Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις

1.1 Ορισμοί

Ας θεωρήσουμε μια πραγματική συνάρτηση $y = y(x) \in \mathbb{R}$ μίας πραγματικής μεταβλητής $x \in \mathbb{R}$ και μια εξίσωση της μορφής

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^\nu y}{dx^\nu}) = 0, \quad \nu \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

στην οποία εμφανίζεται η ανεξάρτητη μεταβλητή x, η άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ και τουλάχιστον μία παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης $y(x)$ πρώτης ή και ανώτερης τάξης. Μια τέτοια εξίσωση λέγεται **συνήθης διαφορική εξίσωση**. Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις είναι π.χ. οι εξής:

$$y''' + y' \sin x + y^2 + xy^5 = 0, \tag{1.2}$$

$$y'^2 + xy^2 + x^3 = 0, \tag{1.3}$$

όπου για ευκολία θέσαμε $y' = \frac{dy}{dx}$ και $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$. Εν' γένει θα χρησιμοποιούμε τους τόνους για τον συμβολισμό των παραγώγων ή, για την παράγωγο ν τάξης $d^\nu y/dx^\nu$, θα γράφουμε $y^{(\nu)}$.

Με τον όρο *συνήθεις* διακρίνουμε τις διαφορικές εξισώσεις της μορφής (1.1) από τις *διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους*, τις οποίες θα μελετήσουμε στο Κεφάλαιο ;;. Θα περιοριστούμε εδώ να αναφέρουμε ότι οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους είναι σχέσεις μεταξύ δύο ή περισσοτέρων ανεξάρτητων μεταβλητών, $x, y, \dots$, κ.τ.λ., μιας άγνωστης συνάρτησης z των μεταβλητών αυτών και διαφόρων μερικών παραγώγων τής z ως προς τις μεταβλητές $x, y, \dots$, κ.τ.λ., όπως π.χ. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, κ.ο.κ. Έτσι, για παράδειγμα, η εξίσωση

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \sin x \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

είναι μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Άγνωστη και ζητούμενη σ' αυτή την εξίσωση είναι η συνάρτηση $z = z(x, y)$.

Στα επόμενα θα καλούμε τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις απλώς διαφορικές εξισώσεις ή εξισώσεις και συχνά θα γράφουμε μόνο «Δ.Ε.»

Από μια Δ.Ε. όπως η (1.1) είναι δυνατόν να απουσιάζει είτε η ανεξάρτητη μεταβλητή x είτε ακόμη και η ζητούμενη συνάρτηση $y = y(x)$, οπωσδήποτε όμως πρέπει να εμφανίζεται μία τουλάχιστον παράγωγος της $y = y(x)$. Επίσης, η εξίσωση δεν πρέπει να είναι τετριμμένη, δηλαδή να μην ικανοποιείται ταυτοτικά για κάθε συνάρτηση $y = y(x)$, όπως π.χ. η

$$(y' - x)^2 - x^2 - y'^2 + 2xy' = 0,$$

ή να μην ορίζεται σε κανέναν τόπο $\mathcal{T} = \{(x, y)\} \in \mathbb{R}^2$, όπως π.χ. η

$$y'^2 + (xy)^2 = -1.$$

Βέβαια, η παραπάνω εξίσωση δεν είναι τετριμμένη αν αναζητούμε μιγαδικές λύσεις $y = y(x)$ της πραγματικής μεταβλητής x.

Ο φυσικός αριθμός που δηλώνει την υψηλότερη παράγωγο που εμφανίζεται σε μια Δ.Ε. καλείται **τάξη** της διαφορικής εξίσωσης. Έτσι, η Δ.Ε. (1.2) είναι τρίτης τάξης διότι σ' αυτή εμφανίζεται η y''', ενώ η Δ.Ε. (1.3) είναι πρώτης τάξης.

Η σχέση

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.4}$$

παριστάνει τη γενική μορφή μιας Δ.Ε. πρώτης τάξης. Η (1.4) είναι γραμμένη στη λεγόμενη *πεπλεγμένη* μορφή. Αν βέβαια ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος των πεπλεγμένων συναρτήσεων και μπορούμε να λύσουμε την (1.4) ως προς το y', τότε η Δ.Ε. γράφεται στη *λυμένη* μορφή, δηλαδή την

$$y' = f(x, y) \tag{1.5}$$

με τη συνάρτηση $f(x, y)$ μονότιμα ορισμένη και συνεχή στον τόπο $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^2$. Είναι επίσης δυνατό — και χωρίς να ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος των πεπλεγμένων συναρτήσεων — να προκύψουν από τη σχέση (1.4) μία ή περισσότερες Δ.Ε. στη λυμένη μορφή (1.5). Έτσι, για παράδειγμα, από την (1.3) προκύπτουν στη λυμένη μορφή οι Δ.Ε.

$$y' = \sqrt{-x(x^2 + y^2)} \qquad \text{και} \qquad y' = -\sqrt{-x(x^2 + y^2)},$$

με τα δεύτερα μέλη τους συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς στο ημιεπίπεδο $x \leq 0$.

Έστω ότι το αριστερό μέλος της Δ.Ε. (1.1) είναι πολυώνυμο βαθμού k ως προς την παράγωγο $\frac{d^\nu y}{dx^\nu}$ της πιο υψηλής τάξης ν. Ο αριθμός k ορίζεται ως ο **βαθμός** της Δ.Ε. (1.1). Έτσι π.χ. η εξίσωση

$$xy''^2 + y'^3 = 0$$

είναι δεύτερης τάξης και δευτέρου βαθμού. Αντίστοιχα, η τρίτης τάξης εξίσωση (1.2) είναι πρώτου βαθμού ενώ η πρώτης τάξης εξίσωση (1.3) είναι δευτέρου βαθμού. Δεν ορίζεται βέβαια βαθμός σε μια Δ.Ε. όπως η

$$y'' + \ln y'' + xy'^2 = 0 \tag{1.6}$$

διότι το αριστερό μέλος τής (1.6) δεν είναι πολυώνυμο ως προς y''. Πάντως, η (1.6) είναι δεύτερης τάξης.

1.2 Λύσεις διαφορικής εξίσωσης

Ονομάζουμε **λύση** της διαφορικής εξίσωσης (1.1), στο διάστημα $\mathcal{I} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, κάθε συνάρτηση

$$y = \phi(x), \qquad x \in \mathcal{I}, \tag{1.7}$$

που ικανοποιεί ταυτοτικά την εξίσωση, δηλαδή

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \ldots, \phi^{\nu}(x)) = 0, \qquad \forall x \in \mathcal{I}.$$

Η λύση (1.7) εκφράζεται γεωμετρικά με μια καμπύλη στο επίπεδο Oxy, γι' αυτό και οι λύσεις μιας Δ.Ε. καλούνται πολλές φορές *καμπύλεσ-λύσεις*.

Για παράδειγμα, η Δ.Ε. 2ης τάξης

$$xy'' + y' = 0, \qquad x \neq 0, \tag{1.8}$$

έχει ως λύση την $y = \ln |x|$, όπως μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε αν την αντικαταστήσουμε στην (1.8). Επίσης, λύση της (1.8) αποτελεί για παράδειγμα και η συνάρτηση $y = 1 + 3 \ln |x|$, και το ίδιο ισχύει, όπως μπορεί να επαληθευτεί, για κάθε συνάρτηση της μορφής

$$y = c_1 + c_2 \ln |x|, \qquad x \neq 0, \tag{1.9}$$

όπου c_1 και c_2 είναι **αυθαίρετες σταθερές**.

