ΚΕΦΑΛΑΙΟ **3**

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Α. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

§ 21. Ὁρισμοί - Μεθοδολογία - Σχετικά θεωρήματα.

Πρόκειται γιά ἕνα σύστημα διαφορικῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς

$$
\begin{aligned}
\psi_1' &= f_{11}(x)\psi_1 + f_{12}(x)\psi_2 + \ldots + f_{1\nu}(x)\psi_\nu + f_{10}(x) \\
\psi_2' &= f_{21}(x)\psi_1 + f_{22}(x)\psi_2 + \ldots + f_{2\nu}(x)\psi_\nu + f_{20}(x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi_\nu' &= f_{\nu 1}(x)\psi_1 + f_{\nu 2}(x)\psi_2 + \ldots + f_{\nu\nu}(x)\psi_\nu + f_{\nu 0}(x)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ἤ συντομότερα

$$\psi_i' = \sum_{j=1}^{\nu} f_{ij}(x)\psi_j + f_{i0}(x) \;\Big|\; i = 1, 2, \ldots, \nu \quad . \tag{2}$$

Μπορεῖ ἀκόμη συμβολικά νά γραφεῖ ἕνα γραμμικό σύστημα ν διαφορικῶν ἐξισώσεων καί ὡς ἑξῆς:

$$\bar{\psi}' = F(x)\bar{\psi} + \bar{f}_0(x) \quad , \tag{3}$$

ὅπου μέ $F(x)$, ἤ ἁπλῶς F, συμβολίζουμε τόν πίνακα (τάξεως $\nu \times \nu$)

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \cdots f_{1\nu} \\ f_{21} & f_{22} \cdots f_{2\nu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{\nu 1} & f_{\nu 2} \cdots f_{\nu\nu} \end{pmatrix} \tag{4}$$

με στοιχεῖα τίς ν^2 τό πλῆθος γνωστές συναρτήσεις

$$f_{ij}(x) \quad | \quad \alpha < x < \beta \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu \quad j = 1, 2, \ldots, \nu$$

μέ

$$\bar{f}_o(x) = (\text{συμβ}) = \begin{pmatrix} f_{10}(x) \\ f_{20}(x) \\ \cdots\cdots \\ f_{\nu 0}(x) \end{pmatrix} \tag{5}$$

τόν πίνακα - διάνυσμα στήλη τῶν γνωστῶν ἐπίσης συναρτήσεων

$$f_{i0}(x) \quad | \quad \alpha < x < \beta \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu$$

καί μέ

$$\bar{\psi} = (\text{συμβ}) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_\nu \end{pmatrix} \tag{6}$$

τόν πίνακα-διάνυσμα στήλη τῶν ζητούμενων συναρτήσεων $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$.. ..$\psi_\nu(x)$ | $\alpha < x < \beta$.

Στό ἀριστερό μέλος τῆς *(3)* νοεῖται σάν $\bar{\psi}'$ ὁ πίνακας

$$\bar{\psi}' = \begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \\ \vdots \\ \psi_\nu' \end{pmatrix} \tag{7}$$

ἐνῶ οἱ πράξεις πού σημειώνονται στό δεύτερο μέλος τῆς (3) εἶναι πολλαπλασιασμός καί πρόσθεση πινάκων.

Θά ὑποθέσουμε στά ἑπόμενα ὅτι ὅλες οἱ συναρτήσεις-στοιχεῖα τῶν πινάκων (4) καί (5) εἶναι συνεχεῖς στό πεδίο ὁρισμοῦ τους $\alpha<x<\beta$.

Θά καλοῦμε λύση τοῦ συστήματος (1) ἤ (3) κάθε νιάδα συναρτήσεων

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\nu(x) \mid \alpha < x < \beta \tag{8}$$

ἤ συμβολικά κάθε διάνυσμα - πίνακα

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \cdots\cdots \\ \varphi_\nu(x) \end{pmatrix} \tag{9}$$

τέτοιο ὥστε

$$\bar{\varphi}'(x) = F\bar{\varphi}(x) + \bar{f}_o(x) \tag{10}$$

γιά ὅλα τά $x \in (\alpha, \beta)$.

