

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

§ 17. Γενικά.

"Έχούμε μέχρι τώρα μελετήσει Δ.Ε. πρώτης τάξεως, δηλαδή έξισώσεις της μορφής $F(x, y, y') = 0$, ή, πιο άπλα, της λυμένης μορφής $y' = f(x, y)$. Γιά τίς έξισώσεις αύτές έχουμε μάλιστα διατυπώσει δρισμένα θεωρήματα ύπαρξεως και μονοσημάντου τῶν λύσεων.

"Έχουμε έπισης δρίσει σάν Δ.Ε. τάξεως ν μία έξισωση της μορφής

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

πού συνδέει μία συνάρτηση y της ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς x και παραγόγους αὐτῆς της συναρτήσεως μέχρι και τάξεως n . Έννοεῖται ότι ή (1) έχει έννοια σάν Δ.Ε. τάξεως n όταν ύπαρχει μία συνάρτηση

$$y = \varphi(x) \quad | \quad \alpha < x < \beta \quad (2)$$

πού νά τήν ικανοποιεῖ γιά δλα τά $x \in (\alpha, \beta)$. Τή συνάρτηση (2) τή λέμε τότε λύση της Δ.Ε. (1).

Κάτω ἀπό δρισμένες ύποθέσεις ή έξισωση (1) μπορεῖ νά λυθεῖ ώς πρός $y^{(n)}$ και νά μᾶς δώσει

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (3)$$

Η (3) εἶναι Δ.Ε. τάξεως n στή λυμένη μορφή. Γιά τήν έξισωση (3) διατυπώνουμε τώρα τό έξης θεώρημα ύπαρξεως λύσεως:

"Αν ή συνάρτηση f και οι μερικές παράγωγοί της ώς πρός

$y, y', \dots, y^{(v-1)}$ δρίζονται καὶ εἶναι συνεχεῖς στήν περιοχή κάποιου σημείου $P_0(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(v-1)})$ τοῦ χώρου R^{v+1} , τότε ύπάρχει μία ἀκριβῶς λύση (2) τῆς (3) πού περνά ἀπό τό σημεῖο P_0 .

Ἡ γενική λύση μιᾶς Δ.Ε. τάξεως v εἶναι μία v -παραμετρική οἰκογένεια συναρτήσεων

$$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_v). \quad (4)$$

Ἡ (4) ἵκανοποιεῖ τήν (3) γιὰ ὅλες τίς τιμές τῶν παραμέτρων C_1, \dots, C_v γιὰ τίς ὅποιες αὐτὴ ἡ ἔδια ἔχει ἔννοια. Ἀπό ὅλες τίς συναρτήσεις (4) μπορεῖ νά ἐπιλεγεῖ μία πού ἵκανοποιεῖ δρισμένες ἀρχικές συνθῆκες: Γιά $x = x_0$ νά εἶναι $y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(v-1)} = y_0^{(v-1)}$. Αὐτή ἡ συνάρτηση εἶναι μία μερική λύση. Θά ἔξετάσουμε τώρα μερικές εἰδικές μορφές διαφορικῶν ἔξισώσεων τάξεως v . Γιά τίς περιπτώσεις αὐτές θά ἀναφέρουμε ὅτι εἶναι δυνατό νά γίνει, ὥστε οἱ Δ.Ε. νά λυθοῦν ἡ νά ἀναχθοῦν σέ ἀπλούστερες μορφές.

§ 18. Εἰδικές μορφές διαφορικῶν ἔξισώσεων ἀνωτέρας τάξεως.

(a). Μιά πολύ ἀπλή Δ.Ε. τάξεως v εἶναι ἡ

$$y^{(v)} = f(x). \quad (1)$$

Μέ διαδοχικές ὅλοκληρώσεις μποροῦμε νά βροῦμε τή γενική λύση τῆς. Πράγματι ἀπό τήν (1) ἔχουμε

$$y^{(v-1)} = \int f(x) dx = \sigma_{v-1}(x) + C_{v-1}$$

καὶ στή συνέχεια

$$y^{(v-1)} = \int (\sigma_{v-1}(x) + C_{v-1}) dx = \sigma_{v-2}(x) + C_{v-1}x + C_{v-2} \quad \text{Κ.Ο.Κ.}$$

μέχρις ὅτου φθάσουμε νά βροῦμε τή γενική λύση

$$y = \sigma(x, C_0, C_1, \dots, C_{v-1})$$

πού ἔξαρτᾶται φυσικά ἀπό ν σταθερές.

Παράδειγμα.

