

## 4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

A' ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

§ 26. Όρισμοί - Σχετικά θεωρήματα.

Πρόκειται γιά διαφορικές έξισώσεις τής μορφής

$$\psi^{(v)} + f_{v-1}(x)\psi^{(v-1)} + \dots + f_1(x)\psi' + f_0(x)\psi = f(x) , \quad (1)$$

όπου  $\psi^{(v)}$  παριστάνει τή νιοστή παράγωγο ώς πρός  $x$  τής ζητούμενης συνάρτησης  $\psi(x)$  και οι  $f(x), f_0(x), \dots, f_{v-1}(x)$  θεωροῦνται συναρτήσεις γνωστές, δορισμένες σ' ένα κοινό πεδίο θρισμού  $(\alpha, \beta)$  και συνεχεῖς σ' αὐτό.

Η τάξη τής έξισωσης (1) είναι  $v$ , κι' αύτό μᾶς έπιτρέπει νά έμφανίζουμε τήν μονάδα σάν συντελεστή τοῦ  $\psi^{(v)}$ . Συντομότερα ή (1) γράφεται συμβολικά

$$L_v(\psi) = f(x) , \quad (2)$$

όπου εἰσάγεται ο γραμμικός διαφορικός τελεστής  $L_v(\psi)$  ώς έξης:

$$L_v(\psi) = \frac{d^v}{dx^v} + f_{v-1} \frac{d^{v-1}}{dx^{v-1}} + \dots + f_1 \frac{d}{dx} + f_0 . \quad (3)$$

Η (2) θά παριστάνει μία συγκεκριμένη διαφορική έξισωση (όπως ή (1)) όταν έχουμε κατά νοῦ  $v$  συγκεκριμένες συναρτήσεις

$$f_j(x) \quad | \quad j = 0, 1, 2, \dots, v-1 .$$

Είναι φανερό γιατί ο τελεστής στό άριστερό μέλος της (3) χαρακτηρίστηκε σάν διαφορικός τελεστής. Ο τελεστής  $L_v(\cdot)$  είναι γραμμικός γιατί, όπως εύκολα αποδεικνύεται,  $\forall k, \lambda$  είναι δύο πραγματικοί άριθμοί, ισχύει

$$L_v(k\psi_1 + \lambda\psi_2) = kL_v(\psi_1) + \lambda L_v(\psi_2) . \quad (4)$$

Η έξισωση (2) καλεῖται πλήρης (ή μή δμογενής) και διακρίνεται από την έξισωση

$$L_v(\psi) = 0 \quad (5)$$

πού καλεῖται δυογενής, τάξεως  $v$ .

Όπως κάναμε και μέ τά γραμμικά συστήματα διαφορικῶν έξισώσεων, θά άσχοληθοῦμε πρώτα μέ τήν έπιλυση της δμογενοῦς έξισωσης (5).

Θά δονομάζουμε λύση της (5) κάθε συνάρτηση

$$\psi = \varphi(x) \mid \alpha < x < \beta \quad (6)$$

γιά τήν δποία ισχύει

$$L_v(\varphi(x)) = 0 \text{ γιά όλα τά } x \in (\alpha, \beta) . \quad (7)$$

Είναι φανερό ότι ή λύση (6) είναι συνάρτηση συνεχής και μάλιστα μέ συνεχεῖς παραγώγους μέχρι και τάξη  $v$ .

Φυσικά μιά έξισωση σάν τήν (5) δέν έχει μία μόνο λύση, όπως ή (6). Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι ή συνάρτηση  $\psi(x) = 0 \mid \alpha < x < \beta$  ικανοποιεῖ πάντοτε τήν έξισωση (5). Έπισης ότι,  $\forall \eta$  (6) είναι λύση της (5), τότε καί ή  $\psi = -\varphi(x) \mid \alpha < x < \beta$  είναι έπισης λύση της. Έπισης είναι φανερό ότι,  $\forall \varphi_1(x)$  και  $\varphi_2(x)$  είναι δύο διαφορετικές λύσεις της (5), και  $k$  και  $\lambda$  πραγματικοί άριθμοί, ή συνάρτηση  $\psi = k\varphi_1(x) + \lambda\varphi_2(x)$  είναι έπισης λύση της (5).

Όλες αύτές οι παρατηρήσεις μᾶς δύνησαν στό συμπέρασμα ότι τό σύνολο τῶν λύσεων (6) της έξισωσης (5) αποτελεῖ ένα διανυσματικό χώρο. Τό συμπέρασμα αύτό διοκληρώνεται μέ τό έξης θεώρημα τό διόποτε δίνουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα: Τό σύνολο τῶν λύσεων κάθε δμογενοῦς διαφορικῆς έξισωσης

τάξεως ν ἀποτελεῖ πραγματικό διανυσματικό χῶρο διαστάσεως ν.

Η σημασία τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ εἶναι ὅτι ὑπάρχουν γιά κάθε ἔξισωση ὅπως ή (5), ν μή μηδενικές γραμμικῶς ἀνεξάρτητες συναρτήσεις - λύσεις τῆς (5)

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_v(x) \mid \alpha < x < \beta . \quad (8)$$

Οι λύσεις (8) μποροῦν νά ἀποτελέσουν μιά βάση στόν διανυσματικό χῶρο ὅλων τῶν λύσεων τῆς ἔξισωσης (5). Ἐπομένως μέ τὴν βοή - θεια τῶν (8) μπορεῖ νά ἐκφρασθεῖ κάθε λύση τῆς (5) σάν

$$\psi = \varphi(x) = c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_v \varphi_v(x) ,$$

ὅπου  $c_1, c_2, \dots, c_v$  εἶναι αὐθαίρετες πραγματικές σταθερές.

"Ἄς ἐπισημάνουμε ἐδῶ τίς διαφορές καί τίς διαφορές μεταξύ τῶν διανυσματικῶν χώρων τῶν λύσεων ἐνός διαφορετικού συστήματος ν διαφορικῶν ἔξισώσεων καί μιᾶς διαφορετικῆς διαφορικῆς ἔξισωσης τάξεως ν.

"Ο πρῶτος διανυσματικός χῶρος ἔχει σάν στοιχεῖα "διανύσματα" μέ ν συνιστῶσες - συναρτήσεις. Η βάση του δηλαδή γίνεται ἀπό ν τέτοια "διανύσματα" τό καθένα ἀπό τά διαφορικά χρειάζεται ν συναρτήσεις γιά νά καθορισθεῖ. Ο δεύτερος διανυσματικός χῶρος (δηλαδή διαφορικός χῶρος τῶν λύσεων τῆς ἔξισωσης (5)) ἔχει σάν στοιχεῖα συναρτήσεις. Η βάση του ἐπομένως καθορίζεται ἀκριβῶς ἀπό ν συναρτήσεις.

"Ἄς παρατηρήσουμε ὅμως ὅτι ή ἐπίλυση τῆς ἔξισωσης διαφορικῆς ἔξισωσης

$$\psi^{(v)} + f_{v-1}(x)\psi^{(v-1)} + \dots + f_1(x)\psi' + f_0(x)\psi = 0 \quad (9)$$

μπορεῖ νά ἀναχθεῖ σέ πρόβλημα ἐπίλυσης ἐνός διαφορικοῦ συστήματος διαφορικῶν ἔξισώσεων. Αύτό πράγματι γίνεται ἂν θέσουμε  $z_1(x) = \psi(x)$  ή, ἀπλούστερα

$$z_1 = \psi , z_2 = \psi' , z_3 = \psi'' , \dots , z_v = \psi^{(v-1)} .$$

"Ἔχουμε τότε, σύμφωνα καί μέ τὴν (9), τό ἔξῆς (διαφορετικός γραμμικό)

σύστημα τῶν  $v$  ἐξισώσεων μέ τούς ν ἀγνώστους  $z_1, z_2, z_v$ :

$$\begin{aligned} z'_1 &= z_2 \\ z'_2 &= z_3 \\ \dots & \\ \dots & \\ z'_{v-1} &= z_v \\ z'_v &= -f_0(x)z_1 - f_1(x)z_2 - \dots - f_{v-1}(x)z_v \end{aligned} \quad (10)$$

Στή λύση  $\psi = \varphi(x) \mid \alpha < x < \beta$  τῆς ἐξισωσης (9) ἀντιστοιχεῖ προφανῶς ἡ λύση

$$\{\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(v-1)}(x)\}. \quad (11)$$

Καὶ ἀντίστροφα κάθε λύση τοῦ συστήματος (10) εἶναι τῆς μορφῆς (11) καὶ σ' αὐτήν ἀντιστοιχεῖ σάν λύση τῆς (9) ἡ συνάρτηση  $\psi = \varphi(x)$ .

Γιὰ τήν διαφορική ἐξισωση (9) – καὶ γενικότερα τήν (1) – μποροῦν νά διατυπωθοῦν θεωρήματα ὑπαρξης λύσης καὶ ἐπέκτασης τῆς λύσης. 'Υποτίθεται δτι οἱ συναρτήσεις  $f_j(x) \mid j = 0, 1, 2, \dots, (v-1)$  εἶναι συνεχεῖς. 'Αποδεικνύεται τότε δτι ὑπάρχει μὲν α μὲν ο λύση  $\psi = \varphi(x) \mid x \in \pi(\xi)$  πού διέρχεται ἀπό δρισμένο σημεῖο  $(\xi, \eta)$  τοῦ ἔπιπέδου καὶ ἔχει στὸ σημεῖο αὐτό προκαθορισμένες παραγώγους μέχρι τάξη  $v-1$ , δηλαδή

$$\eta = \varphi(\xi), \eta_1 = \varphi'(\xi), \dots, \eta_{v-1} = \varphi^{(v-1)}(\xi). \quad (12)$$

'Αποδεικνύεται ἐπίσης δτι ἡ λύση αὐτή μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ σ' ὅλο τὸ διάστημα  $(\alpha, \beta)$  στὸ δποῖο δρίζονται καὶ εἶναι συνεχεῖς οἱ συναρτήσεις  $f_j(x) \mid j = 0, 1, \dots, v-1$ .

### § 27. Ορίζουσα τοῦ Wronski.

"Ἄς ὑποθέσουμε δτι σ' ἔνα διάστημα  $\alpha < x < \beta$  οἱ ν τό πλῆ-

θος συναρτήσεις

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_v(x) \quad (1)$$

είναι συνεχεῖς καὶ ὅτι ἔχουν παραγώγους μέχρι τάξη  $v-1$  πού εἶναι ἐπίσης συνεχεῖς.

Από τίς συναρτήσεις (1) δημιουργοῦμε τὴν ὁρίζουσα

$$W(x) = (\sigma\mu\beta) = W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_v) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_v \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \cdots & \varphi'_v \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi^{(v-1)}_1 & \varphi^{(v-1)}_2 & \cdots & \varphi^{(v-1)}_v \end{vmatrix} \quad (2)$$

τὴν ὅποια καὶ ὀνομάζουμε ὁ ρίζος α τοῦ Wronski γιά τίς συναρτήσεις (1). Η συνάρτηση  $W(x)$  εἶναι ἐπίσης συνεχής στό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ .

Θά δοῦμε ὅτι ἡ ὁρίζουσα τοῦ Wronski παίζει βασικό ρόλο στή θεωρία τῶν γραμμικῶν διαφορικῶν ἔξισώσεων ἀνωτέρας τάξεως.

"Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι οἱ συναρτήσεις (1) δέν εἶναι τυχαῖες ἀλλά ὅτι εἶναι ν λύσεις τῆς ὁμογενοῦς διαφορικῆς ἔξισωσης <sup>(\*)</sup>

$$y^{(v)} + f_{v-1}(x)y^{(v-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0. \quad (3)$$

Αὐτές οἱ ν λύσεις εἶναι δυνατό νά εἶναι γραμμικά ἔξαρτημένες ἢ ἀνεξάρτητες.

Αποδεικνύεται ὅτι ἂν οἱ (1) εἶναι γραμμικά ἔξαρτημένες, τότε ἡ ἀντίστοιχη ὁρίζουσα (2) μηδενίζεται γιά ὅλες τίς τιμές τοῦ  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Πράγματι. Τό ὅτι οἱ συναρτήσεις - λύσεις (13) εἶναι γραμμικά ἔξαρτημένες σημαίνει ὅτι μία ἀπ' αὐτές, ἔστω ἡ  $\varphi_v(x)$  ἔκφραζεται

(\*) Θά ὑπάρχουν τότε καί θά εἶναι συνεχεῖς στό διάστημα  $(\alpha, \beta)$  καί οἱ παράγωγοι τάξεως ν ὅλων τῶν συναρτήσεων (1).

