είναι πρώτης τάξης και πρώτου βαθμού. Γενικά πρόκειται για μορφές απλούστερες από τη (93). Έστω ότι
$$\begin{array}{ll} \Phi_1(x,y,c) & =0 \quad (α) \\ \Phi_2(x,y,c) & =0, \quad (β) \end{array} \tag{96}$$
είναι οι γενικές λύσεις των (95α) και (95β) αντίστοιχα. Όμως, τόσο η μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών (96α) όσο και η οικογένεια (96β) αποτελούν λύσεις της (94) ή της αρχικής διαφορικής (93). Οι δύο παραπάνω οικογένειες μπορούν να γραφούν σε μία παράσταση ως
$$\Phi_1(x,y,c)\,\Phi_2(x,y,c)=0. \tag{97}$$
Η (97) αποτελεί τη γενική λύση της (93). Στη μορφή αυτή εμφανίζεται βέβαια μία μόνο σταθερά διότι η Δ.Ε. (93) είναι πρώτης τάξης.

Παράδειγμα : Η Δ.Ε
$$y'^2-x(x+y)y'+x^3y=0 \tag{98}$$

[15] Θυμίζουμε ότι μια Δ.Ε. 1ης τάξης είναι λυμένη όταν, σε κάποιον τόπο $\mathcal{T}$ του επιπέδου Oxy, μπορεί να γραφεί ως $y'=f(x,y)$, με την $f(x,y)$ μονότιμη συνάρτηση.

[16] Χωρίς να αποκλείεται κάποιες από τις $f_i(x,y)$, $i=1\ldots k$ να μην είναι πραγματικές.

είναι πρώτης τάξης αλλά δευτέρου βαθμού. Γράφεται ως

$$(y' - x^2)(y' - xy) = 0$$

και επομένως η λύση της ανάγεται στη λύση των Δ.Ε.

$$\begin{aligned} y' &= x^2 \\ y' &= x\,y. \end{aligned}$$

Λύσεις των δύο αυτών Δ.Ε. είναι, αντίστοιχα, οι

$$\begin{aligned} y &= (x^3 + c)/3 \quad (\alpha) \\ y &= ce^{x^2/2}. \quad (\beta) \end{aligned}$$

Η γενική λύση μπορεί λοιπόν να γραφεί στη μορφή

$$(3y - x^3 - c)(y - c\,e^{x^2/2}) = 0.$$

Από κάθε σημείο (x_0, y_0) του επιπέδου περνούν δύο λύσεις της (98) που δίνονται από τις σχέσεις (0.7.1α) και (0.7.1(β» για κάποια τιμή του c (Σχήμα 12α). Στο σημείο τομής τους (x_0, y_0), οι λύσεις αυτές έχουν γενικά διαφορετική εφαπτομένη, δηλαδή τέμνονται εγκάρσια. Εξαίρεση αποτελούν τα σημεία στα οποία συμβαίνει να είναι $x_0^2 = x_0 y_0$ (δηλαδή ο άξονας των y και η ευθεία $y = x$). Από αυτά περνούν πάλι δύο λύσεις αλλά με κοινή εφαπτομένη. Αυτή η παρατήρηση έχει το εξής νόημα: Ας πάρουμε για παράδειγμα τις λύσεις που περνούν από το σημείο $A(1, 1)$ της ευθείας $y = x$ (Σχήμα 12β). Αυτές είναι οι

$$y = \frac{1}{3}(x^3 + 2) \ \ (\mathrm{I}) \quad \text{και} \quad y = e^{(x^2-1)/2} \ \ (\mathrm{II}),$$

όπου $-\infty < x < \infty$.

Ακριβώς επειδή αυτές οι λύσεις έχουν στο σημείο A κοινή εφαπτομένη, μπορούμε να πούμε ότι μία λύση της αρχικής Δ.Ε. (98), που περνάει από το σημείο $(1, 1)$, είναι και η

$$y = \begin{cases} \frac{1}{3}(x^3 + 2) & -\infty < x \leq 1 \\ e^{(x^2-1)/2} & 1 \leq x < \infty, \end{cases}$$

δηλαδή η καμπύλη που δημιουργείται από την ένωση του τμήματος της καμπύλης (I) αριστερά από το A με το τμήμα της καμπύλης (II) δεξιά από το A. Αυτή η ένωση τμημάτων των καμπυλών δεν μπορεί να γίνει στο σημείο B, όπου επίσης τέμνονται οι καμπύλες (I) και (II). Και τούτο διότι η συνάρτηση που θα προέκυπτε δεν θα ήταν παραγωγίσιμη σε αυτό το σημείο. (Μπορείτε να αιτιολογήσετε σε τι θα ενοχλούσε αυτό;)◄

Σχήμα 12: α) Οι μονοπαραμετρικές οικογένειες καμπυλών-λύσεων (i) και (ii) της διαφορικής εξίσωσης (98), που δίνονται από τις (0.7.1α) και (0.7.1β). β) Οι μερικές λύσεις (I) και (II) της διαφορικής εξίσωσης (98). Οι δύο καμπύλες συναντώνται εφαπτομενικά στο σημείο A και τέμνονται εγκάρσια στο B.