Ἄν ἡ (8) εἶναι λύση τοῦ συστήματος (1) τότε τό σύνολο τῶν σημείων $\{x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\nu(x)\}$ γιά ὅλα τά $x \in (\alpha,\beta)$ εἶναι ἡ ε ἰ κ ό ν α αὐτῆς τῆς λύσεως σέ ἕνα τόπο $\Omega \subseteq R^{\nu+1}$. Ἄν ξ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος (α,β) καί καλέσουμε

$$n_1 = \varphi_1(\xi), \; n_2 = \varphi_2(\xi), \ldots, \; n_\nu = \varphi_\nu(\xi),$$

λέμε ὅτι ἡ εἰκόνα τῆς λύσης, ἤ ἁπλούστερα, ἡ λύση τοῦ συστήματος (1), περνᾶ ἀπό τό σημεῖο $\Xi(\xi, n_1, n_2, \ldots n_\nu)$ τοῦ χώρου $R^{\nu+1}$.

Ὅλα τά θεωρήματα ὑπάρξεως λύσεως διαφορικῶν ἐξισώσεων (§ 3) γενικεύονται καί γιά τήν περίπτωση συστημάτων καί μάλιστα ὄχι μόνο γραμμικῶν συστημάτων. Ἰδιαίτερα ὅμως γιά τό γραμμικό σύστημα (1) ἰσχύει - καί τό διατυπώνουμε ἐδῶ χωρίς ἀπόδειξη - τό ἑξῆς θεώρημα:

Ἄν οἱ συναρτήσεις - στοιχεῖα τῶν πινάκων (4) καί (5) εἶναι ὁρισμένες καί συνεχεῖς σ' ἕνα διάστημα $\alpha < x < \beta$ καί ξ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ διαστήματος (α,β), τότε ἀπό κάθε σημεῖο $\Xi(\xi, n_1, n_2 \ldots n_\nu)$ τοῦ χώρου $R^{\nu+1}$ διέρχεται μία (καί μόνο μία) λύση $\bar{\varphi}(x) \mid \alpha < x < \beta$ τοῦ συστήματος (1).

Ἐννοοῦμε μέ τό θεώρημα αὐτό ὅτι ὁρίζεται μονοσήμαντο διάνυσμα-πίνακας $\bar{\varphi}(x)$ ὥστε νά ἰσχύει ἡ *(10)* γιά ὅλα τά $x \in (a,\beta)$ καί ἐπί πλέον νά εἶναι

$$\bar{\varphi}(\xi) = \{n_1 , n_2 ,\ldots, n_\nu\} .$$

Στή συνέχεια θά δώσουμε ὅλα τά στοιχεῖα πού εἶναι ἀπαραίτητα ὥστε νά μεθοδευτεῖ ἡ εὕρεση ὅ λ ω ν τῶν λύσεων τοῦ συστήματος *(1)*. Θά ἀναφέρουμε γιά τό σκοπό αὐτό ὁρισμένα θεωρήματα, τά ὁποῖα δέν θά ἀποδείξουμε. Ἀντί ἀποδείξεων θά παραθέσουμε σχόλια καί παραδείγματα.

Ἄς ἀρχίσουμε μέ τή διάκριση τοῦ γραμμικοῦ συστήματος *(3)* ἀπό τό (ἐπίσης γραμμικό) σύστημα

$$\bar{\psi}' = F\bar{\psi} \qquad (11)$$

ὅπου ὁ F εἶναι καί πάλι ὁ πίναξ *(4)*.

Τό σύστημα *(11)* καλεῖται ὁ μ ο γ ε ν έ ς καί διακρίνεται ἀπό τό σύστημα *(3)*, τό ὁποῖο καλεῖται μ ή ὁ μ ο γ ε ν ε ς ἤ π λ ή ρ ε ς. Τό σύστημα *(11)* προκύπτει ἀπό τό *(3)*, ἄν τεθεῖ $\bar{f}_o(x)=\bar{0}$.