Γενικά, η εύρεση μιας λύσης $y = \phi(x)$ συνίσταται στην «απαλοιφή» των παραγώγων της $y = y(x)$ στην εξίσωση (1.1). Μια τέτοια απαλοιφή μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω *ολοκληρώσεων*. Έστω, για παράδειγμα, η απλή περίπτωση της εξίσωσης

$$y^{(\nu)} = f(x). \tag{1.10}$$

Μπορούμε να βρούμε τη λύση της με διαδοχικές ολοκληρώσεις. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{gathered} y^{(\nu-1)} = \int f(x)dx = \sigma_1(x) + c_1 \\ y^{(\nu-2)} = \int (\sigma_1(x) + c_1)\, dx = \sigma_2(x) + c_1 x + c_2 \\ \cdots \end{gathered}$$

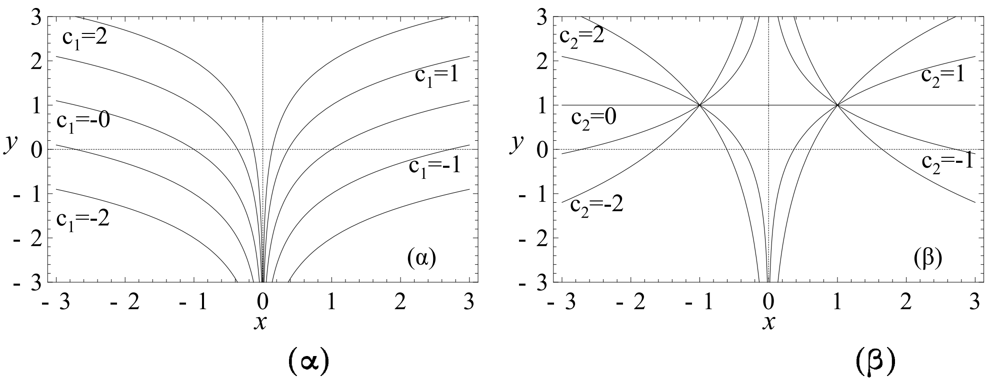
κ.ο.κ., μέχρις ότου φθάσουμε να βρούμε τη λύση

$$y = \sigma_\nu(x) + \frac{c_1}{(\nu-1)!}x^{\nu-1} + \frac{c_2}{(\nu-2)!}x^{\nu-2} + \ldots + c_\nu,$$

η οποία, με *επαναπροσδιορισμό των αυθαίρετων σταθερών*, γράφεται

$$y = \sigma_\nu(x) + c_1 x^{\nu-1} + c_2 x^{\nu-2} + \ldots + c_\nu. \tag{1.11}$$

Από την παραπάνω διαδικασία, παρατηρούμε ότι σε κάθε ολοκλήρωση η τάξη της Δ.Ε. μειώνεται κατά ένα ενώ εμφανίζεται και μια νέα αυθαίρετη σταθερά. Έτσι, μετά από ν ολοκληρώσεις παίρνουμε τη λύση η οποία περιέχει ν αυθαίρετες σταθερές. Αν θέσουμε συγκεκριμένες πραγματικές τιμές στις αυθαίρετες σταθερές τής λύσης, παίρνουμε μια μοναδική καμπύλη-λύση. Έτσι, η λύση (1.11) εκφράζει μια ν-**παραμετρική οικογένεια καμπυλών**. Μερικές από τις καμπύλεσ-λύσεις που δίνονται από τη σχέση (1.9) για τη Δ.Ε. (1.8) παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Μερικές από τις καμπύλεσ-λύσεις (1.9) της Δ.Ε. (1.8). (α) για $c_2 = 1$ και για τις ενδεικτικές τιμές c_1. (β) για $c_1 = 1$ και για τις ενδεικτικές τιμές c_2.

Σημείωση. Επειδή ενδιαφερόμαστε για πραγματικές λύσεις, οι αυθαίρετες σταθερές ανήκουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Εν' γένει, μπορούν να παίρνουν τιμές σε όλο το σύνολο $\mathbb{R}$, όμως υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι τιμές τους ενδεχομένως να περιορίζονται λόγω της μορφής της λύσης. Για παράδειγμα, η εξίσωση $y' = -x/y$ έχει λύσεις τα μέλη της μονοπαραμετρικής οικογένειας ομόκεντρων κύκλων $x^2+y^2 = c$ και προφανώς πρέπει να είναι $c > 0$. Αν $\bar{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_\nu\}$ είναι μια ν-άδα αυθαίρετων σταθερών της λύσης, θα θεωρούμε ότι $\bar{C} \in \mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^\nu$, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένα σύνολο τιμών για τις αυθαίρετες σταθερές.

Σημείωση. Πολλές φορές, η λύση που προκύπτει δίνεται στην πεπλεγμένη μορφή $\Phi(x, y) = 0$ και καλείται **ολοκλήρωμα** της Δ.Ε. Για παράδειγμα ας εξετάσουμε την εξίσωση

$$xy' \ln\left(\frac{x}{y}\right) - y = 0, \qquad xy > 0. \tag{1.12}$$

Το ολοκλήρωμα (λύση) αυτής της εξίσωσης είναι το

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = 1 + cy, \tag{1.13}$$

όπου c είναι η αυθαίρετη σταθερά. Η λύση δηλαδή δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή, αν και στην περίπτωσή μας η εξίσωση (1.12) είναι στη λυμένη μορφή. Η επαλήθευση της παραπάνω λύσης μπορεί να γίνει ως εξής: Παραγωγίζουμε την (1.13) και βρίσκουμε ότι

$$xy' = \frac{y}{1+cy}. \tag{1.14}$$

Αντικαθιστούμε το xy' από την (1.14) και τον $\ln(x/y)$ από τη λύση (1.13) στη Δ.Ε. (1.12). Διαπιστώνουμε ότι αυτή ικανοποιείται ταυτοτικά.

1.3 Το αντίστροφο πρόβλημα

Με τον όρο **αντίστροφο πρόβλημα** εννοούμε την εύρεση μιας Δ.Ε. που έχει ως λύσεις μια δεδομένη ν-παραμετρική οικογένεια καμπυλών.

Ας θεωρήσουμε μία μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών

$$y = f(x, c), \tag{1.15}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά (η παράμετρος της οικογένειας) και ας διερωτηθούμε αν υπάρχει Δ.Ε. που να ικανοποιείται από όλες τις συναρτήσεις (1.15) για όλες τις επιτρεπτές τιμές των x και c. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι καταφατική αρκεί να συντρέχουν οι εξής δύο προϋποθέσεις:

(α) η συνάρτηση $f(x, c)$ στο δεξιό μέλος της (1.15) να είναι παραγωγίσιμη ως προς x και

(β) μία από τις σχέσεις (1.15) ή (1.16), που δίνεται στη συνέχεια, να λύνεται μονότιμα ως προς c.

Αν αυτά συμβαίνουν, η ζητούμενη Δ.Ε. βρίσκεται από την απαλοιφή του c μεταξύ της (1.15) και της

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x, c). \tag{1.16}$$

Αν λύνεται ως προς c η (1.15), προκύπτει

$$y' = f'\left(x, c(x, y)\right).$$

Αν λύνεται ως προς c η (1.16), προκύπτει

$$y = f\left(x, c(x, y')\right).$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι, εν' γένει, μια *μονοπαραμετρική* οικογένεια καμπυλών (1.15) μπορεί να προκύψει ως λύση μιας διαφορικής εξίσωσης *πρώτης* τάξης.