γραμμικά σάν συνάρτηση τῶν ἄλλων, δηλαδή

$$\varphi_v = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_{v-1} \varphi_{v-1} \quad . \quad (4a)$$

Παραγωγίζοντας διαδοχικά, μέχρι και τάξη  $n-1$ , τά δύο μέλη τῆς (4a), παίρνουμε

"Αν τώρα οι συναρτήσεις της τελευταίας στήλης της όριζουσας (2) ἀντικατασταθοῦν μέ τά δεξιά μέλη τῶν ἔξισώσεων (4α), (4β), θά προκύψει

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_{v-1} & (\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_{v-1} \varphi_{v-1}) \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \cdots & \varphi'_{v-1} & (\lambda'_1 \varphi'_1 + \lambda'_2 \varphi'_2 + \cdots + \lambda'_{v-1} \varphi'_{v-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi^{(v-1)}_1 & \varphi^{(v-1)}_2 & \cdots & \varphi^{(v-1)}_{v-1} & (\lambda^{(v-1)}_1 \varphi^{(v-1)}_1 + \lambda^{(v-1)}_2 \varphi^{(v-1)}_2 + \cdots + \lambda^{(v-1)}_{v-1} \varphi^{(v-1)}_{v-1}) \end{vmatrix} \equiv 0$$

γιά όλα τα  $x \in (a, b)$ ,

Μέ δημοτικό τρόπο άποδεικνύεται ότι αν οι συναρτήσεις λύσεις (1) είναι γραμμικά άνεξάρτητες, ή αντίστοιχη δριζουσα (2) τοῦ Wronski είναι διάφορη τοῦ μηδενός για όλα τά  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Μᾶς δύνει λοιπόν ή δρίζουσα τοῦ Wronski τήν δυνατότητα νά έλέγξουμε ἃν ν λύσεις μιᾶς δμογενοῦς γραμμικῆς διαφορικῆς ἔξισωσης τάξεως ν ἀποτελοῦν ἡ ὅχι μία βάση στὸ διανυσματικό χῶρο τῶν λύσεων. "Αν, ἔστω καὶ σέ ἔνα σημεῖο  $\xi \in (\alpha, \beta)$ , εἶναι  $W(\xi) = 0$ , συμπεραίνουμε ὅτι οἱ συναρτήσεις (1) δέν ἀποτελοῦν βάση τῆς ἔξισωσης (3).

Διότι ἂν συνέβαινε αὐτό θά ἔπρεπε νά εἶναι  $W(x) \neq 0$  γιά ὅλα τά  $x \in (\alpha, \beta)$  καὶ ἐπομένως θά ἔπρεπε καὶ  $W(\xi) \neq 0$ .

"Ας σκεφτοῦμε τώρα γενικά ἔνα πραγματικό διανυσματικό χῶρο διαστάσεως  $v$  καὶ ἂς ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι δοσμένη ἡ βάση του. Εἶναι τότο σάν νά δίνεται κάθε στοιχεῖο τοῦ διανυσματικοῦ χῶρου.

Τίθεται τό ἔξῆς ἐρώτημα: Εἶναι δυνατό δύο διαφορετικές δόμογενεῖς γραμμικές ἐξισώσεις τάξεως  $v$  νά ἔχουν τόν ̄διο διαγυσματικό χῶρο λύσεων;

Ή ἀπάντηση στό ἐρώτημα αὐτό εἶναι πάντοτε ἀρνητική, ἀρκεῖ νά ὑποτεθεῖ ὅτι οἱ συναρτήσεις - συντελεστές τῶν δόμογενῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων εἶναι συνεχεῖς σ' ἔνα διάστημα  $\alpha < x < \beta$ .

Πράγματι. "Αν οἱ ἐξισώσεις

$$y^{(v)} + f_{v-1}(x)y^{(v-1)} + \dots + f_0(x)y = 0 \quad (5\alpha)$$

καὶ

$$y^{(v)} + g_{v-1}(x)y^{(v-1)} + \dots + g_0(x)y = 0 \quad (5\beta)$$

ἔχουν τὴν ̄δια βάση  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_v\}$ , τότε γιά κάθε  $x$  μέσα σέ κάποιο διάστημα καὶ γιά ὅλα τά  $k = 0, 1, \dots, v-1$  θά εἶναι

$$f_k(x) \equiv g_k(x) .$$

Διότι ἂν ἔστω καὶ γιά μιά τιμή τοῦ  $x = \xi$ , εἶναι π.χ.  $f_{v-1}(\xi) \neq g_{v-1}(\xi)$ , ἐπειδὴ οἱ συναρτήσεις  $f_{v-1}(x)$  καὶ  $g_{v-1}(x)$  εἶναι συνεχεῖς στό  $(\alpha, \beta)$  θά πρέπει νά ὑπάρχει περιοχή  $\pi(\xi)$  μέ

$$f_{v-1}(x) \neq g_{v-1}(x) \mid x \in \pi(\xi) .$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τίς  $(5\alpha)$  καὶ  $(5\beta)$  παίρνουμε

$$(f_{v-1}(x) - g_{v-1}(x))y^{(v-1)} + \dots + (f_0(x) - g_0(x))y = 0$$

Ή τελευταία αὐτή ἐξισωση εἶναι (στὴν  $\pi(\xi)$ ) δόμογενής τάξεως  $v-1$  καὶ θά πρέπει νάχει ν λύσεις - τίς  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_v$  - γραμμικά ἀνεξάρτητες. 'Αλλ' αὐτό εἶναι ἄτοπο.

Έπομένως, όταν δοθεῖ μία βάση, π.χ. ή (1), ύπάρχει μία μόνο δμογενής διαφορική έξισωση (3) πού έχει σάν λύσεις δλες τίς συναρτήσεις πού δημιουργοῦνται άπό τήν βάση (1). "Οπως εἶναι εὔκολο νά έπαληθευτεῖ ή έξισωση αύτή εἶναι ή

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_v & \psi \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & & \varphi'_v & \psi' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(v)} & \varphi_2^{(v)} & \cdots & \varphi_v^{(v)} & \psi^{(v)} \end{vmatrix} = 0 . \quad (6)$$

Παράδειγμα: Ζητεῖται ή δμογενής διαφορική έξισωση 2ας τάξεως μέ βάση

$$\varphi_1(x) = 1 , \quad \varphi_2(x) = \sigma v 2x . \quad (7)$$

Εἶναι, σύμφωνα μέ τόν τύπο (6),

$$\begin{vmatrix} 1 & \sigma v 2x & \psi \\ 0 & -2\eta\mu 2x & \psi' \\ 0 & -4\sigma v 2x & \psi'' \end{vmatrix} = 0 .$$

Ή, μετά τίς πράξεις,

$$\psi'' - 2(\sigma v 2x) \psi' \neq 0 \quad | \quad 0 < x < \pi/2 . \quad (8)$$

"Ας παρατηρήσουμε ότι στό διάστημα  $0 < x < \pi/2$  οι συναρτήσεις (7) εἶναι γραμμικά άνεξάρτητες, δηλαδή

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} 1 & \sigma v 2x \\ 0 & -2\eta\mu 2x \end{vmatrix} = -2\eta\mu 2x \neq 0 .$$

Φυσικά οι 6διες οι συναρτήσεις (7) δρίζονται γιά δλα τά  $x \in R$ . Μποροῦν δμως νά άποτελέσουν βάση λύσεων τής έξισώσεως (8) μόνο σε άνοιχ-

τά ύποδιαστήματα τοῦ  $R$  γιά τά δόποια  $W(x) \neq 0$ .

"Ας παρατηρήσουμε άκομη ότι στήν ̄δια άκριβῶς ἔξισωση (8) φθάνουμε ἂν, ἀντί γιά τήν βάση (7), πάρουμε π.χ. τήν βάση

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) , \quad \psi_2 = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2) ,$$

$$\text{δηλαδή τήν } \psi_1(x) = \eta\mu^2 x , \quad \psi_2(x) = \sigma\nu\nu^2 x.$$

### § 28. Υποβιβασμός τῆς τάξης δμογενοῦς ἔξισωσης.

"Οπως συμβαίνει μέ τά δμογενῆ γραμμικά συστήματα ἔτσι καὶ γιά τήν δμογενῆ γραμμική διαφορική ἔξισωση

$$y^{(v)} + f_{v-1}(x)^{(v-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0 \quad (1)$$

δέν εἶναι γενικά δυνατό νά βρεθεῖ μία βάση της. Υπάρχει πάντως καὶ γιά τήν περίπτωση αύτή τρόπος μέ τόν δόποιο ύποβιβάζεται κατά μία μονάδα ἡ τάξη τῆς (1), ἂν (αύτῆς τῆς ἔξισωσης) εἶναι γνωστή μία (διάφορη τῆς μηδενικῆς) μερική λύση. Αύτό γίνεται μέ τήν χρήση τοῦ μετασχηματισμοῦ

$$\psi = \varphi_1(x) \int_{\xi}^x z(x) dx , \quad (2)$$

ὅπου  $\varphi_1(x) \neq 0 \mid \alpha < x < \beta$  εἶναι μερική λύση τῆς

$$L_v(\psi) = 0 \quad (3)$$

καὶ  $z$  ἀγνωστη συνάρτηση πού θά προκύψει ἀπό τήν λύση μιᾶς ἔξισωσης

$$L_{v-1}(z) = 0 \quad (4)$$

τάξεως  $(v-1)$ .

"Αν  $\{z_2, z_3, \dots, z_v\}$  εἶναι μία βάση τῆς (4) ἀποδεικνύεται ότι οἱ συναρτήσεις

$$\varphi_1, \varphi_1 \int z_2 dx, \dots, \varphi_1 \int z_v dx$$

ἀποτελοῦν μία βάση τῆς (1).

Στή συνέχεια, άντι νά άποδείξουμε ότι πράγματι ό μετασχηματισμός (2) μᾶς δύναμες γενικά άπό τήν έξισωση (3) στήν (4), θά έφαρμόσουμε τόν μετασχηματισμό (19) στήν περίπτωση τῆς δύμογενοῦς γραμμικής διαφορικής έξισωσης 2ας τάξεως

$$\psi'' + f_1(x)\psi' + f_0(x)\psi = 0 \quad (5)$$

πού έμφανίζεται συχνά στίς έφαρμογές.

· Υποθέτουμε ότι ή

$$\psi = \varphi_1(x) \quad | \quad \alpha < x < \beta \quad (6)$$

εἶναι μία λύση τῆς (5), εἶναι δηλαδή

$$\varphi_1'' + f_1\varphi_1' + f_0\varphi_1 = 0 \quad (7)$$

καί έφαρμόζουμε τόν (2). "Έχουμε τότε

$$\psi = \varphi_1 \int z dx$$

$$\psi' = \varphi_1' \int z dx + \varphi_1 z$$

$$\psi'' = \varphi_1'' \int z dx + 2\varphi_1' z + \varphi_1 z'$$

καί ή (5) γράφεται

$$(\varphi_1'' + f_1\varphi_1' + f_0\varphi_1) \int z dx + 2\varphi_1' z + \varphi_1 z' + f_1\varphi_1 z = 0$$

ή, λόγω καί τῆς (7),

$$\varphi_1 z' + (2\varphi_1' + f_1\varphi_1) z = 0 . \quad (8)$$

· Η έξισωση (8), στήν όποια κατέληξε ή (5), εἶναι δύμογενής γραμμική, πρώτης τάξεως. Εύκολα βρίσκεται ότι μία λύση τῆς (8) είναι ή

$$z_2 = \frac{1}{\varphi_1^2} e^{-\int f_1 dx} . \quad (9)$$

Μέ τήν βοήθεια τῆς (9), βρίσκουμε τώρα τήν βάση

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) = \varphi_1(x) \int \frac{1}{2} e^{-\int f_1(x) dx} dx \quad (10)$$

τῶν λύσεων τῆς (5).

Τό δτι οἱ συναρτήσεις  $\varphi_1(x)$  καὶ  $\varphi_2(x)$  ἀποτελοῦν βάση μπορεῖ νά ἔλεγχθεῖ γιά τή συγκεκριμένη περίπτωση. Πραγματικά ύπολογίζεται δτι ἡ δρίζουσα τοῦ Wronski εἶναι

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_1 \int z_2 dx \\ \varphi'_1 & \varphi'_1 \int z_2 dx + \varphi_1 z_2 \end{vmatrix} = e^{-\int f_1 dx} \neq 0 .$$

Γενική λύση τῆς (5) εἶναι ἡ

$$\psi = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) \mid \alpha < x < \beta , \quad (11)$$

ὅπου  $c_1, c_2$  εἶναι αὐθαίρετες πραγματικές σταθερές.