'Η Δ.Ε.

$$y'' = x + \eta mx \quad (2)$$

Έχει σάν γενική λύση τήν

$$y = \frac{x^3}{6} - \eta mx + C_1 x + C_2 \quad . \quad (3)$$

Μιά μερική λύση της (2) μπορεῖ γενικά νά έκανοποιήσει δύο άπαιτήσεις. Μπορεῖ π.χ. νά ζητήσουμε μιά λύση της (2) τέτοια ώστε γιά $x = 0$ νά είναι $y = 0$ και $y' = 0$. Καθορίζονται τότε οι σταθερές $C_1 = 1$ και $C_2 = 0$. Τέτοια λύση είναι λοιπόν ή

$$y = \frac{x^3}{6} - \eta mx + x \quad .$$

Θά μπορούσαμε έπισης άπό όλες τίς λύσεις (3) νά ζητήσουμε έκείνη πού περνᾶ άπό τά σημεῖα $(0, 0)$ και $(\frac{\pi}{2}, -1)$. Βρίσκεται τότε ότι

$$C_1 = -\frac{\pi^2}{24} \quad \text{και} \quad C_2 = 0$$

και ή ζητούμενη λύση είναι ή

$$y = \frac{x^3}{6} - \eta mx - \frac{\pi^2 x}{24} \quad .$$

$$(β). \quad F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(v)}) = 0 \quad | \quad 0 < k < v \quad . \quad (4)$$

'Από τήν Δ.Ε. (4) λείπει ή y και ένδεχομένως οι παράγωγοι μέχρι και τάξη $k-1$. Είναι πολύ φυσικό νά θέσουμε

$$y^{(k)} = z \quad . \quad (5)$$

'Η (4) γράφεται τότε

$$F(x, z, z', \dots, z^{(v-k)}) = 0 \quad . \quad (6)$$

δηλαδή σάν Δ.Ε. τάξεως $v-k$. Συνεχίζοντας μέ τήν (6) θά ύποθέσουμε ότι μποροῦμε νά βροῦμε τή γενική λύση της στή μορφή

$$z = \Phi(x, C_1, \dots, C_{v-k}) \quad .$$

Μέ διαδοχικές δλοκληρώσεις λύνουμε στή συνέχεια τήν (5), συμπληρώνοντας έτσι άλλες k αύθαιρετες σταθερές. "Ωστε τελικά βρίσκουμε

$$y = \sigma(x, C_1, C_2, \dots, C_v).$$

Παράδειγμα.

Γιά τή λύση τής Δ.Ε.

$$y''^2 + xy'' - y' = 0 \quad (7)$$

Θέτουμε

$$y' = z, \quad (8)$$

όπότε παίρνουμε τήν έξισωση τοῦ Clairaut $z = xz' + z'^2$ μέ γενική λύση τήν

$$z = Cx + C^2 \quad (9)$$

καί ΐδιάζουσα λύση τήν

$$z = -\frac{x^2}{4}. \quad (10)$$

Από τίς (8) καί (9) προκύπτει

$$y = \frac{Cx^2}{2} + C^2 x + C_1 \quad (11)$$

καί άπό τίς (8) καί (10)

$$y = -\frac{x^3}{12} + σταθ. \quad (12)$$

"Ας παρατηρήσουμε ότι ή (12) παριστάνει μία μονοπαραμετρική οίκογένεια λύσεων τής (7) καί ότι οι λύσεις είναι ΐδιαζουσες. Δέν προκύπτουν δηλαδή άπό τήν γενική λύση (11) τής ΐδιας έξισώσεως (7), πού παριστάνει φυσικά μία διπαραμετρική οίκογένεια λύσεων.

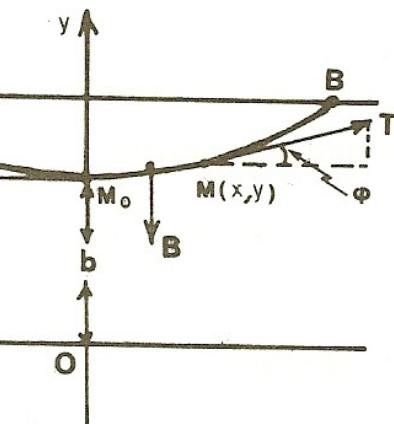
Πρόβλημα 1.

"Ενα λεπτό, όμογενές, τελείως εύκαμπτο νῆμα μέ γραμμική πυκνότητα ρ κρέμεται άπό τούς κόμβους A καί B τής δριζόντιας εύθείας AB . Ζητοῦμε τήν έξισωση τοῦ νήματος, όπως αύτό φαίνεται στό έπόμενο Σχήμα 17.

Λύση: Οι άξονες έπιλέγονται
όπως φαίνεται στό Σχήμα 17.
Η συμμετρία ως πρός τόν άξονα Oy είναι φανερή.