Σημείωση : Απ' όσα αναφέραμε ως εδώ, προκύπτει ότι μια Δ.Ε. όπως η (93), εφόσον είναι κάποιου βαθμού ως προς y', τη μεταχειριζόμαστε σαν να είναι συνήθης αλγεβρική εξίσωση ως προς y' και βρίσκουμε όλες τις πραγματικές ρίζες της. Έτσι π.χ., εφόσον ενδιαφερόμαστε για πραγματικές λύσεις, η Δ.Ε.

$$(y'^2 - xy' + x^2)(y' - xy) = 0,$$

ή στη μορφή

$$y'^3 - x(1+y)y'^2 + x^2(y+1)y' - x^3y = 0,$$

είναι ισοδύναμη με τη Δ.Ε.

$$y' - xy = 0.$$

Αυτό ισχύει επειδή η

$$y'^2 - x\,y' + x^2 = 0$$

δεν έχει πραγματικές λύσεις ως προς y'.

0.7.2 Ειδικές μορφές διαφορικών εξισώσεων άνευ βαθμού

Μετά από αυτές τις γενικές παρατηρήσεις, ερχόμαστε να εξετάσουμε δύο ειδικότερες μορφές τής Δ.Ε. (93). Σε όσα ακολουθούν, δεν θεωρούμε απαραίτητο το πρώτο μέλος της (93) να είναι έκφραση πολυωνυμική (κάποιου βαθμού) ως προς y'.

(α) Λείπει από την εξίσωση η εξαρτημένη μεταβλητή y

Έχουμε δηλαδή
$$f(x,y')=0. \tag{99}$$
Είναι φυσικό να επιχειρήσουμε αμέσως να λύσουμε ως προς y', δηλαδή
$$y'=\phi(x),$$
οπότε φτάνουμε εν' γένει σε μια απλή, άμεσα ολοκληρώσιμη Δ.Ε.

Αν η επίλυση ως προς y' δεν είναι εύκολη ή δυνατή, επιχειρούμε να λύσουμε τη (99) ως προς x, βρίσκοντας έτσι την εξίσωση
$$x=g(y'). \tag{100}$$
Θέτουμε $y'=p$ και η (100) γράφεται
$$x=g(p). \tag{101}$$
Επίσης, έχουμε
$$y=\int \frac{dy}{dx}dx=\int p\frac{dg(p)}{dp}dp=\phi(p)+c. \tag{102}$$
Οι συναρτήσεις (101) και (102) δίνουν τη γενική λύση της (99) σε παραμετρική μορφή
$$x=g(p) \quad \text{και} \quad y=\phi(p)+c.$$
Παράμετρος είναι η p και αυθαίρετη σταθερά η c.

Παράδειγμα : Ας πάρουμε για παράδειγμα την εξίσωση
$$y'+\sin y'=x \tag{103}$$
κι ας παρατηρήσουμε εδώ ότι η εξίσωση αυτή είναι πρώτης τάξεως αλλά όχι κάποιου βαθμού. Θέτουμε $y'=p$, οπότε
$$x=p+\sin p \tag{104}$$
και
$$y=\int \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dp}dp=\int p(1+\cos p)dp=\frac{p^2}{2}+p\sin p+\cos p+c. \tag{105}$$
Οι εξισώσεις (104) και (105) δίνουν σε παραμετρική μορφή τη λύση της (103). ◄

(β) Λείπει από την εξίσωση η ανεξάρτητη μεταβλητή x

Έχουμε δηλαδή
$$f(y,y')=0. \tag{106}$$
Αν η (106) μπορεί να λυθεί ως προς y', αν δηλαδή $y'=\phi(y)$, έχουμε μια Δ.Ε. με χωριζόμενες μεταβλητές. Διαφορετικά λύνουμε τη (106) ως προς y, δηλαδή
$$y=g(y').$$

Θέτουμε $y' = p$, οπότε

$$y = g(p) \tag{107}$$

και

$$x = \int \frac{dx}{dy} dy = \int \frac{1}{p} \frac{d\,g(p)}{dp} dp + c. \tag{108}$$

Οι συναρτήσεις (107) και (108) δίνουν σε παραμετρική μορφή τη γενική λύση της Δ.Ε. (106).