Παρατήρηση. Υποτίθεται δτι ἡ μερική λύση  $\varphi_1(x) \neq 0$  γιά ὅλα τά  $x \in (\alpha, \beta)$ . Άν γιά  $\xi \in (\alpha, \beta)$  εἶναι  $\varphi_1(\xi) = 0$ , δίνουμε τή βάση (10) σέ ύποδιαστήματα τοῦ  $(\alpha, \beta)$ .

Πρόβλημα. Σέ ύλικό σημεῖο μέ μάζα  $m = 1$  πού κινεῖται πάνω στόν ἄξονα  $x$  ἀσκεῖται ἡ δύναμη

$$F(t, x, \dot{x}) = -\frac{4t}{t^2 + 1} \dot{x} - \frac{2}{t^2 + 1} x .$$

Άν γιά  $t = 0$  τό σημεῖο βρίσκεται στή θέση  $x_0 = 1$  μέ ταχύτητα  $\dot{x}_0 = 1$ , νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση  $x = x(t)$  τῆς κίνησης τοῦ σημείου.

Αντιμετωπίζουμε ἐδῶ τήν πιό γενική περίπτωση εύθύγραμμης κίνησης. Ή δύναμη ἔξαρτᾶται ἀπό τήν ἀπόσταση  $x$ , ἀπό τήν ταχύτητα  $\dot{x}$  καὶ ἀμέσως ἀπό τόν χρόνο  $t$ . Αύτή ἡ δύναμη δέν εἶναι βέβαια συντηρητική. Ή διαφορική ἐξίσωση τῆς κίνησης εἶναι

$$m \ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$$

ή, στήν περίπτωσή μας,

$$\ddot{x} + \frac{4t}{t^2 + 1} \dot{x} + \frac{2}{t^2 + 1} x = 0 \quad . \quad (12)$$

Πρόκειται για ραμμική δύμογενή έξισωση 2ας τάξεως, μέ συντελεστές συναρτήσεις της άνεξάρτητης μεταβλητής  $t$ . Θά μᾶς χρειαστεῖ μιά μερική λύση της. Η έξοικίωση μέ τήν (12) μᾶς οδηγεῖ στήν

$$x_1(t) = \frac{1}{t^2 + 1} \quad . \quad (13)$$

Γιά νά βροῦμε μιά άκόμη λύση θέτουμε

$$x = \frac{1}{t^2 + 1} \int z dt \quad . \quad (14)$$

Μετά τίς πράξεις καταλήγουμε στήν έξισωση  $\ddot{z} = 0$ . Παίρνοντας π.χ.  $z = 1$ , βρίσκουμε άπό τήν (14)

$$x_2 = \frac{t}{t^2 + 1} \quad . \quad (15)$$

Γενική λύση τής (12) εἶναι λοιπόν ή

$$x = \frac{C_1 + C_2 t}{t^2 + 1} \quad . \quad (16)$$

μέ

$$\dot{x} = \frac{C_2}{t^2 + 1} - \frac{2t(C_1 + C_2 t)}{(t^2 + 1)^2} \quad .$$

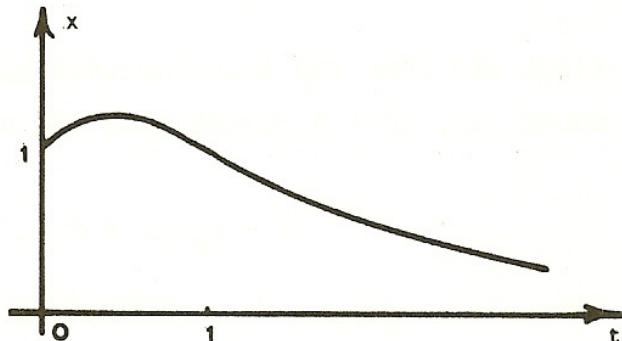
Από τίς άρχικές συνθήκες βρίσκεται ότι  $C_1 = 1$  και  $C_2 = 1$ . Ωστε ή ζητούμενη έξισωση τής κίνησης εἶναι ή

$$x = \frac{t+1}{t^2 + 1} \quad . \quad (17)$$

Τό διάγραμμα  $x - t$  δίνεται στό Σχήμα 29. Φαίνεται από τό διάγραμμα αύτό ότι ή κίνηση είναι περατωμένη<sup>(\*)</sup>. Τό σημεῖο κινεῖται από τή θέση  $x_0 = 1$  πρός τά δεξιά μέχρι τή θέση

$$x_1 = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$$

Στή θέση  $x_1$  ή ταχύτητά του μηδενίζεται και τό σημεῖο έπιστρέφει ασυμπτωτικά (σε άπειρο χρόνο) στήν άρχην  $0$  τοῦ άξονα  $Ox$ .



Σχήμα 29

### § 29. Γενική λύση τῆς πλήρους ἐξίσωσης - Σχετικά θεωρήματα.

· Υποθέτουμε ότι έχει λυθεῖ ή διμογενής γραμμική ἐξίσωση

$$y^{(v)} + f_{v-1}(x)y^{(v-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0 \quad (1)$$

και ἀντιμετωπίζουμε τό πρόβλημα τῆς λύσης τῆς πλήρους ἐξίσωσης

$$y^{(v)} + f_{v-1}(x)y^{(v-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = f(x) . \quad (2)$$

· Ισχύει γιά τήν περίπτωση αύτή τό ἐξῆς (ἀνάλογο πρός ἐκεῖνο πού διατυπώθηκε γιά γραμμικά συστήματα)

Θεώρημα: · Η γενική λύση μιᾶς πλήρους γραμμικῆς διαφορικῆς ἐξίσωσης τάξεως  $v$  είναι άθροισμα τῆς γενικῆς λύσης τῆς ἀντίστοιχης διμογενοῦς ἐξίσωσης και μιᾶς μερικῆς λύσης τῆς πλήρους.

(\*) Αξιοσημείωτο είναι ότι ή κίνηση είναι περατωμένη για διπολεσδήποτε άρχικές συνθήκες.

"Αν δηλαδή  $y_o(x)$  είναι μία μερική λύσης της πλήρους έξισωσης (2) και

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_v(x) \quad (3)$$

είναι μία βάση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου τῶν λύσεων της ίδιας έξισωσης (1), τότε ή γενική λύση της πλήρους δίνεται από τόν τύπο

$$\psi = y_o(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_v\varphi_v(x),$$

όπου  $c_1, c_2, \dots, c_v$  αύθαιρετες σταθερές.

Η άποδειξη τοῦ θεωρήματος αύτοῦ είναι πολύ άπλη<sup>(\*)</sup>.

Γιά τήν άπλότητα τοῦ πράγματος, ας άναφερθούμε στήν έξισωσης 2ας τάξεως

$$y'' + f_1y' + f_0y = f(x). \quad (4)$$

Έπειδή ή  $y_o$  είναι μερική λύση της (4), θάχουμε

$$y_o'' + f_1y_o' + f_0y_o = f(x).$$

Έπειδή άκόμη οι  $\varphi_1, \varphi_2$  είναι λύσεις της άντιστοιχης ίδιας έξισης

$$y'' + f_1y' + f_0y = 0,$$

θάχουμε  $\varphi_1'' + f_1\varphi_1' + f_0\varphi_1 = 0$  και

$$\varphi_2'' + f_1\varphi_2' + f_0\varphi_2 = 0.$$

Άμέσως φαίνεται τώρα ότι ή

$$y = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + y_o$$

έπαληθεύει τήν (4) γιά ίδια έξιση.

Σέ ότι άφορα τήν μερική λύση της πλήρους συνήθως αύτή βρί-

(\*) Στήν § 9 έχουμε άποδείξει τό θεώρημα γιά τήν έξιση πρώτης τάξεως.

σκεται μετά άπό κάποια έξοικείωση μέ τήν συγκεκριμένη έξίσωση. "Οπως θά δοῦμε στό πρῶτο άπό τά παραδείγματα πού άκολουθοῦν, μαντεύουμε, μετά άπό προσεκτική παρατήρηση τῆς έξίσωσης πού έχουμε νά λύσουμε, τήν μορφή τῆς λύσης καί, προσδιορίζοντας ένα συντελεστή, έχουμε μιά μερική λύση.

"Αν έν τούτοις, δέν εἶναι δυνατή ή έπισήμανση μιᾶς μερικῆς λύσης τῆς (2) έξ' ἀρχῆς ή μέ κάποιο τέχνασμα - εἶναι πάντως γνωστή ή γενική λύση τῆς δύμογενοῦς - μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τό έξῆς:

Θεώρημα: "Αν οί συναρτήσεις (3) άποτελοῦν μιά βάση στό χώρο τῶν λύσεων τῆς δύμογενοῦς έξίσωσης (1), τότε μία μερική λύση τῆς πλήρους έξίσωσης (2) δίνεται άπό τόν τύπο

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^n \left( \int_{\xi}^x \frac{W_i(x)}{W(x)} dx \right) \varphi_i(x) \quad | \quad \alpha < x < \beta , \quad (5)$$

ὅπου  $W(x)$  εἶναι ή δρίζουσα τοῦ Wronski (2) τῆς § 27 καί  $W_i(x)$  εἶναι ή δρίζουσα πού προκύπτει άπό αὐτήν ἂν ή  $i$  στήλη τῆς  $W(x)$  ἀντικατασταθεῖ άπό τήν στήλη

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{matrix}$$

### § 30. Παράδειγμα.

Νά λυθεῖ ή έξίσωση

$$\psi'' + \frac{2}{x} \psi' + \psi = 2(x^2 + 3x + 3)e^x . \quad (1)$$

Γράφουμε τήν ἀντίστοιχη δύμογενή

$$\psi'' + \frac{2}{x} \psi' + \psi = 0 . \quad (2)$$

Μία μερική λύση<sup>(\*)</sup> τῆς (2) εἶναι ή

(\*) "Οχι εὔκολο νά έπισημανθεῖ. Εδῶ ωστόσο ένδιαφερόμαστε νά δεύξουμε πώς μέ τήν βοήθεια αὐτῆς τῆς μερικῆς λύσης μποροῦμε νά βροῦμε ἄλλη μέρια λύση καί νά δημιουργήσουμε τήν βάση.

$$\varphi_1(x) = \frac{\eta\mu x}{x} \mid 0 < x < \pi^{(*)} . \quad (3)$$

Προβλέπεται τώρα δι μετασχηματισμός

$$\psi = \frac{\eta\mu x}{x} \int z dx .$$

Έπειδή πρόκειται γιά έξισωση 2ης τάξης και έχουν γίνει γι' αυτή τήν περίπτωση προηγουμένως όλες οι ένδιαμεσες πράξεις, παίρνουμε άπό τήν έξισωση (10) τής § 28 τήν συνάρτηση

$$\varphi_2(x) = \frac{\eta\mu x}{x} \int \frac{x^2}{\eta\mu^2 x} e^{-\int \frac{2dx}{x}} dx = \frac{\eta\mu x}{x} \int \frac{dx}{\eta\mu^2 x} = -\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi x} = -\frac{\sigma v x}{x} .$$

Έπομένως, βάση στό χώρο τῶν λύσεων τής (2) μποροῦν νά άποτελέσουν οι συναρτήσεις

$$\frac{\eta\mu x}{x} \text{ και } -\frac{\sigma v x}{x} \mid 0 < x < \pi . \quad (4)$$

Μᾶς χρειάζεται άκομη μία λύση (μερική) τής (1). Είναι λογικό νά ύποθέσει κανείς ότι ΐσως ύπαρχει μιά λύση τής (1) τής μορφής

$$\psi = ax^2 e^x$$

ὅπου  $\alpha$  είναι μιά σταθερά πού πρέπει νά προσδιορισθεῖ (\*\*).

Δοκιμάζοντας τήν λύση (5) βρίσκουμε ότι  $\alpha = 1$ . Βρίσκουμε δηλαδή τήν μερική λύση  $\psi = x^2 e^x$  τής πλήρους έξισωσης (1).

"Αρα ή γενική λύση τής (1) είναι

$$\psi = x^2 e^x + \frac{1}{x} (\sigma_1 \eta\mu x + \sigma_2 \sigma v x) , \quad (6)$$

(\*) Παίρνουμε  $0 < x < \pi$  ώστε νάχουμε σ' όλο τό διάστημα  $\varphi_1(x) \neq 0$ .