Η τάση T του νήματος στό τυχόν σημείο του $M(x, y)$ είναι έφαπτόμενη στό νήμα. Είδικά στό σημείο M_0 ή τάση είναι H . Αύτή ή H έξαρτάται βέβαια από τό μήκος του νήματος. Τό κομμάτι $M_0 M$ έχει βάρος $B = \rho g s$, όπου

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (13)$$



Σχήμα 17.

Άυτό τό κομμάτι $M_0 M$ ίσορροπεῖ κάτω από τήν έπιδραση τῶν δυνάμεων H , B και T . Είναι λοιπόν

$$T \eta \varphi = \rho g s \quad \text{καὶ} \quad T \sigma \nu \varphi = H,$$

δηλαδή

$$\varepsilon \varphi \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\rho g s}{H} . \quad (14)$$

"Αν θέσουμε $\alpha = H/\rho g$, ή (14) γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\alpha} s , \quad (15)$$

η, άκόμη, αν παραγωγίσουμε τήν (15) και λάβουμε ύπόψη τήν (13),

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} . \quad (16)$$

Μένει τώρα νά λυθεῖ ή Δ.Ε. (16) μέ άρχικές συνθήκες: Γιά $x=0$ νά-
ναι $y=b$ και $dy/dx=0$. Θέτουμε $dy/dx=z$. Η (16) γίνεται τότε

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 + z^2} . \quad (17)$$

Η ολοκλήρωση της (17) δίνει

$$\ln(z + \sqrt{1+z^2}) = \frac{x}{\alpha} + C. \quad (18)$$

Από τις άρχικές συνθήκες ύπολογίζεται ότι ή σταθερά $C = 0$. Έτσι ή (18) δίνει

$$z = \frac{dy}{dx} = \frac{e^{x/\alpha} - e^{-x/\alpha}}{2}. \quad (19)$$

Ολοκληρώνοντας τήν (19) παίρνουμε, σύμφωνα καί μέ τις άρχικές συνθήκες,

$$y = \frac{\alpha}{2} (e^{x/\alpha} + e^{-x/\alpha}) + b - \alpha. \quad (20)$$

Πρόβλημα 2.

Στό έπειπεδο Oxy νά βρεθεῖ μιά καμπύλη πού έφαπτεται στόν αξόνα τῶν x στήν άρχή τῶν αξόνων O καί πού ή καμπυλότητά της σέ κάθε σημείο της (x, y) είναι λίση μέ συν x .

Αν $y = y(x)$ είναι ή έπειπεδη καμπύλη πού ζητοῦμε, θά πρέπει νάναι

$$\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \text{συν}x. \quad (21)$$

Επειδή άπό τήν (21) λείπει ή μεταβλητή y , θέτουμε

$$y' = \omega, \quad (22)$$

όπότε έχουμε

$$\frac{\varepsilon \frac{d\omega}{dx}}{(1+\omega^2)^{3/2}} = \text{συν}x, \quad (23)$$

ὅπου $\varepsilon = 1$ γιά $y'' > 0$, καί $\varepsilon = -1$ γιά $y'' < 0$.

Από τήν (23) παίρνουμε

$$\frac{\varepsilon \omega}{\sqrt{1+\omega^2}} + C_1 = \eta \mu x. \quad (24)$$

Επειδή ομως γιά $x=0$ θέλουμε νάναι $dy/dx = \omega = 0$, έχουμε $C_1 = 0$, δηλαδή

$$\frac{\varepsilon \omega}{\sqrt{1 + \omega^2}} = \eta \mu x . \quad (25)$$

Λύνουμε τήν (25) ώς πρός ω καί παίρνουμε

$$\frac{dy}{dx} = \pm \varepsilon \varphi x \quad | \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} . \quad (26)$$

Η (26) έχει δύο λύσεις, σύμφωνες καί μέ τις αρχικές συνθήκες. Τις

$$y = \pm \ln |\sigma \nu x| \quad | \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} . \quad (27)$$

(ν). $F(y, y', y'', \dots, y^{(ν)}) = 0 . \quad (28)$

Χαρακτηριστικό έδω είναι ότι λείπει ή άνεξάρτητη μεταβλητή x . Θέτουμε

δόποτε $y' = p , \quad (29)$

$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$
καί

$$y''' = \frac{d}{dx} (p \frac{dp}{dy}) = \frac{d}{dy} (p \frac{dp}{dy}) \frac{dy}{dx} = p \left\{ \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p \frac{d^2 p}{dy^2} \right\} .$$

Έκφραζουμε καί τις παραγώγους ψηλότερης τάξεως (μέχρι καί τάξη ν) ένω συγχρόνως παρατηροῦμε ότι ή $y^{(ν)}(x)$ έκφραζεται μέ τή βοήθεια παραγώγων μέχρι $d^{ν-1}p/dy^{ν-1}$. Αύτό σημαίνει ότι ή τάξη τής (28) περιορίζεται κατά μία μονάδα μέ τή χρήση τοῦ μετασχηματισμοῦ (29).