Οι σκέψεις που παραθέσαμε παραπάνω μπορούν να επαναληφθούν για μια πολυπαραμετρική οικογένεια καμπυλών του επιπέδου. Ας πάρουμε για παράδειγμα τη διπαραμετρική οικογένεια όλων των περιφερειών

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = 1, \tag{1.17}$$

με κέντρο σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες (α, β) και ακτίνα ίση με 1. Από την (1.17), με μια πρώτη παραγώγιση ως προς x έχουμε

$$(x-\alpha) + (y-\beta)y' = 0. \tag{1.18}$$

Ξαναπαραγωγίζοντας ως προς x παίρνουμε

$$1 + y'^2 + (y-\beta)y'' = 0. \tag{1.19}$$

Αν από τις εξισώσεις (1.17), (1.18) και (1.19) απαλείψουμε τα α και β, βρίσκουμε τη Δ.Ε. δεύτερης τάξης

$$y''^2 = (1 + y'^2)^3, \tag{1.20}$$

που έχει ως λύσεις τις καμπύλες (1.17).

Συμβαίνει μερικές φορές μια οικογένεια καμπυλών να φαίνεται π.χ. διπαραμετρική ενώ είναι ουσιαστικά μονοπαραμετρική. Έστω για παράδειγμα η οικογένεια που δίνεται από την εξίσωση

$$y^4 - (\alpha+\beta)xy^2 + \alpha\beta x^2. \tag{1.21}$$

Η (1.21) θα μπορούσε να γραφεί και στη μορφή

$$(y^2 - \alpha x)(y^2 - \beta x) = 0.$$

Κάθε μία από τις οικογένειες παραβολών $y^2 = \alpha x$ και $y^2 = \beta x$ (που ουσιαστικά είναι οι ίδιες), επομένως και η (1.21), είναι λύσεις της Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$y = 2xy'.$$

1.4 Κατηγορίες λύσεων: γενική, μερική και ιδιάζουσα λύση

Στην Ενότητα §1.2 ορίσαμε πότε μια συνάρτηση $y = \phi(x)$, $x \in \mathcal{I}$ αποτελεί λύση μιας Δ.Ε. και διαπιστώσαμε ότι, εν' γένει, δεν ορίζεται μόνο μία λύση αλλά ένα σύνολο λύσεων.

Μια ν-παραμετρική οικογένεια καμπυλών-λύσεων της Δ.Ε., που ορίζεται σε ένα διάστημα $\mathcal{I} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ και εκφράζεται με τη λυμένη μορφή

$$y = \phi(x; c_1, c_2, \ldots, c_\nu), \quad (c_1, c_2, \ldots, c_\nu) \in \mathcal{E}, \ \ \mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^\nu, \tag{1.22}$$

ή την πεπλεγμένη μορφή

$$\Phi(x, y; c_1, c_2, \ldots, c_\nu) = 0, \quad (c_1, c_2, \ldots, c_\nu) \in \mathcal{E}, \ \ \mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^\nu, \tag{1.23}$$

ονομάζεται **γενική λύση** της διαφορικής εξίσωσης. Για παράδειγμα, η Δ.Ε. 1ης τάξης

$$xy' - \frac{y'^2}{4} - y = 0, \tag{1.24}$$

έχει ως γενική λύση την μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών

$$y = cx - \frac{c^2}{4}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{1.25}$$

Κάθε μέλος της ν-παραμετρικής οικογένειας καμπυλών-λύσεων (1.22) ή (1.23) της Δ.Ε. καλείται **μερική λύση**. Δηλαδή, μια μερική λύση προκύπτει αν θέσουμε συγκεκριμένες τιμές στις αυθαίρετες σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$y = -2x - 1$$

αποτελεί μια μερική λύση της (1.24), η οποία προκύπτει από την (1.25) αν θέσουμε $c = -2$. Ομοίως, η σχέση

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = 1 + y$$

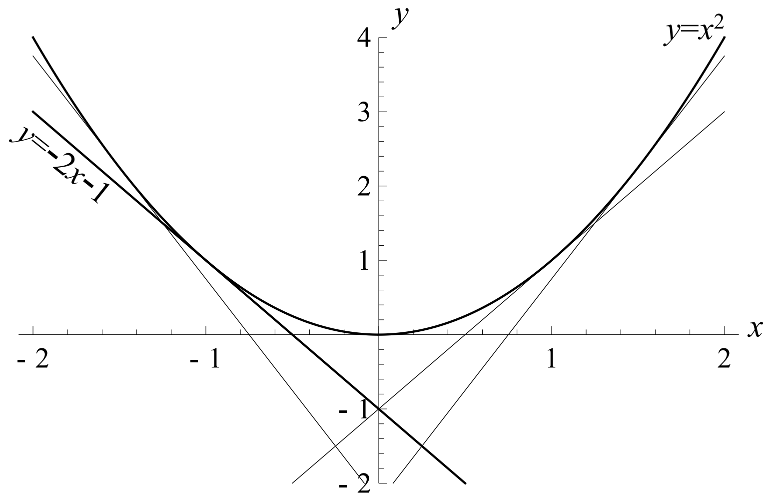
που προκύπτει από την (1.13) για $c = 1$, ορίζει μια συνάρτηση $y = y(x)$ η οποία δεν μπορεί βέβαια να βρεθεί σε λυμένη μορφή, ικανοποιεί όμως τη Δ.Ε. (1.12).

Τυχόν υπάρχουσα λύση η οποία δεν ανήκει στη ν-παραμετρική οικογένεια της γενικής λύσης καλείται **ιδιάζουσα λύση** της Δ.Ε. Οι ιδιάζουσες λύσεις αποτελούν σπάνιες και ασυνήθιστες λύσεις. Μπορούμε, για παράδειγμα, εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η (1.24) έχει ως λύση και τη συνάρτηση

$$y = x^2,$$

η οποία δεν είναι της μορφής (1.25) και άρα είναι ιδιάζουσα. Οι παραπάνω καμπύλεσ-λύσεις της (1.24) παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.2.

Οι ορισμοί που δώσαμε παραπάνω μπορεί να φαίνονται ασαφείς ή αντιφατικοί σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις διαφορικών εξισώσεων. Μπορούμε όμως να χειριζόμαστε τέτοιες ειδικές περιπτώσεις ακολουθώντας μεθόδους παρόμοιες με αυτές που παρουσιάζουμε στα επόμενα παραδείγματα.



Σχήμα 1.2: Λύσεις $y = y(x)$ της Δ.Ε. (1.24). Η μερική λύση $y = -2x - 1$, που αντιστοιχεί στη σταθερά $c = -2$, καθώς και η ιδιάζουσα λύση $y = x^2$ παρουσιάζονται με εντονότερες γραμμές.

Εξαμπλε : Η εξίσωση

$$y' = -2y^{3/2} \tag{1.26}$$

ικανοποιείται από όλες τις συναρτήσεις

$$y = \frac{1}{(x+c)^2}. \tag{1.27}$$

Αν η (1.27) θεωρηθεί ως η γενική λύση της (1.26), τότε η $y = 0$, που επίσης επαληθεύει τη Δ.Ε., πρέπει να είναι μια ιδιάζουσα λύση. Όμως μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι και η συνάρτηση

$$y = \frac{c^2}{(cx+1)^2} \tag{1.28}$$

είναι λύση της (1.26), $\forall c \in \mathbb{R}$. Αν θεωρήσουμε την (1.28) ως γενική λύση, τότε η $y = 0$ είναι μια μερική λύση της εξίσωσης για $c = 0$. Παρατηρήστε ότι η (1.27) προκύπτει από την απλοποίηση της (1.28) αν υποθέσουμε ότι $c \neq 0$.◄

Εξαμπλε : Για την εξίσωση 1ης τάξης και 2ου βαθμού

$$y'^2 - (y+2x)y' + 2xy = 0, \tag{1.29}$$

μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι οι συναρτήσεις[1]

$$y = x^2 + c$$

[1] Πρόκειται ουσιαστικά για τις λύσεις των δύο Δ.Ε. 1ης τάξης και 1ου βαθμού $y' = 2x$ και $y' = y$, οι οποίες είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας ως προς y' αλγεβρικής εξίσωσης (1.29)

και

$$y = ce^x$$

αποτελούν λύσεις της Δ.Ε. $\forall c \in \mathbb{R}$. Έχουμε λοιπόν δύο μονοπαραμετρικές οικογένειες καμπυλών-λύσεων που επαληθεύουν τη διαφορική εξίσωση. Μπορούμε να παραμείνουμε σε συμφωνία με τον ορισμό της γενικής λύσης που δώσαμε παραπάνω, αν συμπεριλάβουμε τις παραπάνω οικογένειες σε μια ενιαία (πεπλεγμένη) γραφή, όπως

$$(y - x^2 + c)(y - ce^x) = 0. \tag{1.30}$$

Τώρα η (1.30) μπορεί να θεωρηθεί ως η γενική λύση της (1.29). ◄

1.5 Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών

Πολλές φορές ζητάμε τη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης ν-τάξης που πληροί ταυτόχρονα και κάποιες *συμπληρωματικές συνθήκες*. Αυτές οι συμπληρωματικές συνθήκες μάς δίνουν τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε μερικές ή όλες τις αυθαίρετες σταθερές της γενικής λύσης.