(\*\*) Ο παράγων  $e^x$  στό δεξιό μέλος τής (35) τοποθετεῖται έν όφει τής παρουσίας τοῦ παραγοντος  $e^x$  στό δεξιό μέλος τής (1). "Οσο για τόν παράγοντα  $x^2$  ούτε προσέξουμε ότι δέν θά μπορούσε αύτός νάναι  $x$  ούτε  $x^3$ . Γενικότερα θάταν φυσικό νά άναζητήσουμε μία μερική λύση τής (1) τής μορφής  $\psi = (ax^2 + bx + c)e^x$ .

ὅπου  $c_1$ ,  $c_2$  αύθαιρετες σταθερές. Οι σταθερές αύτές προσδιορίζονται αν ζητηθεῖ μία μερική λύση ἀπό τήν όποια ᾔχουμε δρισμένες ἀπαιτήσεις ή, ὅπως ἀλλοιῶς λέμε, γιά τήν όποια θέτουμε δρισμένες ἀρχικές συνθῆκες.

"Ας ζητήσουμε π.χ. ἐκείνη τήν λύση πού περνάει ἀπό τό σημεῖο  $(\pi/2, 0)$  καὶ ᾔχει στό σημεῖο αύτό  $\psi' = 1$ . Μετά τίς πράξεις προκύπτει ὅτι

$$c_1 = - \frac{\pi^3}{8} e^{\pi/2}$$

$$c_2 = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi^2}{4} e^{\pi/2} + \frac{\pi}{2} e^{\pi/2} - 1 \right).$$

B'. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ.

§ 31. Όρισμοί - Μεθοδολογία - Χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Διακρίνουμε και ἐδῶ τήν όμογενή γραμμική ἔξισωση

$$y^{(v)} + \alpha_{v-1} y^{(v-1)} + \dots + \alpha_1 y^1 + \alpha_0 y = 0 \quad (1)$$

και τήν μή όμογενη (πλήρη) ἔξισωση

$$y^{(v)} + \alpha_{v-1} y^{(v-1)} + \dots + \alpha_1 y^1 + \alpha_0 y = f(x), \quad (2)$$

ὅπου  $\alpha_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, v-1$ ) εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, ἐνῶ ἡ συνάρτηση  $f(x)$  στό β' μέλος θεωρεῖται συνεχής σ' ἕνα διάστημα ( $\alpha, \beta$ ).

Τήν περίπτωση αύτή μποροῦμε βέβαια νά τήν ἀντιμετωπίσουμε σάν μιά εἰδική περίπτωση ἐκείνης πού μελετήσαμε στήν § 26. Ισχύουν ἐδῶ ὅλα ὅσα ἔχουν διατυπωθεῖ γιά διαφορικές ἔξισώσεις ἀνωτέρας τάξεως μέ συντελεστές συναρτήσεις. Ιδιαίτερα ὑπενθυμίζουμε ὅτι:

"Τό σύνολο τῶν λύσεων τῆς όμογενοῦς ἔξισωσης (1), τάξεως  $v$ , ἀποτελεῖ διανυσματικό χῶρο διαστάσεως  $v$ " καὶ ὅτι

"Η γενική λύση τῆς πλήρους (2) εἶναι ἄθροισμα μιᾶς μερικῆς λύσης τῆς (2) καὶ τῆς γενικῆς λύσης τῆς ἀντίστοιχης όμογενοῦς".

Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι μέ τόν ἵδιο ἀκριβῶς τρόπο, ὅπως καὶ στήν § 26 εἶναι δυνατό νά γίνει ἡ ἀναγωγή τῆς (1) ἢ (2) σέ ἕνα γραμμικό σύστημα  $v$  διαφορικῶν ἔξισώσεων μέ σταθερούς συντελεστές.

Παρ' ὅλες τίς όμοιότητες πού ἀναφέραμε θά μελετήσουμε ἐδῶ τό θέμα μέ ἕνα τρόπο ἀρκετά ἀπλούστερο· καὶ τοῦτο ἀκριβῶς γιά τό λόγο ὅτι οἱ συντελεστές  $\alpha_j$  ( $j = 0, 1, \dots, v-1$ ) εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καὶ ὅχι συναρτήσεις.

"Ἄς ἀρχίσουμε μέ τήν όμογενή ἔξισωση (1). Εκτός ἀπό τή μηδε-

νική λύση  $y = 0$  πού ή (1) έχει πάντοτε, εύκολα διαβλέπει κανείς ότι ή (1) πρέπει νά έχει μιά λύση της μορφής

$$y = e^{\rho x} . \quad (3)$$

Πράγματι θέτοντας τήν (3) στήν (1) βρίσκουμε

$$e^{\rho x}(\rho^v + \alpha_{v-1}\rho^{v-1} + \dots + \alpha_1\rho + \alpha_0) = 0$$

και ἐπειδή  $e^{\rho x} \neq 0$ , ή (3) ἐπαληθεύει τήν (1) ἂν τό  $\rho$  εἶναι (πραγματική ή μιγαδική) ρίζα της ἀλγεβρικῆς ἐξίσωσης ν βαθμοῦ

$$\rho^v + \alpha_{v-1}\rho^{v-1} + \dots + \alpha_1\rho + \alpha_0 = 0 . \quad (4)$$

Τό πολυώνυμο βαθμοῦ ν στό ἀριστερό μέλος της (4) καλεῖται χαρακτηριστικό πολυώνυμο της γραμμικῆς διαφορικῆς ἐξίσωσης (1) μέ σταθερούς (πραγματικούς) συντελεστές τάξεως ν.

"Αν  $\rho$  εἶναι μιά (άπλη) πραγματική ρίζα της (4), τότε ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτήν ή (πραγματική) λύση (3) της (1).

"Αν  $\rho$  εἶναι μιά (άπλη) μιγαδική ρίζα της (4), τότε ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτήν ή (μιγαδική) λύση (3) της (1). Στήν τελευταία αὐτή περίπτωση ἀποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι τόσο τό πραγματικό δσο καὶ τό φανταστικό μέρος της μιγαδικῆς λύσης (3) ἀποτελοῦν πραγματικές λύσεις (καὶ μάλιστα ἀνεξάρτητες μεταξύ τους) της ἐξίσωσης (1).

"Ετσι π.χ. ἂν

$$\rho = k + \lambda i , \quad (5)$$

ή μιγαδική λύση (3) γράφεται

$$y = e^{\rho x} = e^{(k + \lambda i)x} = e^{kx} (\text{συνλ}x + i\eta\mu\lambda x).$$

Δημιουργοῦνται λοιπόν ἀπό τήν (5) οἱ δύο πραγματικές λύσεις

$$e^{kx} \text{συνλ}x \quad \text{καὶ} \quad e^{kx} \eta\mu\lambda x \quad (6)$$

τής όμοιγενοῦς έξισωσης (1).

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ (συζυγής) ρίζα  $\bar{\rho} = k - \lambda i$  τοῦ χαρακτηρι-  
στικοῦ πολυώνυμου - ἡ ὁποία πάντοτε συνοδεύει τὴν ρίζα (5) - δημι-  
ουργεῖ τίς πραγματικές λύσεις

$$e^{kx} \text{συνλ} x \quad \text{καὶ} \quad -e^{kx} \text{ημ} l x \quad (7)$$

πού εἶναι βέβαια ἀνεξάρτητες μεταξύ τους ὅχι ὅμως καὶ ἐναξάρτητες ἀπό  
τίς λύσεις (6).

Τό ὅτι οἱ λύσεις (6) εἶναι ἀνεξάρτητες μεταξύ τους προκύ-  
πτει ἀπό τὴν παρατήρηση ὅτι γι' αὐτές ἡ δρίζουσα τοῦ Wronski βρί-  
σκεται ὅτι εἶναι  $W(x) = \lambda e^{2kx} \neq 0$ .

"Ἄν λοιπόν ἡ έξισωση (1) ἦταν δευτέρας τάξεως, οἱ λύσεις (6)  
θά ἀποτελοῦσαν μιά βάση στό χῶρο τῶν λύσεων τῆς (1).

"Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ἡ έξισωση (4) ἔχει μιά διπλή πραγμα-  
τική ρίζα  $\bar{\rho}$ . Θά ἀποδείξουμε ὅτι ἀπό τῇ ρίζᾳ αὐτῇ δημιουργοῦνται δύο  
ἀνεξάρτητες μεταξύ τους πραγματικές λύσεις τῆς όμοιγενοῦς έξισωσης (1).  
Μία ἀπό τίς λύσεις αὐτές εἶναι ἡ (3). Ἡ ἄλλη εἶναι τῆς μορφῆς

$$y = (\alpha + \beta x)e^{\rho x} \quad (8)$$

ὅπου  $\alpha$  καὶ  $\beta$  τυχόντες ἀριθμοὶ πραγματικοί.

Πράγματι ἀπό τὴν (8) παίρνουμε διαδοχικά

$$y' = [\beta + \rho(\alpha + \beta x)]e^{\rho x}$$

$$y'' = [2\beta\rho + \rho^2(\alpha + \beta x)]e^{\rho x}$$

.....

$$y^{(v)} = [v\beta\rho^{v-1} + \rho^v(\alpha + \beta x)]e^{\rho x} .$$

Θέτοντας τίς (8) καὶ (9) στὴν έξισωση (1) παρατηροῦμε ὅτι αὐτή ἐπα-  
ληθεύεται σάν ταυτότητα ὡς πρός  $x$ , γιά τυχόντα  $\alpha$  καὶ  $\beta$ . Καὶ τοῦτο  
διότι εἶναι

$$\rho^v + \alpha_{v-1}\rho^{v-1} + \dots + \alpha_1\rho + \alpha_0 = 0 \quad (10)$$

καὶ

$$v\rho^{v-1} + (v-1)\alpha_{v-1}\rho^{v-2} + \dots + \alpha_1 = 0^{(*)}. \quad (11)$$

Έλέγχεται έπισης ότι ή δρίζουσα τοῦ Wronski γιά τίς λύσεις (3) καὶ (8) εἶναι

$$W(x) = \beta e^{\rho x} \neq 0$$

ξφ' ὅσον  $\beta \neq 0$ . "Αν λοιπόν ή διαφορική έξισωση (1) ήταν 2ας τάξεως καὶ ή άλγεβρική έξισωση (4) εἶχε σάν μόνες λύσεις τίς δύο ΐσες ρίζες  $\rho$ , οι συναρτήσεις (3) καὶ (8) θά άποτελοῦσαν μιά βάση στό χῶρο τῶν λύσεων τῆς δύμογενοῦς έξισωσης (1).

Ανάλογες σκέψεις πρός έκεινες πού κάναμε γιά μιά διπλή πραγματική ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου μποροῦν νά έπαναληφθοῦν καὶ στήν περίπτωση πού τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο τῆς δύμογενοῦς έξισωσης (1) συμβαίνει νά έχει μιά διπλή μιγαδική ρίζα. Δημιουργεῖ τότε ή διπλή αύτή ρίζα  $k + \lambda i$  δύο μιγαδικές λύσεις τῆς (1) τῆς μορφῆς

$$ce^{(k + \lambda i)x} \quad (12)$$

καὶ

$$(\alpha + \beta x)e^{(k + \lambda i)x}. \quad (13)$$

Η λύση (12) δίνει τίς δύο πραγματικές λύσεις

$$ce^{kx} \text{συνλ} x \quad \text{καὶ} \quad ce^{kx} \text{ημ} x \quad (12a)$$

καὶ ή λύση (13) δίνει τίς δύο πραγματικές λύσεις

$$(\alpha + \beta x)e^{kx} \text{συνλ} x \quad \text{καὶ} \quad (\alpha + \beta x)e^{kx} \text{ημ} x. \quad (13a)$$

(\*) Η έξισωση (11) ξέχνει διεδτούς ή ρ εἶναι διπλή ρίζα τῆς (10), εἶναι δέ φανερό ότι ἂν ένα πολυώνυμο  $\Pi(x)$  έχει διπλή ρίζα τήν  $x_0$  τότε

$$\Pi(x_0) = 0 \quad \text{καὶ} \quad \left( \frac{d\Pi(x)}{dx} \right)_{x=x_0} = 0.$$

"Ωστε άπό τήν διπλή μιγαδική ρίζα  $k + \lambda i$  τῆς ἀλγεβρικῆς ἔξισωσης (4) προκύπτουν τέσσερες<sup>(\*)</sup> πραγματικές λύσεις (οἱ (12a) καὶ (13a) τῆς διαφορικῆς ἔξισωσης (1). Μπορεῖ νά̄ ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ λύσεις (12a) καὶ (13a) εἶναι ἀνεξάρτητες καὶ ἐπομένως μποροῦν νά̄ χρησιμοποιηθοῦν δλες γιά τήν εύρεση τῆς βάσης τῆς δμογενοῦς ἔξισωσης (1).