Παράδειγμα :

$$y - 2y' = \sqrt{1 + y'^2} \tag{109}$$

Θέτουμε $y' = p$, οπότε

$$y = 2p + \sqrt{1 + p^2} \tag{110}$$

και

$$\begin{aligned} x = & \quad \int dx = \int \tfrac{dy}{p} = \int \tfrac{1}{p}(2 + \tfrac{p}{\sqrt{1+p^2}})dp = \ \ldots \\ = & \quad \ln{[p^2(p + \sqrt{1 + p^2})]} + c. \end{aligned} \tag{111}$$

Οι καμπύλες που δίνονται από τις παραμετρικές εξισώσεις (110) και (111), με παράμετρο την p, αποτελούν τη γενική λύση της Δ.Ε. (109). ◄

(γ) Η διαφορική εξίσωση του Clairaut

Πρόκειται για τη Δ.Ε.

$$y = xy' + f(y'). \tag{112}$$

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(y')$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως προς y'. Η λύση επιτυγχάνεται με τη χρήση του συμβολισμού $y' = p$, οπότε η (112) γράφεται στη μορφή

$$y = xp + f(p). \tag{113}$$

Ας παραγωγίσουμε ως προς x τα δύο μέλη της (113). Παίρνουμε

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{df(p)}{dp}\frac{dp}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dx}(x + \frac{df(p)}{dp}) = 0.$$

Δηλαδή, είτε

$$\frac{dp}{dx} = 0 \tag{114}$$

είτε

$$x = -\frac{df(p)}{dp} = \phi(p). \tag{115}$$

Από τη (114) προκύπτει $p = \frac{dy}{dx} = c$, όπου c αυθαίρετη σταθερά. Άρα, λόγω της (113), είναι[17]

$$y = c\,x + f(c). \tag{116}$$

[17]Μια οποιαδήποτε σταθερά στη θέση της $f(c)$ θα ήταν αρκετή για να ικανοποιήσει την $\frac{dy}{dx} = c$ αφού η ολοκλήρωσή της μας δίνει $y = cx + c'$, όπου c' μια νέα αυθαίρετη σταθερά. Πρέπει όμως η σταθερά αυτή να επιλεγεί έτσι ώστε να ικανοποιείται η αρχική εξίσωση (112) και αυτό συμβαίνει μόνο αν $c' = f(c)$.

Η (116) είναι γενική λύση της εξίσωσης (113) αφού παριστά μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών και μάλιστα ευθειών.

Αν τώρα αντικαταστήσουμε στη (113) την $x = \phi(p)$, όπως δίνεται από τη σχέση (115), παίρνουμε

$$y = x\phi(p) + f(p) \tag{117}$$

Οι εξισώσεις (115) και (117) δίνουν σε παραμετρική μορφή *μια* λύση της εξίσωσης Clairaut, η οποία δεν συμπεριλαμβάνεται στη γενική λύση. Πρόκειται για μια *ιδιάζουσα λύση* που είναι η περιβάλλουσα[18] της οικογένειας ευθειών (116).

Παράδειγμα : Δίνεται η εξίσωση Clairaut

$$y = xy' + 2y'^2. \tag{118}$$

Θέτουμε $y' = p$ και παραγωγίζουμε τη (118) ως προς x. Έτσι παίρνουμε

$$y = x\,p + 2p^2 \;\Rightarrow\; y'(= p) = p + x\,p' + 4p\,p' \;\Rightarrow\; p'(x + 4p) = 0,$$

δηλαδή

$$\frac{dp}{dx} = 0 \tag{119}$$

ή

$$x + 4p = 0. \tag{120}$$

Από τη (119) παίρνουμε $p = c$ ή

$$y' = c \;\Rightarrow\; y = c\,x + c'. \tag{121}$$

Αν αντικαταστήσουμε τη (121) στη (118), τότε προκύπτει ότι

$$c\,x + c' = x\,c + 2c^2 \;\Rightarrow\; c' = 2c^2$$

και η γενική λύση της (118) θα είναι η οικογένεια ευθειών

$$y = c\,x + 2c^2. \tag{122}$$

Επίσης, από τη (120) προκύπτει με ολοκλήρωση

$$p = y' = -\frac{x}{4} \;\Rightarrow\; y = -\frac{x^2}{8} + c'', \tag{123}$$

όπου c'' η σταθερά της ολοκλήρωσης. Όμως, η (123) ικανοποιεί τη (118) μόνο αν $c'' = 0$. Άρα, λύση (ιδιάζουσα) της (118) είναι και η

$$y = -\frac{x^2}{8}. \quad \blacktriangleleft$$

[18]*Περιβάλλουσα* μιας οικογένειας καμπυλών $f(x, y; c) = 0$ είναι μια καμπύλη που σε κάθε σημείο της εφάπτεται και σε ένα μέλος της οικογένειας. Αποδεικνύεται ότι αν υπάρχει περιβάλλουσα, αυτή δίνεται από την απαλοιφή της σταθεράς c μεταξύ των εξισώσεων $f(x, y; c) = 0$ και $\partial f(x, y; c)/\partial c = 0$.