Για παράδειγμα, θεωρούμε τη Δ.Ε. (1.8) και τις συνθήκες

$$y(1/2) = 0, \quad y'(1/2) = 1. \tag{1.31}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω συνθήκες στη γενική λύση (1.9) και στην παράγωγό της, που είναι η $y' = c_2/x$, παίρνουμε το αλγεβρικό σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \ln(1/2) &= 0 \\ 2c_2 &= 1 \end{aligned}$$

που δίνει $c_1 = \ln 2/2$ και $c_2 = 1/2$. Άρα η συνάρτηση που ικανοποιεί τη Δ.Ε. (1.8) καθώς και τις συνθήκες (1.31) είναι η

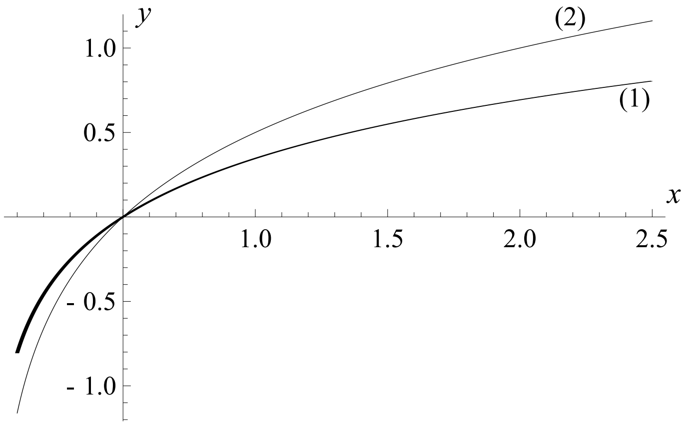
$$y = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln|x|}{2}. \tag{1.32}$$

Ένα δεύτερο παράδειγμα συμπληρωματικών συνθηκών για τη Δ.Ε. (1.8) είναι οι

$$y(1/2) = 0, \quad y(2) = 1. \tag{1.33}$$

Η αντικατάσταση της κάθε μιας από τις δύο συνθήκες (1.33) στη γενική λύση (1.9) μας δίνει το αλγεβρικό σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \ln(1/2) &= 0 \\ c_1 + c_2 \ln 2 &= 1, \end{aligned}$$



Σχήμα 1.3: Οι μερικές καμπύλεσ-λύσεις της Δ.Ε. (1.8) που πληρούν τις αρχικές συνθήκες (σχέση 1.31, καμπύλη 1) και τις συνοριακές συνθήκες (σχέση 1.33, καμπύλη 2).

από το οποίο παίρνουμε $c_1 = 1/2$ και $c_2 = 1/(2\ln 2)$. Άρα η συνάρτηση (1.9) που ικανοποιεί και τη Δ.Ε. και τις συνθήκες (1.33) είναι η

$$y = \frac{1}{2} + \frac{\ln|x|}{2\ln 2}. \tag{1.34}$$

Οι μερικές λύσεις (1.32) και (1.34) παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.3.

Αν ο αριθμός των συμπληρωματικών συνθηκών είναι ίσος με τον αριθμό των αυθαίρετων σταθερών (δηλαδή ίσος με την τάξη ν της Δ.Ε.), τότε μπορούμε εν' γένει να προσδιορίσουμε όλες τις αυθαίρετες σταθερές, καταλήγοντας έτσι σε μια *μερική* λύση.

Όταν οι συμπληρωματικές συνθήκες αναφέρονται σε τιμές τής συνάρτησης και των παραγώγων της για μία τιμή $x = x_0$ της ανεξάρτητης μεταβλητής — όπως π.χ. οι (1.31) — τότε καλούνται **αρχικές συνθήκες**. Έτσι, ένα σύνολο αρχικών συνθηκών δίνεται από τις σχέσεις

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad y''(x_0) = y_0'', \; \ldots, \; y^{(\nu-1)}(x_0) = y_0^{(\nu-1)}, \tag{1.35}$$

όπου ν η τάξη της Δ.Ε.

Όταν οι συμπληρωματικές συνθήκες αναφέρονται σε τιμές της συνάρτησης $y = y(x)$ για περισσότερες από μία τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής — όπως π.χ. οι (1.33) — τότε καλούνται **συνοριακές συνθήκες**. Έτσι, για παράδειγμα, ένα σύνολο συνοριακών συνθηκών δίνεται από τις σχέσεις

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad \ldots, \quad y(x_\nu) = y_\nu, \tag{1.36}$$

Μια δοσμένη Δ.Ε. μαζί με ένα σύνολο αρχικών ή συνοριακών συνθηκών αποτελούν ένα **πρόβλημα αρχικών ή συνοριακών τιμών**, αντίστοιχα.

1.6 Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων

Στην προηγούμενη ενότητα αναφερθήκαμε σε λύσεις που ικανοποιούν προβλήματα αρχικών ή συνοριακών τιμών. Όταν μας δίνεται μια διαφορική εξίσωση, η ύπαρξη και η μοναδικότητα τέτοιων λύσεων εξασφαλίζονται από ορισμένες προϋποθέσεις οι οποίες εκφράζονται από αντίστοιχα θεωρήματα.

Θεώρημα : Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1.37}$$

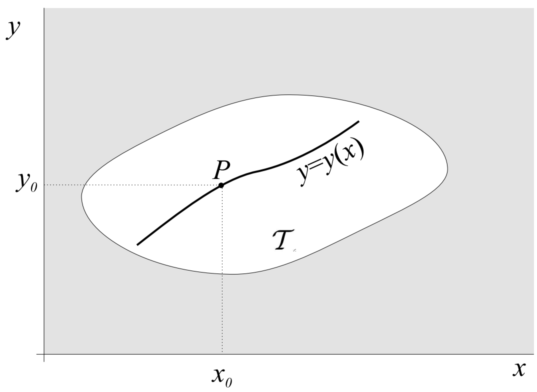
και ένας τόπος $\mathcal{T}$ του επιπέδου xy που περιέχει το σημείο $P(x_0, y_0)$. Αν ισχύουν οι συνθήκες:

(α) η $f(x, y)$ ορίζεται και είναι συνεχής στον τόπο $\mathcal{T}$,

(β) η $\partial f/\partial y$ ορίζεται και είναι συνεχής στον τόπο $\mathcal{T}$,

τότε από το σημείο $P(x_0, y_0)$, και κάθε άλλο σημείο του τόπου $\mathcal{T}$, περνάει μία και μοναδική καμπύλη-λύση της (1.37). ■

Το παραπάνω θεώρημα είναι γνωστό ως το θεώρημα του Cauchy[2]. Αν ισχύει μόνο η πρώτη συνθήκη, εξασφαλίζεται η ύπαρξη της λύσης αλλά όχι και η μοναδικότητά της, και το θεώρημα είναι γνωστό τότε ως θεώρημα του Peano.