### § 32. Γενική λύση τῆς δμογενοῦς ἔξισωσης.

"Ἄς δοῦμε τώρα τό πρόβλημα τῆς γενικῆς λύσης τῆς δμογενοῦς γραμμικῆς διαφορικῆς ἔξισωσης

$$y^{(v)} + \alpha_{v-1} y^{(v-1)} + \dots + \alpha_1 y^1 + \alpha_0 y = 0 . \quad (1)$$

Στήν ἔξισωση (1) ἀντιστοιχεῖ ἡ ἀλγεβρική ἔξισωση

$$\rho^v + \alpha_{v-1} \rho^{v-1} + \dots + \alpha_1 \rho + \alpha_0 = 0 . \quad (2)$$

Υποθέτουμε ὅτι λύθηκε ἡ (2) καὶ βρέθηκαν οἱ πραγματικές ρίζες  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$  μέ ἀντίστοιχες πολλαπλότητες  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$  καὶ οἱ μιγαδικές (χωρίς νά̄ γράφονται οἱ ἀντίστοιχες συζυγεῖς τους) ρίζες  $k_1 + i\lambda_1, k_2 + i\lambda_2, \dots, k_m + i\lambda_m$  μέ ἀντίστοιχες πολλαπλότητες  $n_1, n_2, \dots, n_m$ . Σύμφωνα μέ τό συμβολισμό αὐτό πρέπει

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_m + 2(n_1 + n_2 + \dots + n_m) = v .$$

"Ἔχουμε ἀποδείξει ὅτι ἀπό κάθε διπλή πραγματική ρίζα  $\rho$  τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου προκύπτουν δύο πραγματικές λύσεις τῆς (1), οἱ δόποιες μάλιστα εἶναι τῆς μορφῆς

$$y = e^{\rho x} \quad \text{καὶ} \quad y = (\alpha + \beta x)e^{\rho x} .$$

Μέ ὅμοιο τρόπο μπορεῖ νά̄ ἀποδειχθεῖ ὅτι ἀπό κάθε πραγματική ρίζα  $\rho_j$

---

(\*) Ἀπό τήν (διπλή) συζυγή ρίζα  $k - \lambda i$  τῆς (4) δέν προκύπτουν νέες (ἀνεξάρτητες ἀπό τύς (12a) καὶ (13a)) λύσεις.

( $j = 1, 2, \dots, \mu$ ) μέ πολλαπλότητα  $\zeta_j$  προκύπτουν  $\zeta_j$  τό πλήθος πραγματικές λύσεις της (1) της μορφῆς

$$e^{\rho_j x}, \Pi_1(x)e^{\rho_j x}, \Pi_2(x)e^{\rho_j x}, \dots, \Pi_{\zeta_j - 1}(x)e^{\rho_j x}, \quad (3)$$

ὅπου  $\Pi_1(x), \Pi_2(x), \dots, \Pi_{\zeta_j - 1}(x)$  εἶναι πολυώνυμα βαθμοῦ ( $\lambda$ ντιστοίχως) τό πολύ  $\lambda$ σού μέ  $1, 2, \dots, \zeta_j - 1$ .

Εἴδαμε ἐπίσης ὅτι μιά διπλή μιγαδική ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου δημιουργεῖ τέσσερες πραγματικές λύσεις της (1), οἱ ὁποῖες μάλιστα εἶναι τῆς μορφῆς (12α) καὶ (13α) τῆς § 31.

Γενικότερα μπορεῖ νά  $\lambda$ ποδειχθεῖ ὅτι κάθε μιγαδική ρίζα  $k_j + i\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) μέ πολλαπλότητα  $n_j$  δημιουργεῖ  $2n_j$  τό πλήθος πραγματικές λύσεις της (1), τῆς μορφῆς

$$e^{k_j x} \sigma_{\nu n_j x}, P_1(x)e^{k_j x} \sigma_{\nu n_j x}, P_2(x)e^{k_j x} \sigma_{\nu n_j x}, \dots, P_{n_j - 1}(x)e^{k_j x} \sigma_{\nu n_j x}$$

καὶ

(4)

$$e^{k_j x} \eta_{\mu \lambda_j x}, P_1(x)e^{k_j x} \eta_{\mu \lambda_j x}, P_2(x)e^{k_j x} \eta_{\mu \lambda_j x}, \dots, P_{n_j - 1}(x)e^{k_j x} \eta_{\mu \lambda_j x},$$

ὅπου τά  $P_1(x), P_2(x), \dots, P_{n_j - 1}$  εἶναι πολυώνυμα τοῦ  $x$  βαθμοῦ ( $\lambda$ ντιστοίχως) τό πολύ  $\lambda$ σου μέ  $1, 2, \dots, n_j - 1$ .

"Ἄς πάρουμε τώρα γιά ὅλα τά  $j = 1, 2, \dots, \mu$  τίς  $(\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_\mu)$  τό πλήθος λύσεις τῆς μορφῆς (3) καὶ γιά ὅλα τά  $j = 1, 2, 3, \dots, m$  τίς  $2(n_1 + n_2 + \dots + n_m)$  τό πλήθος πραγματικές λύσεις τῆς μορφῆς (4). Θά συγκεντρώσουμε μέ τόν τρόπο αὐτό ν τό πλήθος λύσεις τῆς δύο γενικής  $\epsilon$ ξίσωσης (1), τάξεως ν. Ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ λύσεις αὐτές εἶναι ἀνεξάρτητες καὶ ἔπομένως μποροῦν ν' ἀποτελέσουν μιά βάση στό διανυσματικό χῶρο τῶν λύσεων τῆς (1). Μποροῦμε τότε νά ποῦμε ὅτι ή  $\epsilon$ ξίσωση (1) λύθηκε πλήρως. "Ἄν  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_v(x)$  εἶναι ή βάση της, τότε ή γενική λύση τῆς (1) εἶναι

$$y = c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_v \varphi_v(x), \quad (5)$$

ὅπου  $c_1, c_2, \dots, c_v$  εἶναι ν αύθαίρετες πραγματικές σταθερές.

Έφαρμογή. Σάν έφαρμογή θά δοῦμε τήν περίπτωση ότι οι άρμονικοί ταλαντωτού μέντος άντισταση άναλογη της ταχύτητας. Η διαφορική έξισωση πού περιγράφει τήν κίνηση είναι

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \quad (6)$$

όπου  $m$  είναι ή μάζα του ύλικου σημείου,  $k > 0$  ο συντελεστής άναλογίας του ταλαντωτού και  $b > 0$  ο συντελεστής άναλογίας για την άντισταση. Η (6), πού έκφραζει ότι "μάζα έπειτα έπιτάχυνση = δύναμη", γράφεται άκομη

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (7)$$

είναι δηλαδή μιά δμογενής διαφορική έξισωση για τάξεως, μέσταθρούς συντελεστές.

"Αν θέσουμε

$$\frac{b}{2m} = \gamma, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad \text{καὶ} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},$$

βρίσκουμε ότι ρίζες της άντιστοιχης χαρακτηριστικής έξισωσης

$$m\rho^2 + b\rho + k = 0 \quad (8)$$

είναι οι

$$\rho_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \text{καὶ} \quad \rho_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (9)$$

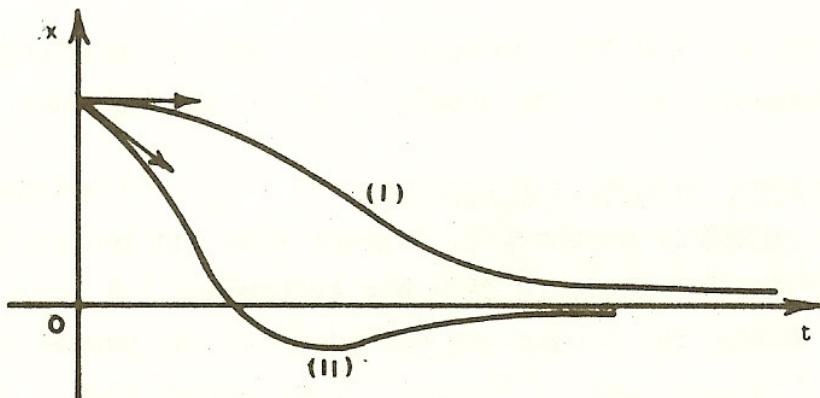
Η μορφή της λύσεως της (7) θά καθορισθεῖ, όπως βλέπουμε, άπό τό είδος τῶν ριζῶν της (8), άπό τό κατά πόσο δηλαδή οι ρίζες αὐτές είναι πραγματικές (ίσες ή διανισές) ή μιγαδικές. Από φυσική πλευρά αὐτό σημαίνει ότι άποφασιστική σημασία γιά τή μορφή της λύσης έχει τό γ (πού άποτελεῖ ένα μέτρο της άντιστασης) καὶ πιό συγκεκριμένα τό μέγεθος του γ σέ σύγκριση μέτρη γνωστή σάν φυσική συχνότητα  $\omega_0$  του άρμονικού ταλαντωτού. Διακρίνουμε λοιπόν τίς έξης περιπτώσεις:

(i). Περίπτωση με γάλης άντιστασης, ή, όπως άλλοι ωντες λέμε περίπτωση ισχυρῆς άπόσβεσης: ( $\gamma > \omega_0$ ). Οι δυο ρίζες  $\rho_1$  καὶ  $\rho_2$  είναι

τότε πραγματικές και μάλιστα άρνητικές. Γενική λύση της (7) είναι ή

$$x = C_1 e^{\rho_1 t} + C_2 e^{\rho_2 t}.$$

Για  $t \rightarrow \infty$  είναι  $\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0$ . Τό σημεῖο δηλαδή τείνει άσυμπτωτικά στό έλκτυκό κέντρο, άνεξάρτητα από τις άρχικές συνθήκες. Τό διάγραμμα  $x - t$  παίρνει μία από τις μορφές I ή II (Σχήμα 30), ανάλογα με τις άρχικές συνθήκες.



Σχήμα 30

"Αν π.χ. για  $t = 0$  έχουμε  $x = x_0 > 0$  και  $\dot{x} = 0$ , προκύπτει  
ὅτι

$$C_1 = -\frac{x_0 \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}, \quad C_2 = \frac{x_0 \rho_1}{\rho_1 - \rho_2}$$

και ή καμπύλη  $x = x(t)$  έχει τήν μορφή I.

Η καμπύλη II προκύπτει όν, για  $t = 0$  είναι  $x = x_0 > 0$  και  
 $\ddot{x} = v_0 < x_0 \rho_2$ . Βρίσκεται τότε, μετά από μερικές πράξεις, ότι

$$C_1 = -\frac{x_0 \rho_2 - v_0}{\rho_1 - \rho_2} \quad \text{και} \quad C_2 = \frac{x_0 \rho_1 - v_0}{\rho_1 - \rho_2}$$

και ότι, για

$$t = t_1 = \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \ln \frac{x_0 \rho_1 - v_0}{x_0 \rho_2 - v_0} > 0,$$

θά είναι  $x(t_1) = 0$ . Τό φυσικό νόημα αύτοῦ τοῦ τελευταίου αποτελέσματος είναι ότι τό σημεῖο, παρά τή μεγάλη άντισταση, θά τά καταφέ-

ρει νά περάσει (μία μόνο φορά φυσικά;) άπό τό έλκτικό κέντρο, όπου είναι τού δοθεῖ μιά αρκετά μεγάλη αρχική ταχύτητα πρός αύτό.

(ii). Περίπτωση κρίσιμης άντιστασης ( $\gamma = \omega_0$ ). "Εχουμε δύο λύσεις (μέ -γ) πραγματικές ρίζες. Η γενική λύση είναι

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-\gamma t} .$$

"Αποδεικνύεται κι εδώ ότι, ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες, παίρνει κανείς διαγράμματα  $x-t$  της μορφής I ή II τού Σχήματος 30.