Σχήμα 13: Λύσεις $y = cx + c^2$ της εξίσωσης Clairaut (118). Η ιδιάζουσα λύση $y = -x^2/8$ είναι η καμπύλη με την έντονη γραμμή.

(δ) Η διαφορική εξίσωση του Lagrange

Είναι Δ.Ε. της μορφής

$$y = x\phi(y') + f(y'), \tag{124}$$

όπου οι συναρτήσεις $\phi(y')$ και $f(y')$ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες ως προς y'. Για $\phi(y') = y'$ η (124) είναι τύπου Clairaut.

Για τη λύση τής (124) θέτουμε $y' = p$ και γράφουμε τη σχέση στη μορφή

$$y = x\phi(p) + f(p). \tag{125}$$

Παραγωγίζοντας τη (125) ως προς x, έχουμε

$$p = \phi(p) + x\frac{d\phi(p)}{dp}\frac{dp}{dx} + \frac{df(p)}{dp}\frac{dp}{dx}. \tag{126}$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (126) επί $\frac{dx}{dp}$, παίρνουμε τη Δ.Ε.

$$(p - \phi(p))\frac{dx}{dp} - x\frac{d\phi(p)}{dp} - \frac{df(p)}{dp} = 0. \tag{127}$$

Η (127) είναι μια γραμμική Δ.Ε. για την $x = x(p)$ και η λύση της, βάσει του τύπου (39), θα είναι της μορφής

$$x = x(p, c). \tag{128}$$

Οι εξισώσεις (125) και (128) δίνουν τη γενική λύση της (124) σε παραμετρική μορφή. Αν μπορούμε να απαλείψουμε το p από τις παραμετρικές εξισώσεις της λύσης, παίρνουμε τη λύση στη μορφή

$$\Phi(x,y,c)=0 \quad \text{ή} \quad y=y(x,c).$$

Αν υπάρχουν ιδιάζουσες λύσεις της (124), μπορούμε να τις βρούμε από τη (126) σύμφωνα με όσα είπαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Παράδειγμα : Η εξίσωση

$$y=x\,y'^2+y'^2 \tag{129}$$

είναι τύπου Lagrange[19]. Θέτουμε $y'=p$ και τη γράφουμε ως

$$y=xp^2+p^2. \tag{130}$$

Παραγωγίζοντας ως προς x την τελευταία αυτή σχέση και πολλαπλασιάζοντας με dx/dp, καταλήγουμε στη γραμμική Δ.Ε. για τη $x=x(p)$

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p-1}x+\frac{2}{p-1}=0, \quad (p\neq 0, \quad p\neq 1), \tag{131}$$

με γενική λύση τη

$$x=\frac{c}{(p-1)^2}-1. \tag{132}$$

Απαλείφοντας το p μεταξύ των (130) και (132), βρίσκουμε

$$y=(\sqrt{c}+\sqrt{(x+1)})^2, \quad (x\geq -1, \quad c\geq 0). \tag{133}$$

Είναι απαραίτητη κάποια ξεχωριστή μελέτη των περιπτώσεων $p=0$ και $p=1$, δηλαδή των τιμών που εξαιρούνται στη (131). Η $p=\frac{dy}{dx}=0$ δίνει $y=c'=0$ (ιδιάζουσα λύση), ενώ η $p=\frac{dy}{dx}=1$ δίνει $y=x+c'=x+1$, που προκύπτει από τη γενική λύση (133) για $c=0$. ◀

---

[19] Η (129) μπορεί να λυθεί και ως Δ.Ε. με χωριζόμενες μεταβλητές.

0.8 Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η γενική λύση των Δ.Ε. χωριζόμενων μεταβλητών:

   α) $y' = x^2/y, \;\; y \neq 0$

   $$\left[\;\; \tfrac{y^2}{2} - \tfrac{x^3}{3} = c \text{ ή } y = \pm\sqrt{\tfrac{2}{3}x^3 + c} \;\;\right]$$

   β) $y' = -\dfrac{x\,y^2}{1-x}, \;\; x \neq 1, y \neq 0.$

   $$\left[\;\; y = -(\ln|1-x| + x - c)^{-1} \;\;\right]$$

   γ) $y' = x(y^2+1).$

   $$\left[\;\; y = \tan\left(\tfrac{x^2}{2} + c\right) \;\;\right]$$

   δ) $y' = \dfrac{y^2+1}{x^2+1}$

   $$\left[\;\; \arctan(x) = \arctan(y) + c \text{ ή } y = \tfrac{x-c}{1+cx} \;\;\right]$$