Σχήμα 1.4: Η λύση $y = y(x)$ της $y' = f(x, y)$ που περνάει από το σημείο $P(x_0, y_0)$. Για να υπάρχει, πρέπει να ισχύει η συνθήκη (α), ενώ για να είναι και η μοναδική που περνάει από το P, πρέπει να ισχύει και η συνθήκη (β).

Στη συνέχεια δίνουμε δύο παραδείγματα εφαρμογής του παραπάνω θεωρήματος.

[2]Γενικεύσεις του παραπάνω θεωρήματος για εξισώσεις μεγαλύτερης τάξης καθώς και για συστήματα εξισώσεων δίνονται αντίστοιχα στις Ενότητες ;; και ;; των παραρτημάτων.

Εξαμπλε : Έστω η Δ.Ε.

$$y' = \frac{2(y-1)}{x}, \quad x \neq 0, \tag{1.38}$$

με γενική λύση την

$$y = cx^2 + 1. \tag{1.39}$$

Αν αναζητήσουμε μια μερική λύση που να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = y_0$, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η αρχική συνθήκη δεν ικανοποιείται από καμία λύση αν $y_0 \neq 1$. Αν πάλι $y_0 = 1$, τότε οι αρχική συνθήκη ικανοποιείται για κάθε λύση (βλέπε Σχήμα 1.5α). Εύκολα διαπιστώνουμε ότι για $x = 0$ δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες ύπαρξης και μοναδικότητας. ◀

Εξαμπλε : Θα ελέγξουμε αν ισχύουν οι συνθήκες ύπαρξης και μοναδικότητας για τη Δ.Ε.

$$y' = x\sqrt[3]{y}, \tag{1.40}$$

η οποία είναι λυμένης μορφής με $f(x,y) = xy^{1/3}$ και με τόπο ορισμού $\mathcal{T}$ όλο το $\mathbb{R}^2$.

Η $f(x,y)$ είναι συνεχής στον τόπο $\mathcal{T}$. Παρατηρούμε όμως ότι η

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

ορίζεται και είναι συνεχής σ' όλα τα σημεία του επιπέδου εκτός των σημείων του άξονα των x.

Επομένως, από κάθε σημείο του επιπέδου με $y \neq 0$ διέρχεται μία μόνο λύση της Δ.Ε. (1.40), αλλά το μονοσήμαντο των λύσεων δεν είναι εξασφαλισμένο σε σημεία όπου $y = 0$. Για παράδειγμα, η λύση

$$y = \left(\frac{(2+x^2)}{3}\right)^{3/2}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{1.41}$$

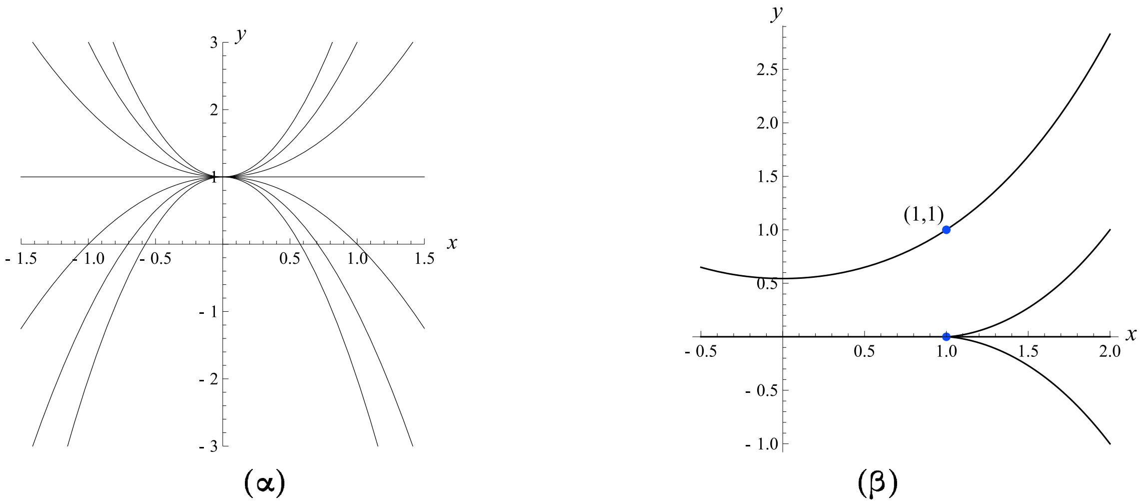
που περνάει από το σημείο $(1,1)$, είναι και η μόνη, σύμφωνα με το θεώρημα 1.6(α). Η λύση αυτή φαίνεται στο Σχήμα 1.5β. Στο ίδιο σχήμα φαίνεται πως από το σημείο $(1,0)$, στο οποίο δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος, περνούν τρεις λύσεις: η

$$y = 0, \quad -\infty < x < \infty, \tag{1.42}$$

και οι

$$y = \pm\left(\frac{x^2-1}{3}\right)^{3/2}, \quad 1 < x < \infty. \tag{1.43}$$

Το ότι οι συναρτήσεις (1.41), (1.42) και (1.43) είναι λύσεις της Δ.Ε. (1.40) μπορούμε εύκολα να το επαληθεύσουμε. ◀



Σχήμα 1.5: (α) Λύσεις της Δ.Ε. (1.38). Από τα σημεία του άξονα $x = 0$ δεν περνάει καμία λύση εκτός του σημείου (0,1), από το οποίο περνούν όλες οι λύσεις. (β) Μερικές λύσεις τής Δ.Ε. (1.40). Από το σημείο (1,1) περνάει μία λύση, ενώ από το σημείο (1,0) περνούν τρεις λύσεις (μαζί με την $y = 0$).

Το θεώρημα του Cauchy αποτελεί μια *ικανή συνθήκη* για την ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων της (1.37). Δεν αποτελεί όμως και αναγκαία συνθήκη. Έτσι, για παράδειγμα, το δεξιό μέλος της Δ.Ε.

$$y' = |y|$$

ορίζεται παντού και είναι συνεχές. Όμως, η μερική του παράγωγος ως προς y, δηλαδή η $\partial|y|/\partial y$, δεν είναι συνεχής για κάθε σημείο του άξονα $y = 0$. Ωστόσο, η γενική λύση τής Δ.Ε. είναι η

$$y = \begin{cases} ce^{x}, & c \geq 0 \\ ce^{-x}, & c < 0 \end{cases}$$

η οποία ορίζει για κάθε σημείο (x_0, y_0) μία και μοναδική λύση.

Απ' τη σκοπιά των μαθηματικών, δεν έχουμε κανέναν περιορισμό στο να δεχτούμε δύο ή και περισσότερες λύσεις μιας Δ.Ε. να περνούν από το ίδιο σημείο. Τι θα σήμαινε όμως κάτι τέτοιο από τη σκοπιά τής φυσικής; Πώς θα μπορούσε, λόγου χάρη, να δεχτεί κανείς δύο δυνατότητες για την εξέλιξη ενός φαινομένου, το οποίο περιγράφεται από μια Δ.Ε. της μορφής $\dot{x} = f(x,t)$ και που σε κάποια στιγμή $t = t_0$ αφορά ένα συγκεκριμένο σημείο $x = x_0$;

Είναι φανερό ότι πρέπει στις περιπτώσεις αυτές, με την απαραίτητη προσοχή και για *φυσικούς λόγους*, να κρατήσουμε μία μόνο λύση.