(iii). Περίπτωση μικρής άντιστασης ( $\gamma < \omega_0$ ). Τά πράγματα άπό φυσική αποψη άλλαζουν ούσιαστικά. "Εχουμε τώρα δύο (συζυγεῖς) μιγαδικές ρίζες. Μία απ' αυτές (ή άλλη δέν ένδιαφέρει;) ή  $\rho_1 = -\gamma + i\omega_1$  είσαγει δύο λύσεις της διαφορικής έξισωσης (?) της μορφής (4), δηλαδή τις  $e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t$  και  $e^{-\gamma t} \cos \omega_1 t$ . "Εται γενική λύση της (?) είναι ή

$$x = e^{-\gamma t} (C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t) . \quad (10)$$

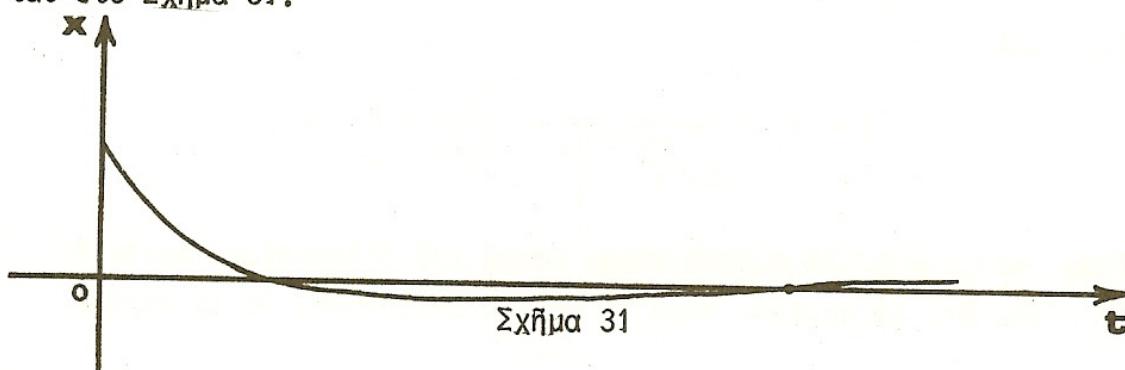
Συνήθως ή (10) γράφεται σάν

$$x = D e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t - \theta) \quad (11)$$

ὅπου

$$D = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \text{και} \quad \varepsilon\phi\theta = \frac{C_2}{C_1} .$$

Οι δύο σταθερές στήν γενική λύση (11) είναι τώρα ή  $D$  και ή  $\varepsilon\phi\theta$  καθορίζονται άπό τις αρχικές συνθήκες. Τό διάγραμμα  $x-t$  δίνεται στό Σχήμα 31.



Είναι βέβαια καὶ στήν περίπτωση αὐτή  $\frac{d\vartheta}{dt}(t) = 0$ . Τώρα δμας τό σημεῖο τείνει στό έλκτικό κέντρο  $O$ , παλινδρομώντας γύρω ἀπ' αὐτό.

Πρόβλημα. Θερμαίνουμε μέχρι τή θερμοκρασία  $\vartheta_0$  τό ἕνα ἄκρο  $A$  μιᾶς σιδηρένιας ράβδου  $P$  μὲ κυκλική διατομή καὶ πολύ μεγάλο μῆκος. Ζητοῦμε τήν κατανομή τῆς θερμοκρασίας κατά μῆκος τῆς ράβδου, δταν ἀποκατασταθεῖ ἰσορροπία. Φυσικά, θερμότητα ἀκτινοβολεῖται ἀπό τή ράβδο πρός τόν ἀέρα<sup>(\*)</sup>. Είναι πειραματικό δεδομένο δτι ἡ ποσότητα  $Q$  πού διέρχεται στή μονάδα τοῦ χρόνου (μὲ τό μηχανισμό τῆς ἀγωγιμότητας) ἀπό κάποια τομή  $S$  τῆς ράβδου είναι ἀνάλογη πρός τήν  $S$  καὶ πρός τήν πτώση τῆς θερμοκρασίας ἀνά μονάδα μῆκους κατά μῆκος τῆς ράβδου.

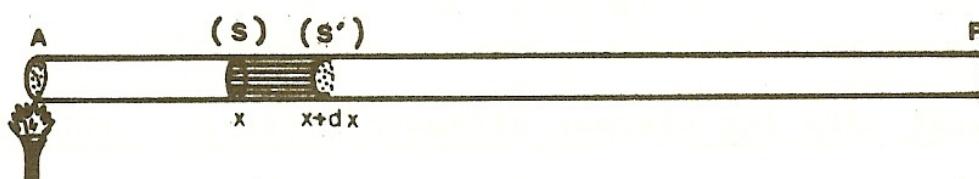
Σκεψτόμαστε ὡς ἔξης: Στή μονάδα τοῦ χρόνου ἀπό τή διατομή  $S$ , σέ ἀπόσταση  $x$  ἀπό τό ἄκρο  $A$  τῆς ράβδου, περνάει ποσό θερμότητας

$$Q = -kS \frac{d\vartheta}{dx} \quad | \quad k > 0 , \quad (12)$$

ὅπου  $\vartheta = \vartheta(x)$  είναι ἡ ζητούμενη συνάρτηση κατανομῆς τῆς θερμοκρασίας. Κάποιο μικρότερο ποσό θερμότητας  $dQ$  περνάει ἀπό τή διατομή  $(S')$ , σέ ἀπόσταση  $x+dx$  ἀπό τό  $A$ . Καὶ τοῦτο διότι ἀπό τόν κύλινδρο πού δρίζουν οἱ διατομές  $(S)$  καὶ  $(S')$  ἀκτινοβολεῖται πρός τόν ἀέρα ποσό θερμότητας

$$dQ = \lambda 2\pi \sqrt{\frac{S}{\pi}} dx (\vartheta - \vartheta_\alpha) \quad | \quad \lambda > 0 , \quad (13)$$

ὅπου  $\sqrt{S/\pi}$  είναι ἡ ἀκτίνα τῆς κυκλικῆς διατομῆς καὶ  $\vartheta_\alpha$  είναι ἡ (σταθερή) θερμοκρασία τοῦ ἀέρα.



Σχῆμα 32

(\*) Αὐτό γίνεται σύμφωνα μέ τόν νόμο φυχράνσεως τοῦ Νεύτωνα: Τό ποσό τῆς θερμότητας πού ἀκτινοβολεῖται είναι ἀνάλογο τῆς ἐπιφάνειας καὶ τῆς διαφορᾶς θερμοκρασίας τοῦ σώματος  $\vartheta$  καὶ τοῦ περιβάλλοντος  $\vartheta_\alpha < \vartheta$ .

Σύμφωνα μέ τόν ̄διο τύπο (12) ἀπό τήν ( $S'$ ) περνάει ποσό θερμότητας

$$Q - dQ = - kS \frac{d}{dx} (\vartheta + d\vartheta) = - kS \left( \frac{d\vartheta}{dx} + \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} dx \right) . \quad (14)$$

Από τίς (12), (13) και (14) προκύπτει ή διαφορική έξισωση

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} - \frac{2\lambda}{k} \sqrt{\frac{\pi}{S}} (\vartheta - \vartheta_a) = 0 . \quad (15)$$

Αν θέσουμε

$$\frac{2\lambda}{k} \sqrt{\frac{\pi}{S}} = \alpha^2 ,$$

ή (15) γράφεται

$$\frac{d^2 (\vartheta - \vartheta_a)}{dx^2} - \alpha^2 (\vartheta - \vartheta_a) = 0 , \quad (16)$$

είναι δηλαδή γραμμική διμογενής 2ας τάξεως μέ σταθερούς συντελεστές. Γενική λύση τῆς (16) είναι ή

$$\vartheta - \vartheta_a = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} .$$

Επειδή γιά  $x = 0$  είναι  $\vartheta = \vartheta_0$ , έχουμε

$$\vartheta_0 - \vartheta_a = A + B .$$

Γιά λόγους φυσικούς ἀλλωστε έχουμε ότι γιά  $x = \infty$  πρέπει νάναι  $\vartheta = \vartheta_a$ . Κι αὐτό σημαίνει ότι  $A = 0$ . Άρα  $B = \vartheta_0 - \vartheta_a$ . Τελικά έχουμε ότι

$$\vartheta = \vartheta_a + (\vartheta_0 - \vartheta_a)e^{-\alpha x} .$$

### § 33. Γενική λύση τῆς πλήρους έξισωσης. Εἰδικές περιπτώσεις.

Αν στή γενική λύση

$$y = c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_v \varphi_v(x)$$

της όμοιγενοῦς προσθέσουμε μιά μερική λύση  $y_o(x)$  της πλήρους έξισωσης, τότε ή

$$y = y_o(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_v \varphi_v(x) \quad (1)$$

Θά είναι ή γενική λύση της πλήρους.

Μιά μερική λύση  $y_o(x)$  της πλήρους μπορεῖ βέβαια νά βρεθεῖ από τόν τύπο (4) της § 29, όταν είναι γνωστή ή γενική λύση της δομογενοῦς.

Γιά δρισμένες δημαρχίες μορφές της συνάρτησης  $f(x)$  στό δεξιό μέλος της

$$y^{(v)} + a_{v-1} y^{(v-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (2)$$

είναι δυνατό νά βρεθεῖ μιά μερική λύση της (2) όπως έκτιθεται πιό κάτω.

### Περίπτωση (i)

$$f(x) = e^{rx} \Pi_n(x), \quad (3)$$

όπου  $\Pi_n(x)$  είναι πολυώνυμο τοῦ  $x$  βαθμοῦ  $n$  και ὅπου τό  $r$  δέ ν είναι ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου της έξισωσης (2). Αποδεικνύεται ότι ούπάρχει μιά μερική λύση της μορφῆς

$$y_o(x) = e^{rx} Q_n(x), \quad (4)$$

όπου  $Q_n(x)$  είναι πολυώνυμο βαθμοῦ  $n$ . Οἱ συντελεσταὶ τοῦ  $Q_n(x)$  προσδιορίζονται όταν ζητηθεῖ ή (4) νά ίκανοποιεῖ τὴν (2) δηλαδή τὴν

$$y^{(v)} + a_{v-1} y^{(v-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = e^{rx} \Pi_n(x). \quad (5)$$

### Παράδειγμα 1.

Η διαφορική έξισωση

$$y''' - 2y'' + y' = (x+1)e^{2x} \quad (6)$$

είναι της μορφῆς (5) μέ  $r = 2$ , ἐνῶ οἱ ρίζες τοῦ χαρακτηριστικοῦ πο-

λυώνουμος  $\rho^3 - 2\rho^2 + \rho = 0$  καὶ ἡ (διπλή ρίζα)  $\rho = 1$ .

Ζητοῦμε λοιπόν μερική λύση τῆς (6) τῆς μορφῆς

$$y_O(x) = (\alpha x + \beta)e^{2x} . \quad (7)$$

Θέτοντας τὴν (7) στὴν (6), βρίσκουμε δτι  $\alpha = \frac{1}{2}$  καὶ  $\beta = -\frac{3}{4}$ . Άρα, ὅπως μπορεῖ καὶ νά ελεγχθεῖ, μία μερική λύση τῆς (6) εἶναι ἡ

$$\phi(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^{2x} . \quad (8)$$

"Αν στὴν μορφὴ (3) τὸ  $x$  συμβαίνει νά εἶναι ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τῆς (2), ἀναζητεῖται μερική λύση τῆς μορφῆς

$$y_O(x) = x^\zeta e^{rx} Q_n(x) , \quad (9)$$

ὅπου  $\zeta$  ἡ πολλαπλότητα τῆς ρίζας  $r$ .

### Παράδειγμα 2.

Αντὶ τῆς (6) ἄς θεωρήσουμε τώρα τὴ διαφορική ἔξισωση

$$y''' - 2y'' + y' = (x+1)e^x . \quad (10)$$

Θά ζητήσουμε μερική λύση τῆς μορφῆς

$$y_O(x) = x^2(ax + \beta)e^x . \quad (11)$$

Από τὴν ἀπαίτηση νά ἐπαληθεύει ἡ (11) τὴν πλήρη ἔξισωση (10) βρίσκεται, μετά ἀπό τίς πράξεις, δτι πρέπει  $\alpha = \frac{1}{6}$ ,  $\beta = 0$ . Δηλαδή μία μερική λύση τῆς (10) εἶναι ἡ

$$y_O(x) = \frac{1}{6}x^3e^x .$$

### Περίπτωση (ii).

$$f(x) = e^{\omega_1 x} (\Pi_n(x) \sigma \nu \omega_2 x + Q_m(x) \eta \mu \omega_2 x) , \quad (12)$$

ὅπου  $\omega_1 + i\omega_2$  δέντρο είναι ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυώ-

νύμου τῆς (2) καὶ τὰ  $\Pi_n(x)$ ,  $Q_m(x)$  εἶναι πολυώνυμα τοῦ  $x$ , βαθμοῦ  $n$  καὶ  $m$  ἀντιστοίχως. Αναζητεῖται μερική λύση τῆς πλήρους ἐξίσωσης (2) τῆς μορφῆς

$$y_O(x) = e^{\omega_1 x} [P_k(x) \sin \omega_2 x + P_k^*(x) \cos \omega_2 x], \quad (13)$$

ὅπου  $P_k(x)$  καὶ  $P_k^*(x)$  εἶναι πολυώνυμα τοῦ  $x$  βαθμοῦ  $k = \max\{n, m\}$ .