2. Να βρεθεί η γενική λύση των Δ.Ε. :

   α) $y' = -(x-y)^2$

   $$\left[\;\; y = x - \tan(x+c) \;\;\right]$$

   β) $y' = e^{x+y}$

   $$\left[\;\; y = -\ln|c - e^x| \;\;\right]$$

3. Να βρεθεί η μερική λύση για τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

   α) $y' + y = 0, \;\; y(1) = 1$

   $$\left[\;\; y = e^{1-x} \;\;\right]$$

   β) $y' = x\sqrt{1-y}, \;\; y(\sqrt{2}) = \frac{3}{4}$

   $$\left[\;\; y = \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{16} \text{ με } -2 \leq x \leq 2 \;\;\right]$$

4. Να βρεθεί η γενική λύση των ομογενών Δ.Ε. :

α) $y' = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}, \;\; x > 0$

$$\left[\;\; y = \tfrac{c^2 - x^2}{2c} \;\; \right]$$

β) $y' = \frac{1}{x}\left(y + \sqrt{xy}\right), \;\; x > 0, \, y > 0$

$$\left[\;\; y = \tfrac{x}{4}\ln^2(c\,x), \;\; c > 0 \;\; \right]$$

γ) $y' = \dfrac{x^3 + y^3}{x\,y^2}$

$$\left[\;\; y = x\sqrt[3]{3\ln(c\,x)}, \;\; c\,x > 0 \;\; \right]$$

5. Να βρεθεί η μερική λύση της Δ.Ε. $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{x\,y}$ που τέμνει κάθετα την ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

$$\left[\;\; y^2 = 2x^2\left(\ln\left|\tfrac{3x}{2}\right| + \tfrac{1}{2}\right) \;\; \right]$$

6. Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της μονοπαραμετρικής οικογένειας των κύκλων $x^2 + y^2 = a\,x, \;\; a \in \mathbb{R}$.

$$\left[\;\; \text{οι κύκλοι } x^2 + y^2 = b\,y, \;\; b \in \mathbb{R} \;\; \right]$$

7. Να βρεθεί η γενική λύση της $y' = -\dfrac{2x + 3y + 1}{3x + 4y + 1}$.

$$\left[\;\; x^2 + 2y^2 + 3xy + x + y = c \;\; \right]$$

8. Να βρεθεί η γενική λύση των γραμμικών Δ.Ε. :

α) $xy' - y - x^2 = 0, \, x \neq 0$

$$\left[\;\; y = c\,x + x^2 \;\; \right]$$

β) $y' + \dfrac{1 - 2x}{x^2}y = 1, \, x \neq 0$

$$\left[\;\; y = x^2(1 + c\,e^{1/x}) \;\; \right]$$

9. Να βρεθεί η μερική λύση της γραμμικής Δ.Ε. $xy' - 2y + x = 0$, $x \neq 0$, που εφάπτεται στην ευθεία $x + y - 1 = 0$. Σε ποιο σημείο γίνεται η επαφή;

[$y = -x^2 + x$, σημείο επαφής το (1,0)]

10. Βρείτε τη γενική λύση των παρακάτω εξισώσεων Bernoulli:

α) $y' + xy + xy^2 = 0$

[$y = \left(c\,e^{x^2/2} - 1\right)^{-1}$]

β) $y' - y = \dfrac{e^x}{y}$

[$y = \pm\sqrt{c\,e^{2x} - 2e^x}$]

11. Βρείτε τη γενική λύση των παρακάτω εξισώσεων Riccati :

α) $y' = x^2 - 2 + 2xy + y^2$, με μερική λύση $\psi(x) = 1 - x$,

[$y = 1 - x - \frac{2ce^{2x}}{\frac{1}{2}+ce^{2x}}$]

β) $y' + y^2 = \dfrac{1}{x^4}$, $x \neq 0$, με μερική λύση της μορφής $\psi(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}$

[$\psi(x) = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\frac{2ce^{-2/x}+1}{2ce^{-2/x}-1}$]

12. Δείξτε ότι οι παρακάτω Δ.Ε. είναι πλήρεις και βρείτε τη γενική λύση τους:

α) $2xy\,dx + (x^2 + y^2)dy = 0$

[$3x^2y + y^3 = c$]

β) $\dfrac{xy+1}{y}dy + \dfrac{2y-x}{y^2}dy = 0$, $y \neq 0$

[$\frac{x^2}{2} + 2\log|y| + \frac{x}{y} = c$]

γ) $(y\sin x - x^2)dx - \cos x dy = 0$, $x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