Χαρακτηριστικό είναι το εξής παράδειγμα: η ταχύτητα $\dot{z}$ με την οποία πέφτει προς το έδαφος ένα υλικό σημείο μάζας m, που το αφήνουμε από ύψος h με αρχική ταχύτητα μηδέν, είναι[3]

$$\frac{dz}{dt} = -\sqrt{2g(h-z)}, \quad 0 \le z \le h.$$

Λύση $z = z(t)$ της παραπάνω εξίσωσης (για αρχικές συνθήκες $z(0) = h$) είναι η γνωστή σχέση

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Ωστόσο, παρατηρούμε ότι η Δ.Ε. επαληθεύεται και από τη σταθερή συνάρτηση $z = h$. Από φυσική άποψη, αυτό το τελευταίο αποτέλεσμα θα σήμαινε ότι το υλικό σημείο *μένει συνεχώς* στη θέση $z = h$, παρ' ότι έλκεται προς το έδαφος και κανείς δεν το εμποδίζει να πέσει. Αυτή η λύση πρέπει φυσικά να αποκλεισθεί.

1.7 Διανυσματικό πεδίο διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης

Ας θεωρήσουμε και πάλι τη Δ.Ε. λυμένης μορφής.

$$y' = f(x,y), \tag{1.44}$$

με $f(x,y)$ συνάρτηση συνεχή και παραγωγίσιμη σε έναν τόπο $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^2$. Σε κάθε σημείο (x,y) του επιπέδου[4] xy ορίζουμε το **εφαρμοστό** διάνυσμα με κλίση $f(x,y)$:

$$\vec{\epsilon} = (1,\ f(x,y)). \tag{1.45}$$

Τα εφαρμοστά διανύσματα ορίζουν το *διανυσματικό πεδίο* της διαφορικής εξίσωσης.

Έστω ότι από το τυχόν σημείο (x,y) διέρχεται η καμπύλη-λύση $y = \phi(x)$. Σύμφωνα με την (1.44), αυτή η καμπύλη θα έχει κλίση ίση με $f(x,y)$, όση και το αντίστοιχο εφαρμοστό διάνυσμα. Άρα, συμπεραίνουμε ότι οι καμπύλεσ-λύσεις της (1.44) εφάπτονται στο διανυσματικό πεδίο της εξίσωσης. Επίσης, οι καμπύλες

$$f(x,y) = c \tag{1.46}$$

αντιπροσωπεύουν τα σημεία στο επίπεδο xy όπου τα εφαρμοστά διανύσματα έχουν την ίδια κλίση $\varphi =$ τοξεφ(c) και ονομάζονται **ισοκλινείς καμπύλες**.

Το Σχήμα 1.6 απεικονίζει, στον τόπο $\mathcal{T} = (-1,1) \times (1/2, 3/2)$, το διανυσματικό πεδίο $\vec{\epsilon} = (1, x/y)$ της Δ.Ε.

$$y' = \frac{x}{y}. \tag{1.47}$$

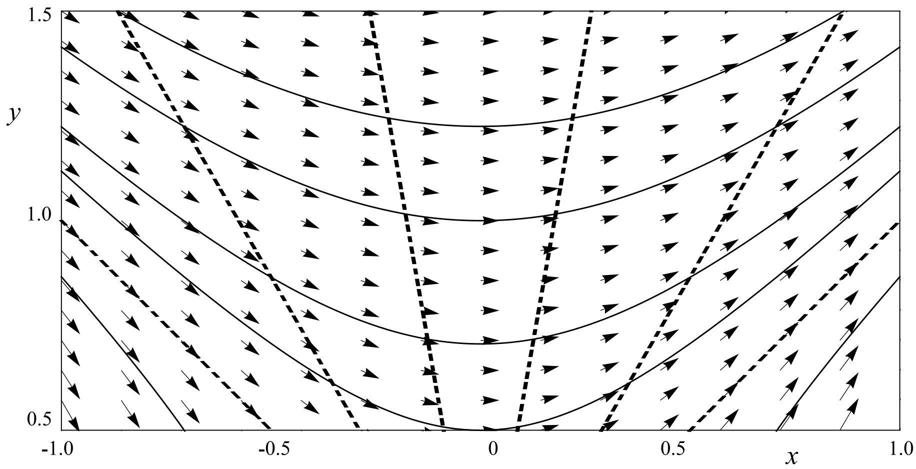
[3]Όπως προκύπτει από το γεγονός ότι σ' όλη τη διαδρομή η ολική του ενέργεια $E = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz = mgh$ μένει σταθερή.

[4]Το επίπεδο xy αποτελεί τον εκτεταμένο χώρο φάσεων της (1.44).

Οι καμπύλεσ-λύσεις της εξίσωσης (συνεχείς γραμμές στο σχήμα), που είναι οι υπερβολές

$$x^2 - y^2 = c, \tag{1.48}$$

κατευθύνονται παράλληλα με τα εφαρμοστά διανύσματα του διανυσματικού πεδίου. Οι ισοκλινείς τής (1.47) είναι οι ευθείες (διακεκομμένες στο σχήμα)



Σχήμα 1.6: Το διανυσματικό πεδίο της Δ.Ε. (1.47). Μερικές λύσεις και μερικές ισοκλινείς της εξίσωσης παρουσιάζονται με συνεχείς και διακεκομμένες γραμμές, αντίστοιχα.

$$y = \frac{x}{c'}. \tag{1.49}$$

Παρατηρήστε ότι όσες καμπύλεσ-λύσεις τέμνουν μια ισοκλινή, την τέμνουν όλες με την ίδια γωνία κλίσης.

1.8 Ορθογώνιες και ισογώνιες τροχιές

Ας θεωρήσουμε τώρα τη Δ.Ε. (1.44) με $f(x, y) \neq 0$, σε έναν τόπο $\mathcal{T}$ του επιπέδου xy, και τη Δ.Ε.

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}, \tag{1.50}$$

και ας υποθέσουμε ότι από κάθε σημείο (x, y) του τόπου $\mathcal{T}$ περνάει μία μόνο λύση της (1.44). Αυτό σημαίνει ότι, στον τόπο $\mathcal{T}$, για τη Δ.Ε. (1.44) συντρέχουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Cauchy. Τότε, σύμφωνα με το ίδιο θεώρημα, από κάθε σημείο (x, y) θα περνάει και μία μόνο λύση της Δ.Ε. (1.50).

Επίσης, στο τυχόν σημείο (x, y) αντιστοιχούν τα εφαρμοστά διανύσματα $\vec{\epsilon}_1 = (1, f(x, y))$ για την (1.44) και $\vec{\epsilon}_2 = (1, -1/f(x, y))$ για την (1.50), για τα οποία παρατηρούμε πως ισχύει

$$\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2 = 0.$$

Δηλαδή τα δύο εφαρμοστά διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους και, κατά συνέπεια, οι λύσεις των (1.44) και (1.50) που περνούν από το σημείο $(x, y) \in \mathcal{T}$ τέμνονται κάθετα. Για τον λόγο αυτόν, οι λύσεις της (1.44) καλούνται **ορθογώνιες τροχιές** των λύσεων της (1.50) και αντίστροφα.

Ας βρούμε για παράδειγμα τις ορθογώνιες τροχιές των ισοσκελών υπερβολών (1.48) που αποτελούν λύσεις της Δ.Ε. (1.47). Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι ορθογώνιες τροχιές των υπερβολών (1.48) θα είναι λύσεις της Δ.Ε.