### Παράδειγμα 3.

Γιά τὴ διαφορική ἐξίσωση

$$y'' + y = e^x (x \sin x + \cos x) \quad (14)$$

παρατηροῦμε ὅτι τό δεύτερο μέλος της εἶναι τῆς μορφῆς (12) μὲν  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 1$  καὶ ὅτι δὲ μιγαδικός ἀριθμός  $\omega_1 + i\omega_2 = 1+i$  δέν εἶναι ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου  $r^2+1$ <sup>(\*)</sup>.

Θά ἀναζητηθεῖ ἐπομένως μερική λύση τῆς μορφῆς (13) μὲν  $k = \max\{1, 0\} = 1$ , ἢτοι

$$y_O(x) = e^x \{ (\alpha x + \beta) \sin x + (\gamma x + \delta) \cos x \}. \quad (15)$$

Από τήν ἀπαίτηση νά εἶναι ἡ (15) λύση τῆς (14) θά προκύψει ἔνα ἀλγεβρικό γραμμικό σύστημα τεσσάρων ἐξισώσεων μὲν ἀγνώστους τά  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Μετά τίς πράξεις βρίσκεται ὅτι  $\alpha = \frac{1}{5}$ ,  $\beta = -\frac{12}{25}$ ,  $\gamma = \frac{2}{5}$ ,  $\delta = -\frac{9}{25}$ .

"Αρα ἡ ζητούμενη μερική λύση τῆς (14) εἶναι ἡ

$$y_O(x) = \frac{1}{25} e^x [ (5x - 12) \sin x + (10x - 9) \cos x ]. \quad (16)$$

"Αν στή μορφή (12) ὁ μιγαδικός ἀριθμός  $\omega_1 + i\omega_2$  συμβαίνει νά εἶναι ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τῆς (2), ἀναζητεῖται μερική λύση τῆς μορφῆς

(\*) Οἱ ρίζες αὐτοῦ τοῦ πολυωνύμου εἶναι  $\omega_1 + i\omega_2 = 0 \pm i$ .

$$y_O(x) = x^q e^{\omega_1 x} (P_k(x) \sin \omega_2 x + P_k^*(x) \cos \omega_2 x), \quad (17)$$

όπου  $q$  είναι ή πολλαπλότης τῆς ρίζας  $\omega_1 + i\omega_2$ .

#### Παράδειγμα 4.

\* Αντέ τῆς (14), ας θεωρήσουμε τήν έξισωση

$$y'' + y = x \eta mx \quad . \quad (18)$$

Τό δεύτερο μέλος τῆς (18) είναι τῆς μορφῆς (12) μέ  $\omega_1 = 0$  καὶ  $\omega_2 = 1$  (δηλαδή μέ τό  $0 + 1i = i$  ἀπλή ( $q = 1$ ) ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου  $\rho^2 + 1$ ) καὶ  $P_n(x) = 0$ ,  $Q_m(x) = x$ , δηλαδή  $k = \text{Max} \{n, m\} = 1$ . Θά άναζητηθεῖ λοιπόν μερική λύση τῆς (18) τῆς μορφῆς (17), ἵτοι

$$y_O(x) = x [ (ax + \beta) \sin x + (\gamma x + \delta) \cos x ] \quad . \quad (19)$$

\* Η ἀπαίτηση νά είναι ή (19) λύση τῆς έξισωσης (18) μᾶς ὀδηγεῖ σ' ἔνα γραμμικό ἀλγεβρικό σύστημα τεσσάρων έξισώσεων, μέ ἀγνώστους τά  $a, b, \gamma, \delta$ . Μετά τίς πράξεις βρίσκουμε ὅτι  $a = -\frac{1}{4}$ ,  $b = 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\delta = \frac{1}{4}$ .

\* Επομένως ή ζητούμενη μερική λύση  $y_O(x)$  τῆς έξισωσης (18) είναι ή

$$y_O(x) = \frac{1}{4} x (-x \sin x + \cos x) \quad . \quad (20)$$

#### Εφαρμογή.

Θά μελετήσουμε τή λεγόμενη ἐξαναγκασμένη ταλάντωση τωση τῆν περίπτωση δηλαδή τοῦ ἀρμονικοῦ ταλαντωτοῦ μέ ἀντίσταση<sup>(\*)</sup>, κάτω ἀπό τήν ἐπίδραση τῆς πρόσθετης περιοδικῆς δύναμης

$$F = F_O \sigma v w t \quad .$$

---

(\*) Βλ. \*Εφαρμογή § 32.

Είχαμε βρει και είχαμε λύσει τήν έξισωση

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad . \quad (21)$$

Τώρα ξέχουμε νά λύσουμε τήν έξισωση

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad . \quad (22)$$

Η μορφή τοῦ 2ου μέλους τῆς (22) μᾶς δδηγεῖ στό νά ζητήσουμε μιά μερική λύση τῆς (22) τής μορφῆς

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \eta \mu \omega t \quad ,$$

η, καλλίτερα, τής μορφῆς

$$x = B \sin(\omega t - \varphi) \quad . \quad (23)$$

Μετά τίς πράξεις βρίσκονται οī σταθερές  $B$  και  $\varphi$  τῆς (23) έτσι ώστε αὐτή νά ικανοποιεῖ, γιά όλα τά  $t$ , τήν (22). Προκύπτει ὅτι

$$\varepsilon \varphi \varphi = \frac{b \omega}{k - m \omega^2} \quad (24\alpha)$$

καὶ

$$B = \frac{F_0}{\sqrt{b^2 \omega^2 + (k - m \omega^2)^2}} \quad . \quad (24\beta)$$

Η γενική λύση τῆς (22) θάναι τό άθροισμα τῆς (23) και τῆς γενικῆς λύσης τῆς (21). Τό ποιά θάναι αὐτή ή λύση θά έξαρτηθεῖ ἀπό τίς τιμές τῶν γ και  $\omega_0^{(*)}$ . "Ετσι π.χ. στήν περίπτωση μικρῆς ἀντίστασης ( $\gamma < \omega_0$ ) θάχουμε, σύμφωνα μέ τήν έξισωση (11) τῆς § 32,

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{b^2 \omega^2 + (k - m \omega^2)^2}} \sin(\omega t - \varphi) + D e^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t - \theta) \quad . \quad (25)$$

(\*) Υπενθυμίζομε τή σημασία τῶν συμβόλων. Εἶναι

$$\gamma = \frac{b}{2m} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad καὶ \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad .$$

Σχόλια. Η λύση τής (22) είναι άθροισμα μιᾶς περιοδικῆς συνάρτησης καὶ ἐνός δρου πού τείνει στό μηδέν καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Καθώς δηλαδή προχωρεῖ ὁ χρόνος, κυριαρχεῖ σάν λύση ὁ περιοδικός δρος (23) μέ περίοδο  $2\pi/\omega$  καὶ πλάτος

$$B = \frac{F_0}{\sqrt{b^2 \omega^2 + (k - m\omega^2)^2}} .$$

Αὐτὴ είναι γνωστή σάν ὁ ρική λύση τῆς ἔξαναγκασμένης ταλάντωσης.

Χαρακτηριστικὴ είναι ἡ ἔξαρτηση τοῦ πλάτους τῆς δρικῆς λύσης τόσο ἀπό τὴν "συχνότητα" ω τῆς περιοδικῆς δύναμης  $F_0$  συνωτ., δ-σο καὶ ἀπό τὸν "συντελεστὴν τριβῆς"  $b$ . Εἶναι φυσικό νά ζητήσει κανεὶς ἐκεῖνο τό ω γιά τό δοποῦ τό πλάτος  $B$  γίνεται μέγιστο. Αποδεικνύεται ὅτι αὐτὸ συμβαίνει γιά

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} .$$

Γι' αὐτὴ τὴν τιμὴ τοῦ ω λέμε ὅτι ἔχουμε συντονισμό. "Οπως βλέπουμε συντονισμός ἐμφανίζεται μόνο γιά σχετικά μικρή ἀντίσταση (πρέπει  $2\gamma^2 \leq \omega_0^2$ ). Εἰδικά γιά  $b = 0$  εἶναι καὶ  $\gamma = 0$  καὶ ὁ συντονισμός ἐμφανίζεται γιά συχνότητα ω ἵση μέ τῇ φυσική συχνότητα τοῦ ἀρμονικοῦ ταλαντωτοῦ. Τό μέγιστο πλάτος  $B$  τῆς ταλάντωσης βρίσκεται ἵσο μέ  $F_0/b\omega_1$ . Αὐτό τό μέγιστο πλάτος ἀπειρίζεται ὅταν  $b = 0$ , ὅταν δηλαδὴ δέν ὑπάρχει τριβή.

§ 34. Ἐξισώσεις πού ἀνάγονται σὲ γραμμικές διαφορικές μέ σταθερούς συντελεστές (Euler, Lagrange).

a) Ἐξίσωση τοῦ Euler.

Εἶναι διαφορική ἐξίσωση τῆς μορφῆς

$$\alpha_v x^v y^{(v)} + \alpha_{v-1} x^{v-1} y^{(v-1)} + \dots + \alpha_1 xy + \alpha_0 y = f(x) , \quad (1)$$

μέ τήν  $f(x)$  συνεχή σέ κάποιο διάστημα  $0 < \alpha < x < \beta$  καὶ  $\alpha \neq 0$ . Η ἔξισωση (1) εἶναι γραμμική τάξεως ν, μέ συντελεστές συναρτήσεις τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς  $x$ . Οἱ συναρτήσεις αύτές δέν εἶναι τυχαῖες ἀλλά τῆς συγκεκριμένης μορφῆς πού βλέπουμε στό ἀριστερό μέλος τῆς (1). Συμβαίνει λοιπόν δι μετασχηματισμός.

$$x = e^z \quad (2)$$

νά ἀνάγει τή λύση τῆς (1) σέ λύση μιᾶς διαφορικῆς ἔξισωσης τάξεως ν ἀλλά μέ σταθερούς συντελεστές.

### Παράδειγμα 1.

Η ἔξισωση

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' - 2xy' = 2x - 4 \quad | \quad x > 0 \quad (3)$$

εἶναι τύπου Euler.

Έφαρμόζουμε λοιπόν τὸν μετασχηματισμό (2). Έχουμε τότε

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{e^z dz} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz} ,$$

δηλαδή

$$xy' = \frac{dy}{dz} . \quad (4)$$

Παραγωγίζοντας τήν (4), ώς πρός  $x$ , παίρνουμε

$$y' + xy'' = \frac{d^2y}{dz^2} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \frac{d^2y}{dz^2} ,$$

ή

$$xy' + x^2 y'' = \frac{d^2y}{dz^2} ,$$

ή, σύμφωνα καὶ μέ τήν (4),

$$x^2 y'' = \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} . \quad (5)$$

Παρατηροῦμε δηλαδή ἀπό τίς (4) καὶ (5) ὅτι οἱ παραστάσεις  $xy'$  καὶ  $x^2 y''$  πού ἐμφανίζονται στήν ἔξισωση Euler ἐκφράζονται σάν γραμ-

μικές έκφράσεις τῶν  $dy/dz$  καὶ  $d^2y/dz^2$ . Τό τοδι συμβαίνει καὶ πιὸ κάτω. Ξαναπαραγγίζοντας, ώς πρός  $x$ , τά δύο μέλη τῆς (5), βρίσκουμε, μετά ἀπό κάποιες πράξεις,

$$x^3 y''' = \frac{d^3 y}{dz^3} - 3 \frac{d^2 y}{dz^2} + 2 \frac{dy}{dz} . \quad (6)$$

Ἐτοι ἡ ἔξισωση (3) γίνεται

$$\frac{d^3 y}{dz^3} - \frac{d^2 y}{dz^2} - 2 \frac{dy}{dz} = 2e^z - 4 , \quad (7)$$

γίνεται δηλαδή γραμμική μὲν σταθερούς συντελεστές.