[$y = \frac{c - x^3/3}{\cos x}$]

13. Βρείτε έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα για τις παρακάτω Δ.Ε. που να τις κάνει πλήρεις και στη συνέχεια βρείτε τη γενική λύση τους:

α) $xydx + (1+x^2)dy = 0$

$$[\quad R(y) = y, \quad y^2(1+x^2) = c \quad]$$

β) $(x^2 + y^2 + x)\,dx + xy\,dy = 0$

$$[\quad R(x) = x, \quad x^4 + 2x^2y^2 + 4x^3/3 = c \quad]$$

γ) $(x^4y^2 - y)dx + (x^2y^4 - x)dy = 0$

$$[\quad R(x,y) = (xy)^{-2}, \quad x^4y + xy^4 - cxy + 3 = 0 \quad]$$

14. Λύστε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

α) $(1+e^x)yy' = e^x, \;\; y(0) = 1$

$$[\quad y^2 = 1 + \ln\left(\tfrac{1+e^x}{2}\right)^2 \quad]$$

β) $(x+y)^2y' = 1, \;\; y(0) = 0$

$$[\quad x = \tan(y) - y \quad]$$

γ) $y' = (x-y)/(x+y), \;\; y(1) = 0$

$$[\quad y = -x + \sqrt{-1+2x^2} \quad]$$

δ) $y' - y\cos x = \sin 2x, \;\; y(0) = \frac{1}{2}$

$$[\quad y = \tfrac{5}{2}e^{\sin x} - 2(1+\sin x) \quad]$$

ε) $xy' + y = y^2 \ln x, \;\; y(1) = 1$

$$[\quad y = (1+\ln x)^{-1} \quad]$$

στ) $2xy\ln y\,dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})\,dy = 0, \;\; y(0) = \sqrt{3}$

$$[\quad 3x^2\ln y + (y^2+1)^{3/2} = 8 \quad]$$

ζ) $y' = (x+y^2)/(2xy), \;\; y(1) = 1$

[$y = \sqrt{x(\ln x + 1)}, \quad x > \frac{1}{e}$]

15. Με κατάλληλο μετασχηματισμό, μετατρέψτε τη Δ.Ε. $xy' + y + x(1 - x^2y^2)^{1/2} = 0$ σε χωριζόμενων μεταβλητών και βρείτε τη γενική λύση της (παρατηρήστε ότι η παράσταση $xy' + y$ είναι η παράγωγος του γινομένου xy).

[$y = \sin(c - \frac{1}{2}x^2)/x$]

16. Βρείτε τη γενική λύση της Δ.Ε. $y' + \sin y + x\cos y + x = 0$ καθώς και τη μερική λύση που περνάει από το σημείο $(0, \frac{\pi}{2})$ (βοήθεια: γράψτε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με όρισμα $\frac{y}{2}$ και χρησιμοποιήσετε τον μετασχηματισμό $z = \tan\left(\frac{y}{2}\right)$.

[$\tan\frac{y}{2} = 1 - x + ce^{-x}$, $y_\mu = 2\arctan(1 - x)$]

17. Δίνεται η Δ.Ε. $(x^3 - y)dx + (x^2y + x)dy = 0$. Αναπτύξτε τη Δ.Ε. σε μορφή με όρους $xdx + ydy$ και $xdy - ydx$ και, χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, βρείτε τη γενική λύση.

[$x^2 + y^2 = -2\frac{y}{x} + c$]

18. Βρείτε τις λύσεις των παρακάτω προβλημάτων αρχικών τιμών:

α) $y' = |x - y|, \quad y(0) = 1$

[$y = x + 1$]

β) $y' = \max(x, y), \quad y(0) = 0$

[$y = \frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le 2$]

19. Να λυθούν οι εξισώσεις του Clairaut

α) $y = x\,y' + \dfrac{\alpha}{y'^2}$

[$y = c\,x + \frac{\alpha}{c^2}$, και $y^3 = \frac{27\alpha}{4}x^2$]

β) $y = x\,y' + \alpha\sqrt{1 + y'^2}$

[$y = c\,x + \alpha\sqrt{1 + c^2}$, και $y^2 + x^2 = \alpha^2$]

20. Να βρεθεί η λύση $x = x(p)$, $y = y(p)$ των παρακάτω προβλημάτων αρχικών τιμών:

α) $y' + \ln|y'| = y$, $y(1) = 1$

$$[\ \ x = \ln|p| - \tfrac{1}{p} + 2,\ y = p + \ln|p| \ \ ]$$

β) $y'\,e^{-y'} - x = 0$, $y(0) = 0$

$$[\ \ x = p\,e^{-p},\ y = e^{-p}(p^2 + p + 1) + c,\ \ c = -1, 0 \ \ ]$$

21. Ο ρυθμός με τον οποίο διασπώνται οι πυρήνες μιας ραδιενεργούς ουσίας είναι ανάλογος (με συντελεστή αναλογίας ίσο με $k > 0$)[20] του αριθμού των πυρήνων που δεν έχουν ακόμη διασπαστεί. Αν σε ένα δείγμα έχουν διασπαστεί οι μισοί πυρήνες σε χρόνο $t = 15$ αιώνες (*χρόνος ημίσειας ζωής*), τι ποσοστό του υλικού θα έχει απομείνει σε 45 αιώνες;

[$\frac{1}{8}$ ή το 12.5% $\quad (N = N_0 e^{-kt})$]

22. Ένα σφαιρικό κομμάτι ναφθαλίνης εξαχνώνεται με ταχύτητα (μετρούμενη σε gr/sec) ανάλογη της επιφάνειας του σφαιρικού κομματιού σε κάθε χρονική στιγμή. Αν σε χρόνο $t = T_0$ εξαχνώνεται η μισή μάζα, σε πόσο χρόνο θα εξαχνωθεί όλη η ναφθαλίνη;

$$[\ \ T = \frac{2T_0}{2 - 2^{2/3}} \ \ ]$$

23. Η ταχύτητα με την οποία ψύχεται ή θερμαίνεται ένα σώμα είναι ανάλογη της διαφοράς θερμοκρασίας του σώματος και του περιβάλλοντος (Νόμος θέρμανσης - ψύξης του Νεύτωνα). α) Αν θ_0 είναι η αρχική θερμοκρασία και θ_π η θερμοκρασία του περιβάλλοντος, γράψτε τη Δ.Ε. που περιγράφει τη μεταβολή της θερμοκρασίας θ και βρείτε τη λύση της. β) Ένα σώμα θερμοκρασίας $80°$ τοποθετείται σε περιβάλλον μεγάλης θερμοχωρητικότητας που διατηρεί σταθερή θερμοκρασία $50°$. Στα πρώτα $5min$ η θερμοκρασία του σώματος έπεσε στους $70°$. Πόση θα γίνει η θερμοκρασία του στο τέλος του επόμενου πεντάλεπτου;

[α) $\dot{\theta} = -k(\theta - \theta_\pi)$, $\theta = \theta_\pi + (\theta_\pi - \theta_\pi)e^{-kt}$, $\quad$ β)=63.3°]

[20] Στη συνέχεια το σύμβολο k θα χρησιμοποιείται πάντα ως η απόλυτη τιμή ενός συντελεστή αναλογίας

24. Μια δεξαμενή περιέχει αρχικά 50 m^3 καθαρό νερό. Σε χρόνο $t = 0$ αρχίζει να χύνεται στη δεξαμενή αλατόνερο, περιεκτικότητας σε αλάτι 2 Kgr/m^3, με ρυθμό 3 m^3/min. Συγχρόνως, από σωλήνα στη βάση της δεξαμενής, φεύγει αλατόνερο με τον ίδιο ρυθμό (3 m^3/min) έτσι ώστε ο όγκος του αλατόνερου στη δεξαμενή να είναι σταθερός (50 m^3). Το μίγμα ανακατεύεται συνεχώς στη δεξαμενή έτσι ώστε να διατηρείται ομογενές. Να βρεθεί η ποσότητα x του αλατιού που υπάρχει στη δεξαμενή ως συνάρτηση του χρόνου t.

[$x = 100\left(1 - e^{-\frac{3}{50}t}\right)$]

25. Ένα υλικό σημείο με μάζα m εκτοξεύεται από το έδαφος κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$. Αν στη διαδρομή δέχεται αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας, $\vec{R} = -k\vec{v}$, όπου $k > 0$ ο συντελεστής αναλογίας, βρείτε το χρόνο που θα χρειαστεί το σημείο για να φτάσει στο μέγιστο ύψος. Τι δίνει το αποτέλεσμα αυτό για $k \to 0$;

[$t = \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{k}{mg}v_0\right)$, $\lim_{k\to 0} t = \frac{v_0}{g}$]

26. Μια σταγόνα βροχής, με αρχική μάζα m_0 πέφτει μέσα σε ένα σύννεφο και η μάζα της αυξάνει με ρυθμό ανάλογο της μάζας της σε κάθε στιγμή. Αγνοώντας την αντίσταση του αέρα και λαμβάνοντας υπόψη μόνο το ομογενές πεδίο βαρύτητας, βρείτε την ταχύτητα με την οποία πέφτει η σταγόνα.