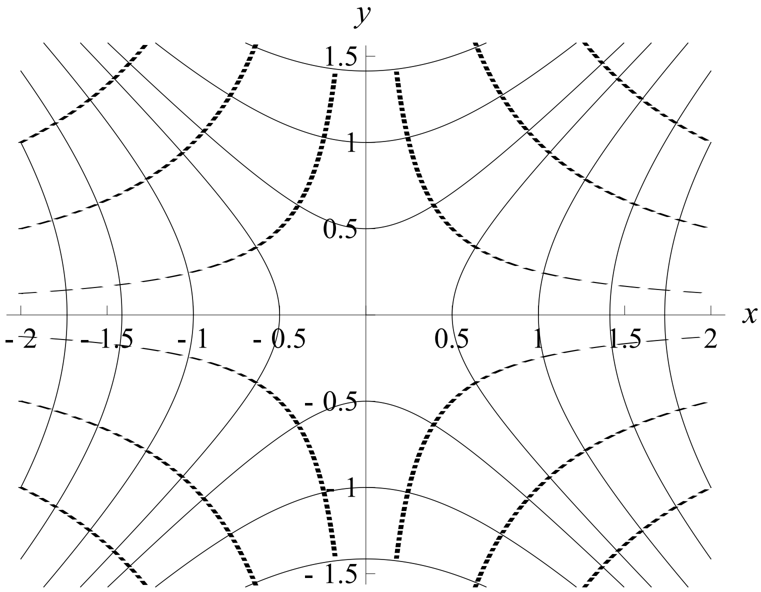
$$y' = -\frac{y}{x} \tag{1.51}$$

που, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, είναι οι υπερβολές της μορφής

$$x\,y = c. \tag{1.52}$$

Η οικογένεια καμπυλών-λύσεων (1.52) καθώς και η οικογένεια των ορθογώνιων τροχιών (1.48) παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.7.

Σε αντιστοιχία με τις ορθογώνιες τροχιές μπορούμε να ορίσουμε τις **ισογώνιες τροχιές**. Έστω δύο καμπύλες, $y = \phi_1(x)$ και $y = \phi_2(x)$, που τέμνονται σε κάποιο σημείο $P(x, y)$ — δείτε το Σχήμα 1.8. Ως γωνία των δύο καμπυλών ορίζουμε τη γωνία α των εφαπτομένων



Σχήμα 1.7: Οι ορθογώνιες τροχιές $x^2 - y^2 = c$ (συνεχείς) και $x\,y = c$ (διακεκομμένες) που αποτελούν λύσεις των Δ.Ε. (1.47) και (1.51), αντίστοιχα.

τους στο σημείο P, δηλαδή την $\alpha = \omega_2 - \omega_1$, για την οποία ισχύει η σχέση[5]

$$\tan\alpha = \frac{\tan\omega_2 - \tan\omega_1}{1 + \tan\omega_1 \tan\omega_2}.$$

Αν τώρα θεωρήσουμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών $y = \phi(x, c)$, που προκύπτει ως λύση της Δ.Ε.

$$y' = f(x, y),$$

τότε κάθε καμπύλη $y = y(x)$ που τέμνει όλες τις καμπύλες $y = \phi(x, c)$ με την ίδια γωνία α θα πρέπει να ικανοποιεί τη Δ.Ε.

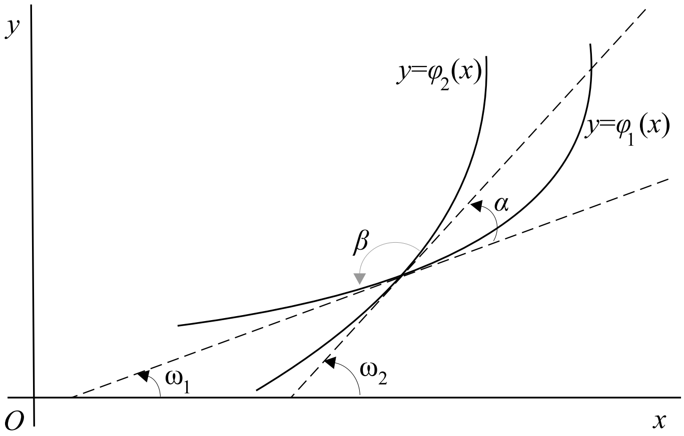
$$\tan\alpha = \frac{y' - f(x, y)}{1 + f(x, y)\, y'}.$$

Προφανώς οι ισογώνιες καμπύλες $y = y(x)$ της οικογένειας καμπυλών $y = \phi(x, c)$ αποτελούν και αυτές μια μονοπαραμετρική οικογένεια.

1.9 Αριθμητικές λύσεις

Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι, σε κάθε σημείο του εκτεταμένου χώρου φάσεων, οι καμπύλεσ-λύσεις της διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης (1.44) εφάπτονται στα εφαρμοστά διανύσματα $\vec{e} = (1, f(x, y))$. Θεωρώντας λοιπόν ένα αρχικό σημείο $P_0(x_0, y_0)$,

[5] Θα μπορούσαμε να ορίσουμε ως γωνία των δύο καμπυλών τη γωνία β αντί της α, οπότε θα είχαμε $\tan\beta = -\tan\alpha$



Σχήμα 1.8: Καμπύλεσ-λύσεις $y = \phi_1(x)$ και $y = \phi_2(x)$ οι οποίες τέμνονται υπό γωνία α ή β.

μπορούμε να χαράξουμε προσεγγιστικά ένα μικρό τμήμα της καμπύλησ-λύσης από το P_0 στο $P_1(x_1, y_1)$, με $x_1 = x_0 + h$.

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f(x_0, y_0) \quad ή \quad y_1 \approx y_0 + h\, f(x_0, y_0). \tag{1.53}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα ως αρχικό σημείο το $P_1(x_1, y_1)$, μπορούμε με την παραπάνω σχέση να βρούμε το $P_2(x_2, y_2)$, κ.ο.κ. (Σχήμα 1.9 α). Το σύνολο των σημείων P_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, αποτελούν την **αριθμητική λύση** της Δ.Ε. με αρχικές συνθήκες $y(x_0) = y_0$, η οποία, αν $h > 0$, ορίζεται σε ένα διάστημα $x_0 \leq x \leq x_{max}$. Αν οι υπολογισμοί γίνουν και για $h < 0$, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τη λύση σε οποιοδήποτε φραγμένο διάστημα $\mathcal{I} = (x_{min}, x_{max})$ με $x \in \mathcal{I}$.

Σημειώνουμε πως αν θέλουμε μια λύση που να αφορά κάποια άλλη αρχική συνθήκη, αυτή η υπολογιστική διαδικασία που ονομάζεται *προσέγγιση κατά Euler*, θα πρέπει να επαναληφθεί. Επίσης, η σχέση (1.53) μας δίνει σε κάθε βήμα την τιμή του y κατά προσέγγιση. Επομένως, σε κάθε υπολογισμό εισάγονται σφάλματα και η αριθμητική λύση απομακρύνεται, εν' γένει, από την αναλυτική λύση με κάθε βήμα της διαδικασίας.

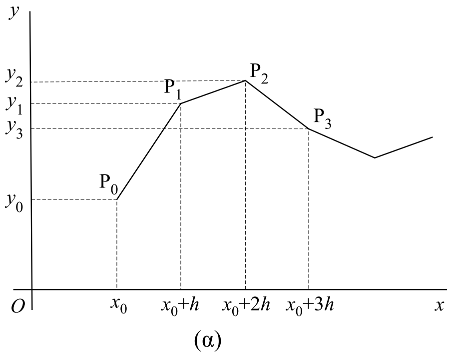
Ένας άλλος τρόπος εύρεσης μιας αριθμητικής λύσης είναι η μέθοδος με τη βοήθεια των *ισοκλινών καμπυλών*. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τη Δ.Ε.

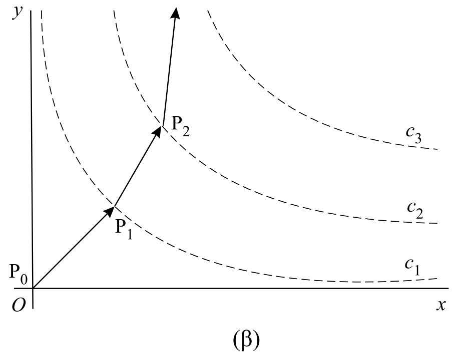
$$y' = e^{xy}, \tag{1.54}$$

για την οποία ισοκλινείς καμπύλες είναι οι ισοσκελείς υπερβολές

$$xy = c, \quad c = σταθ., \tag{1.55}$$

και έστω ότι ζητάμε τη λύση που περνάει από την αρχή των αξόνων. Για τον σκοπό αυτόν, χαράσσουμε όσο γίνεται πιο πυκνά τις ισοκλινείς καμπύλες (1.55) I_1, I_2, I_3, κ.ο.κ (βλ. Σχήμα 1.9β), με σταθερές c_1, c_2, c_3, κ.ο.κ.