Ἡ διμογενής ἔξισωση πού ἀντιστοιχεῖ στὴν (7) εἶναι ἡ

$$\frac{d^3 y}{dz^3} - \frac{d^2 y}{dz^2} - 2 \frac{dy}{dz} = 0$$

καὶ ἡ γενική της λύση βρίσκεται εύκολα δτι εἶναι ἡ

$$y = C_1 + C_2 e^{-z} + C_3 e^{2z} .$$

Αὐτό σημαίνει δτι γενική λύση τῆς ἀντιστοιχης στὴν (3) διαφορικῆς ἔξισωσης εἶναι ἡ

$$y = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3 x^2 .$$

Ἀπομένει νά βρεθεῖ μιά μερική λύση τῆς (3). Ἀναζητεῖται μιά τέτοια λύση τῆς μορφῆς  $y_O = \alpha \ln x + \beta x$  καὶ βρίσκεται πράγματι δτι  $y_O = 2 \ln x - x$ .

Ωστε γενική λύση τῆς (3) εἶναι ἡ

$$y = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3 x^2 + 2 \ln x - x .$$

β) Ἐξισωση τοῦ Lagrange.

Εἶναι διαφορική ἔξισωση τῆς μορφῆς

$$\sum_{k=0}^{\nu} a_k (bx + c)^k y^{(k)} = f(x) , \quad (8)$$

μέ τήν  $f(x)$  συνεχή σέ κάποιο διάστημα στό όποιο  $bx + c > 0$ . Πρόκειται όπως βλέπουμε γιά μιά περίπτωση γενικότερη από έκείνη τοῦ *Euler*. Ἡ λύση εἶναι ἡ λύση. Γίνεται δέ μετασχηματισμός

$$bx + c = e^z \quad (9)$$

καὶ ἡ (8) καταλήγει σέ γραμμική ἔξισωση μέ σταθερούς συντελεστές.

### Παράδειγμα 2.

$$(x+1)^2 y'' + (x+1)y' + y = 0 \quad | \quad x+1 > 0 . \quad (10)$$

Μέ τόν μετασχηματισμό  $x+1 = e^z$  ἡ (10) γίνεται

$$\frac{d^2y}{dz^2} + y = 0 . \quad (11)$$

Γενική λύση τῆς (11) εἶναι ἡ  $y = C_1 \sigmavv + C_2 \etavv$ .

Ἐπομένως γενική λύση τῆς (10) εἶναι ἡ

$$y = C_1 \sigmavv(\ln(x+1)) + C_2 \etavv(\ln(x+1)) .$$

### § 35. Αναγωγή γραμμικοῦ συστήματος σέ γραμμική διαφορική ἔξισωση.

"Έχουμε μιλήσει στήν § 26 γιά τίς όμοιότητες καὶ τίς διαφορές πού ἔχουν οἱ διανυσματικοί χῶροι τῶν λύσεων ἐνός όμογενοῦς συστήματος διαφορικῶν ἔξισώσεων καὶ μιᾶς όμογενοῦς διαφορικῆς ἔξισωσης ἀνωτέρας τάξεως. Καὶ ἔχουμε ύποδείξει πῶς μποροῦμε νά δηγήσουμε τή λύση τοῦ ἐνός προβλήματος στό ἄλλο. Καὶ ὅσα εἴπαμε λισχύουν εἴτε οἱ συντελεστές εἶναι σταθεροί εἴτε εἶναι συναρτήσεις τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς. "Αλλωστε μιά τάτοια ἀναγωγή μπορεῖ νά γίνει καὶ στήν περίπτωση μή όμογενῶν συστημάτων ἡ ἔξισώσεων.

Στήν πράξη τώρα καταφεύγουμε συχνά σε άναγωγή είτε εξ αρχῆς είτε από κάποιο σημεῖο καὶ πέρα. "Ολα ἀφήνονται στήν κρίση αὐτοῦ πού ἐπιχειρεῖ νά λύσει τό σύστημα. Τά διαιτέρα - μικρά ἄλλωστε - πρόβληματα πού δημιουργοῦνται από τήν ἐφαρμογή αὐτῆς τῆς μεθόδου θά τά ἐπισημάνουμε στά παραδείγματα πού ἀκολουθοῦν.

### Παράδειγμα 1.

Νά λυθεῖ τό σύστημα

$$y_1' = -2y_1 - 4y_2 + 1 + 4x \quad (1\alpha)$$

$$y_2' = -y_1 + y_2 + \frac{3}{2}x^2 . \quad (1\beta)$$

Παραγωγίζουμε ὡς πρός  $x$  τήν (1α) όπότε

$$y_1'' = -2y_1' - 4y_2' + 4 . \quad (2)$$

Τήν  $y_2'$ , πού ἐμφανίζεται στό δεύτερο μέλος, τήν ἐκφράζουμε, μέ τή βοήθεια τῶν (1α) καὶ (1β), σάν συνάρτηση τῶν  $x, y_1$  καὶ  $y_1'$ . Ή (2) γίνεται τότε

$$y_1'' + y_1' - 6y_1 = -6x^2 - 4x + 3 . \quad (3)$$

Η (3) εἶναι 2ας τάξεως, πλήρης γραμμική ἐξίσωση, μέ σταθερούς συντελεστές. Γενική λύση τῆς (3) εἶναι ἡ

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x^2 + x . \quad (4)$$

Εἰσάγουμε τήν (4) στήν (1β), όπότε παίρνουμε τήν γραμμική ἐξίσωση 1ης τάξεως

$$y_2' - y_2 + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{2}x^2 + x = 0 , \quad (5)$$

μέ ἄγνωστη τή συνάρτηση  $y_2$  καὶ γενική λύση τήν

$$y_2 = Ce^x - C_1 e^{2x} + \frac{1}{4}C_2 e^{-3x} - \frac{1}{2}x^2 . \quad (6)$$

"Οπως βλέπουμε, ή διοκλήρωση τῆς (5) εἰσάγει μιά καινούργια σταθερά, τὴν  $C$ . Ξέρουμε όμως ότι αὐτή ή σταθερά δέν μπορεῖ νάναι αύθαιρετη, γιατί ή γενική λύση τοῦ συστήματος (1) πρέπει νά περιέχει δύο σταθερές. Πράγματι ἂν ζητήσουμε νά έπαληθεύσουμε τὴν (1a) μὲ τίς συναρτήσεις (4) καὶ (6), βρίσκουμε ότι  $C = 0$ .

"Εχουμε λοιπόν τελικά τὴν ἔξης γενική λύση τοῦ συστήματος (1):

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x^2 + x$$

$$y_2 = -C_1 e^{2x} + \frac{1}{4} C_2 e^{-3x} - \frac{1}{2} x^2.$$

### Παράδειγμα 2.

Νά λυθεῖ τό σύστημα

$$\ddot{x} = 2\omega \eta \mu \dot{y} \quad (7a)$$

$$\ddot{y} = -2\omega \eta \mu \dot{x} - 2\omega \sigma \nu \dot{z} \quad (7b)$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega \sigma \nu \dot{y}, \quad (7c)$$

μέ τίς ἔξης ἀρχικές συνθήκες: Γιά  $t = 0$  εἶναι

$$\begin{aligned} x &= 0, & y &= 0, & z &= h \\ \dot{x} &= 0, & \dot{y} &= 0, & \dot{z} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Σχόλιο. Τό σύστημα (7)<sup>(\*)</sup> περιγράφει τὴν κίνηση ἐνός ὑλικοῦ σημείου πού ὑπόκειται στὴν ἐπίδραση μόνο τοῦ βάρους του, σὲ ἕνα μὴ ἀδρανειακό σύστημα συντεταγμένων  $Oxyz$ , στερεά δεμένο μέ τῇ Γῇ καὶ προσανατολισμένο ἔτσι ὥστε δὲ ημιάξονας  $Ox$  νά κατευθύνεται πρὸς τὸ Νότο, δὲ  $Oy$  πρὸς τὴν Ἀνατολή καὶ δὲ  $Oz$  πρὸς τὸ ζενίθ τοῦ παρατηρητοῦ  $O$ . Τό ω εἶναι ή σταθερή γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τῆς

---

(\*) Βλ. Ι. Χατζηδημητρίου "Θεωρητική Μηχανική". Τόμος Ι.

Γῆς γύρω ἀπό τὸν ἄξονά της, φεῖναι τὸ γεωγραφικό πλάτος τοῦ τόπου καὶ  $\vartheta$  εἶναι ἡ γνωστὴ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας κοντά στὴν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. Οἱ ἀρχικές συνθῆκες (8) δηλῶνουν ὅτι ἀρχικά τὸ ὑλικό σημεῖο ἀφήνεται χωρίς ἀρχική ταχύτητα, ἀπό ψύος  $h$  νά πέσει πάνω στὴ Γῆ.

Γιά τή λύση του ἦς παρατηρήσουμε πρῶτα ὅτι τὸ (?) εἶναι ἔνα γραμμικό σύστημα τριῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων 2ας τάξεως. Φυσικά θά μπορούσαμε νά τὸ κάνουμε σύστημα ἔξι ἐξισώσεων 1ης τάξεως. 'Αντ' αὐτοῦ παρατηροῦμε ὅτι μιά πρώτη δλοκλήρωση τῶν ἐξισώσεων (?) εἶναι ἀμέσως δυνατή. "Αν μάλιστα ληφθοῦν ὑπόψη οἱ ἀρχικές συνθῆκες (8), ἡ δλοκλήρωση αὐτή μᾶς δίνει ἀμέσως

$$\dot{x} = 2\omega \eta \mu \varphi y \quad (9\alpha)$$

$$\dot{y} = -2\omega \eta \mu \varphi x - 2\omega \sigma \nu \varphi z + 2\omega \kappa \sigma \nu \varphi \quad (9\beta)$$

$$\dot{z} = -gt + 2\omega \sigma \nu \varphi y . \quad (9\gamma)$$

Τὸ (9) εἶναι σύστημα γραμμικό μή ὁμογενές, τριῶν ἐξισώσεων, μέ σταθερούς συντελεστές. Κι ἀπό τὸ σημεῖο αὐτὸ καὶ πέρα θά μπορούσαμε νά προχωρήσουμε δρθόδοξα. 'Αντ' αὐτοῦ θά κάνουμε κάτι ἄλλο. Θά παραγγίσουμε τὴν (9β) ὡς πρός  $t$  καὶ τὰ  $\dot{x}$  καὶ  $\dot{z}$  πού θά ἐμφανιστοῦν στό β' μέλος θά τὰ πάρουμε ἀπό τίς (9α) καὶ (9γ). Θά καταλήξουμε ἔτσι στὴν ἐξίσωση.

$$\ddot{y} + 4\omega^2 y = 2\omega \sigma \nu \varphi t, \quad (10)$$

πού εἶναι 2ας τάξεως, μέ ἄγνωστη τή συνάρτηση  $y$ . Μιά μερική λύση τῆς (10) εἶναι ἡ

$$\frac{2\omega \sigma \nu \varphi}{4\omega^2} t .$$

Γενική λύση τῆς (10) εἶναι ἡ

$$y = \frac{\sigma \nu \varphi}{2\omega} t + C_1 \eta \mu 2\omega t + C_2 \sigma \nu 2\omega t .$$

Σύμφωνα μὲ τίς ἀρχικές συνθῆκες, προκύπτει ὅτι

$$C_1 = -\frac{g\sigma v \varphi}{4\omega^2} \quad \text{καὶ} \quad C_2 = 0.$$

Βρίσκουμε λοιπόν τελικά

$$y = \frac{g\sigma v \varphi}{2\omega} \left( t - \frac{1}{2\omega} \eta \mu 2\omega t \right). \quad (11\beta)$$

Τώρα πού βρέθηκε ή  $y = y(t)$  τόσο ή (9α) σο καὶ ή (9γ) μποροῦν νά όλοκληρωθοῦν, κάθε μιά χωριστά. Δέν ξεχνᾶμε τίς άρχικές συνθήκες. Οι πράξεις μᾶς δίνουν

$$x = g\eta \mu \varphi \left( \frac{t^2}{2} - \frac{1 - \sigma v \eta 2\omega t}{4\omega^2} \right) \quad (11\alpha)$$

καὶ

$$z = -\frac{1}{2} gt^2 + g\sigma v^2 \varphi \left( \frac{t^2}{2} - \frac{1 - \sigma v \eta 2\omega t}{4\omega^2} \right) + h. \quad (11\gamma)$$