[$v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$]

27. Ζητείται μία καμπύλη $y = y(x)$, $x > 0$, που να περνάει από το σημείο (1,0) και να έχει την ιδιότητα : Σε κάθε σημείο της (x, y), η απόσταση $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ να ισούται με το κομμάτι του άξονα Oy που κόβει η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο (x, y).

[$y = \frac{1-x^2}{2}$, λύση της $y' = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$]

28. Ζητείται φθίνουσα καμπύλη $y = y(x)$, $x > 0$, που να περνάει από το σημείο (0,1) και να έχει την ιδιότητα : Η εφαπτομένη της σε τυχόν σημείο της Α(x, y) τέμνει τον άξονα Οx στο σημείο Β έτσι ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ, με Γ το σημείο $(x, 0)$, να έχει σταθερό εμβαδόν ίσο με 1.

[$y = \frac{1}{x/2+1}$]

29. Μέσα σε ένα χημικό διάλυμα, μια ουσία Α αντιδρά με την ουσία Β και παράγεται η ουσία Γ σύμφωνα με τη χημική αντίδραση Α+2Β→ Γ. Αν x είναι η ποσότητα (σε $moles$) της ουσίας Γ τη χρονική στιγμή t τότε η ταχύτητα μεταβολής της κατά την αντίδραση είναι ανάλογη των ποσοτήτων των ουσιών Α και Β που βρίσκονται εκείνη τη στιγμή στο διάλυμα. α) Αν αρχικά ($t = 0$) υπάρχουν στο διάλυμα X_A και X_B $moles$ των ουσιών Α και Β, αντίστοιχα, ποια διαφορική εξίσωση περιγράφει την ποσότητα $x = x(t)$ της ουσίας Γ; β) Αν $X_A = 1$ και $X_B = 1$ και μετά από χρόνο $t = 1$ min έχουν παραχθεί 1/4 $moles$ της ουσίας Γ, σε πόσο χρόνο θα παραχθούν 6/15 $moles$; γ) σε πόσο χρόνο η αντίδραση θα ολοκληρωθεί;

[α) $\frac{dx}{dt} = k(X_A - x)(X_B - 2x)$, β) $t = \ln\frac{3}{2}$, γ) ∞]

30. Σε μια πόλη πληθυσμού P επικρατεί μια επιδημία. Ο ρυθμός αύξησης των κατοίκων που προσβάλλονται είναι ανάλογος τόσο του αριθμού των κατοίκων που έχουν προσβληθεί όσο και του αριθμού των κατοίκων που δεν έχουν προσβληθεί. Κάποια χρονική στιγμή ($t = 0$) καταγράφεται ότι έχει προσβληθεί το 1/9 του πληθυσμού και μετά από 3 μήνες έχει προσβληθεί ο μισός πληθυσμός. Να βρεθεί και να σχεδιαστεί πως εξελίσσεται στο χρόνο ο αριθμός x των ατόμων που έχουν προσβληθεί.

[$x(t) = \frac{2^t}{8+2^t}P$]

31. Ένα κυλινδρικό βαρέλι με διατομή S και ύψος h έχει στο πυθμένα του μια μικρή κυκλική οπή με διατομή s. Στην αρχή το βαρέλι είναι γεμάτο με νερό. Σε πόσο χρόνο θα αδειάσει από τη στιγμή που αρχίζει η εκροή; (η ταχύτητα με την οποία φεύγει το νερό από την οπή είναι $\upsilon = \sqrt{2gz}$, όπου z το ύψος της στάθμης του νερού από το πυθμένα)

[$t_\alpha = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2h}{g}}$]

32. Η αρχαία κλεψύδρα ήταν ένα δοχείο (σε σχήμα επιφάνειας εκ περιστροφής περί τον κατακόρυφο άξονα Oz) με μια μικρή τρύπα στο κάτω μέρος O απ΄ όπου έτρεχε το νερό. Ποια θα έπρεπε να είναι η εξίσωση της επιφάνειας αυτής αν στο όργανο αυτό η στάθμη του νερού κατέβαινε ομαλά;

[$z = k(x^2 + y^2)^2$, $k =$σταθ.]

33. Στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου ($x > 0$, $y > 0$) ζητούμε μια καμπύλη $y = y(x)$ με την εξής ιδιότητα : το κομμάτι T_1T_2 της εφαπτομένης της καμπύλης στο τυχόν σημείο της (x, y) μεταξύ των θετικών ημιαξόνων Ox και Oy έχει σταθερό μήκος ίσο με l. Αποδείξτε ότι οδηγούμαστε σε μια εξίσωση Clairaut και βρείτε α) τη γενική λύση και β) την ιδιάζουσα λύση.

[α) $y = c\,x - \frac{l\,c}{\sqrt{1+c^2}}$, $c =$σταθ. β) $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$]