Σχήμα 1.9: (α) Αριθμητική λύση με τη μέθοδο της προσέγγισης Euler. (β) Αριθμητική λύση με τη χάραξη ισοκλινών καμπυλών.

Παρατηρούμε ότι στο σημείο $(0,0)$ η κλίση της ζητούμενης λύσης είναι ίση με 1. Χρησιμοποιούμε λοιπόν το διάνυσμα $(1,1)$ για να τοποθετήσουμε επάνω στην ισοκλινή καμπύλη I_1 το σημείο P_1. Στο σημείο P_1, εφαρμόζουμε το διάνυσμα $(1, e^{c_1})$ και κατά τη διεύθυνση αυτού παίρνουμε το σημείο P_2 επάνω στη ισοκλινή I_2. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε τα σημεία P_3, P_4, κ.ο.κ. Τα σημεία P_1, P_2, $P_3, \ldots$ είναι κατά προσέγγιση σημεία της λύσης που περνάει από το $(0,0)$, αντιπροσωπεύουν δηλαδή μια αριθμητική λύση[6] τής (1.54). Η προσέγγιση είναι τόσο καλύτερη όσο πιο πυκνές έχουν ληφθεί οι ισοκλινείς καμπύλες.

Οι παραπάνω μέθοδοι εύρεσης αριθμητικών λύσεων καλούνται *μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης 1ης τάξης*[7] και παρέχουν περιορισμένη ακρίβεια. Ένας στόχος του κλάδου της *Αριθμητικής Ανάλυσης* είναι και η ανάπτυξη αλγορίθμων που να λύνουν αριθμητικά διαφορικές εξισώσεις με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια και χαμηλότερη προγραμματιστική και υπολογιστική πολυπλοκότητα. Μια πολύ γνωστή μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι η *μέθοδος Runge-Kutta* που περιγράφουμε στο Παράρτημα ;;.

Οι αριθμητικές λύσεις είναι *πολύ μικρότερης αξίας* από τις αναλυτικές, διότι σε κάθε περίπτωση οι αριθμητικές λύσεις α) περιγράφουν πάντα μερικές λύσεις, β) είναι γνωστές μόνο σε ένα φραγμένο διάστημα $\mathcal{I} = (x_{min}, x_{max})$ και γ) η ακρίβειά τους είναι περιορισμένη και μειώνεται καθώς απομακρυνόμαστε από τις αρχικές συνθήκες. Όμως, αριθμητικές λύσεις μπορούν να βρεθούν με την εφαρμογής μιας μεθόδου αριθμητικής ολοκλήρωσης σε *οποιαδήποτε* διαφορική εξίσωση ή σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Αντιθέτως, αναλυτικές λύσεις μπορούμε να βρούμε μόνο για ελάχιστες (*ειδικές*) κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων. Πολλές από τις ειδικές αυτές κατηγορίες μαζί με τις μεθόδους λύσης τους θα τις δούμε στα επόμενα κεφάλαια του βιβλίου.

[6] Μπορούμε με τον ίδιο τρόπο να προχωρήσουμε τη λύση προς το άλλο μέρος του σημείου $(0,0)$, δηλαδή για $x < 0$.

[7] Γίνεται *ένας* υπολογισμός για την ολοκλήρωση από το σημείο P_k στο P_{k+1}

1.10 Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

Ας θεωρήσουμε δύο άγνωστες πραγματικές συναρτήσεις $y_1 = y_1(x)$ και $y_2 = y_2(x)$, με $x \in \mathcal{I}$, και ας γράψουμε δύο ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις που εμπλέκουν τις άγνωστες συναρτήσεις και τις παραγώγους τους:

$$\begin{aligned} f_1(x, y_1, y_2, y_1', y_2', y_1'', \ldots, y_1^{(\nu)}, y_1^{(\nu)}) &= 0 \\ f_2(x, y_1, y_2, y_1', y_2', y_1'', \ldots, y_1^{(\nu)}, y_1^{(\nu)}) &= 0. \end{aligned} \tag{1.56}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις λέμε ότι αποτελούν ένα *σύστημα διαφορικών εξισώσεων*. Εν' γένει, οι εξισώσεις του συστήματος δεν λύνονται ξεχωριστά αλλά η εύρεση της λύσης, δηλαδή ο προσδιορισμός των άγνωστων συναρτήσεων που ικανοποιούν τις εξισώσεις, απαιτεί την ταυτόχρονη επίλυση των εξισώσεων.

Η μορφή των εξισώσεων στις σχέσεις (1.56) μπορεί να περιέχει παραγώγους διαφορετικής τάξης για τις δύο συναρτήσεις. Συνήθως όμως ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων δίνεται στην **κανονική του μορφή**, δηλαδή με εξισώσεις πρώτης τάξης σε λυμένη μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(x, y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 &= f_2(x, y_1, y_2). \end{aligned} \tag{1.57}$$

Τα συστήματα της μορφής (1.57) χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες, τα *γραμμικά* και τα *μη γραμμικά*, στα οποία θα αναφερθούμε στα Κεφάλαια ;; και ;; αντίστοιχα. Οι παραπάνω ορισμοί γενικεύονται άμεσα για ν ανεξάρτητες συναρτήσεις και ν διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης, και ο αριθμός ν καλείται διάσταση του συστήματος. Στο βιβλίο αυτό περιοριζόμαστε κυρίως σε διδιάστατα συστήματα. Στο Παράρτημα ;; γίνεται αναφορά σε ορισμούς και θεωρήματα που αφορούν τα συστήματα διάστασης ν.

1.11 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι η $y = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$
για κάθε πραγματική σταθερά α και β και για κάθε πραγματική τιμή της παραμέτρου ω της Δ.Ε.

2. Για ποιες τιμές των α και β, η $y = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}$ είναι λύση της Δ.Ε. $y' + y^2 = 1/x^4$, $(x \neq 0)$.
$[\quad \alpha = 1, \quad \beta = \pm 1 \quad]$

3. Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση που έχει ως λύση τη μονοπαραμετρική οικογένεια κύκλων $x^2 + y^2 = 2c\,x$.
$[\quad y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) \quad]$

4. Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας παραβολών $y = x^2/2 + c$.
$[\quad y = -\ln|x| + c \quad]$

5. Σε ποιον τόπο υπάρχουν λύσεις για τη Δ.Ε. $y' = \sqrt{x+y+1} - 1$; Σε ποια σημεία το θεώρημα Cauchy δεν εγγυάται τη μοναδικότητα πραγματικών λύσεων; Βρείτε μια προφανή λύση για τη Δ.Ε.
$[\quad x + y + 1 \leq 0, \quad x + y + 1 = 0, \quad y = -1 - x \quad]$

6. Λύστε αριθμητικά τη διαφορική εξίσωση $y' = -y/x$, με αρχή το σημείο $(x_0, y_0) = (0.5, 2)$ και στο διάστημα $x \in [0.5, 2.5]$, α) με τη μέθοδο του Euler χρησιμοποιώντας βήμα $\Delta x = 0.1$ και β) με τη μέθοδο των ισοκλινών χρησιμοποιώντας ισοκλινείς με βήμα $\Delta c = 0.1$. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα με την αναλυτική λύση $y = 1/x$.