Θά δοῦμε ὅτι γιά τήν ἐπίλυση ἑνός πλήρους συστήματος σάν τό *(3)* εἶναι ἀπαραίτητο νά βρεθοῦν πρῶτα ὅλες οἱ λύσεις τοῦ ἀντίστοιχου ὁμογενοῦς συστήματος *(11)*. Γιά τίς λύσεις τοῦ συστήματος *(11)* ἰσχύει τό ἑξῆς:

<u>Θεώρημα</u>: Τό σύνολο τῶν λύσεων τοῦ ὁμογενοῦς συστήματος *(11)* ἀποτελεῖ πραγματικό διανυσματικό χῶρο διαστάσεως ν.

Γιά νά καταλάβουμε καλλίτερα τό περιεχόμενο τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ ἄς παρατηρήσουμε τά ἑξῆς:

(α). Σ' αὐτό τό σύνολο τῶν λύσεων (πού τό [illegible] $V_\nu(F)$) ὁρίζεται τό ἄθροισμα δύο στοιχείων του (δηλαδή δύο λύσεων τοῦ *(11)*) καί εἶναι ἐπίσης λύση τοῦ *(11)*.

(β). Στό σύνολο $V_\nu(F)$ ἀνήκει ἡ λύση $\bar{\varphi}(x) = \bar{0}$.

(γ). Ἄν $\bar{\varphi}(x)$ εἶναι λύση τοῦ *(11)* τότε καί ἡ $-\bar{\varphi}(x)$ εἶναι ἐπίσης λύση. Οἱ παρατηρήσεις αὐτές μᾶς ὁδηγοῦν στό συμπέρασμα ὅτι τό σύνολο $V_\nu(F)$ εἶναι προσθετική ὁμάδα. Τό ὅτι τώρα ἡ ὁμάδα αὐτή

εἶναι Ἀβελιανή καί ἀποτελεῖ πραγματικό διανυσματικό χῶρο εἶναι κάτι πού μπορεῖ κανείς νά τό δεῖ καί νά τό ἀποδείξει εὔκολα. Τό μέρος τοῦ θεωρήματος πού δεχόμαστε ἐδῶ χωρίς ἀπόδειξη εἶναι ὅτι ἡ διάσταση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου $V_\nu(F)$ εἶναι ἴση μέ ν.

Σύμφωνα λοιπόν μέ ὅσα εἴπαμε ὡς τώρα γιά τό ὁμογενές σύστημα *(11)*, ὑπάρχουν ν (μή μηδενικές) λύσεις, πού μποροῦν νά συστήσουν μιά βάση στό χῶρο $V_\nu(F)$. Ἐπειδή οἱ λύσεις αὐτές εἶναι στοιχεῖα χώρου ἄς τίς φανταστοῦμε σάν " διανύσματα " καί ἄς τίς συμβολίσουμε μέ

$$\bar{\varphi}_1(x)\ ,\ \bar{\varphi}_2(x), \ldots,\ \bar{\varphi}_\nu(x)\ . \qquad (12)$$

Κάθε ἄλλη λύση του $\bar{\varphi}(x)$ τοῦ συστήματος *(11)* θά βρίσκεται τότε κατά ἕνα καί μόνο τρόπο ἀπό τήν ἔκφραση

$$\bar{\varphi}(x) = c_1\bar{\varphi}_1(x) + \ldots + c_\nu\bar{\varphi}_\nu(x)\ ,$$

ὅπου $c_1\ ,\ c_2\ , \ldots,\ c_\nu$ εἶναι αὐθαίρετες (πραγματικές) σταθερές.

Ὥστε, τό νά λυθεῖ τό ὁμογενές σύστημα *(11)* σημαίνει νά βρεθεῖ μία βάση του *(12)*. Ἀλλά αὐτό εἶναι κάτι πού γενικά δέν γίνεται ἤ, ἄν τελικά γίνει, εἶναι, κατά κάποιο τρόπο, συμπτωματικό. Ὁπωσδήποτε δέν ὑπάρχουν μέθοδοι καί τύποι πού δίνουν πάντοτε τή βάση *(12)* γιά ἕνα ὁμογενές σύστημα δύο καί πλέον ἀγνώστων.