Είδικά ἀν ἀπό τήν (28) συμβαίνει νά λείπει καί ή μεταβλητή y , είναι φανερό ότι ή (28) είναι τάξεως ν-1 ώς πρός τήν μεταβλητή $p = y'$. (Βλ. Παράδειγμα 2).

Παράδειγμα 1.

Η Δ.Ε.

$$yy'' + 2y' = 2y'^2 \quad (30)$$

είναι δευτέρας τάξεως. Λείπει όμως ἀπ' αὐτήν ή άνεξάρτητη μεταβλητή x . Επομένως ή τάξη τής μπορεῖ νά περιορισθεῖ κατά μία μονάδα, ἀν θέσουμε

$$y' = p . \quad (31)$$

"Έχουμε τότε $y'' = \frac{dp}{dy} p$ και ή έξισωση (30) γράφεται

$$yp \frac{dp}{dy} + 2p = 2p^2 . \quad (32)$$

Η $p = \frac{dy}{dx} = 0$ (δηλαδή $y = \text{σταθ.}$) είναι μία προφανής λύση. Υποθέτοντας ότι $p \neq 0$, γράφουμε τήν (32) ώς έξης:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dp}{2(p-1)}$$

άπ' όπου παίρνουμε.

$$p = 1 \pm C_1^2 y^2 . \quad (33)$$

Από τις δύο λύσεις (33) ας παρακολουθήσουμε στή συνέχεια τήν $p = 1 + C_1^2 y^2$.

Γυρίζοντας πίσω στήν (31) βρίσκουμε, μετά από μερικές πράξεις,

$$y = \frac{1}{C_1} \epsilon \varphi(C_1 x + C_2) . \quad (34)$$

Η λύση (33) πού άντιστοιχεῖ στό πρόσημο "πλήν" θά όδηγούσε σέ άλλη έκφραση τής γενικής λύσεως τής Δ.Ε. (30) πού μελετᾶμε.

"Ας παρατηρήσουμε έδω ότι οι άρχικες συνθήκες για μία μερική λύση θά μᾶς βοηθούσαν νά διακρίνουμε μέ ποιά από τις δύο σχέσεις (33) θά πρεπε νά συνεχίσουμε. Ετσι π.χ. ας ζητήσουμε μιά μερική λύση τής (30) μέ άρχικες συνθήκες: Γιά $x=0$ νά είναι

$$y_0 = 1 \quad \text{καὶ} \quad y'_0 = 2 . \quad (35)$$

Η (33) δίνει ότι $2 = 1 \pm C_1^2$ κι' από έδω φαίνεται ότι ή γενική λύση μέ τό πρόσημο "πλήν" δέν καλύπτει αυτή τή συγκεκριμένη μερική λύση πού άναζητούμε καὶ τήν άγνοούμε. Βρίσκουμε λοιπόν ότι $C_1^2 = 1$, δηλαδή $C_1 = \pm 1$.

Γιά τόν καθορισμό τής άλλης σταθερᾶς C_2 έχουμε από τήν (34)

$$1 = \pm \epsilon \varphi(C_2) , \quad \text{δηλαδή} \quad C_2 = \pm \frac{\pi}{4} .$$

"Ωστε τελικά ή ζητούμενη μερική λύση τής (30) πού ίκανοποιεῖ τίς άρχικές συνθήκες (35) είναι ή

$$y = \varepsilon \varphi \left(x + \frac{\pi}{4} \right) .$$

Παράδειγμα 2.

Στό διάστημα $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ζητοῦμε τή λύση τής Δ.Ε.

$$y'^2 + y''^2 = 1 \quad (36)$$

πού περνάει άπό τό σημεῖο $M(x=0, y=1)$ μέ $(\frac{dy}{dx})_M = 1$.

Θέτουμε $dy/dx = p$ καί παίρνουμε $d^2y/dx^2 = dp/dx^{(*)}$.

Η (36) γράφεται τότε

$$(\frac{dp}{dx})^2 = 1 - p^2 . \quad (37)$$

Η (37) έχει τήν προφανή λύση $p = 1^{(**)}$ πού οδηγεῖ στήν $y = x + C$, δηλαδή - γιά τίς συγκεκριμένες άρχικές συνθήκες - στή λύση

$$y = x + 1 , \quad (38)$$

πού περνάει άπό τό σημεῖο $M(0, 1)$ καί έχει σ' αύτό $(\frac{dy}{dx})_M = 1$. Θεωρόν - τας λοιπόν ότι $p^2 \neq 1$ έχουμε

$$\tauοξ_0 \eta \mu p = \pm x + C_1 . \quad (39)$$

Σύμφωνα καί μέ τίς άρχικές συνθήκες πρέπει $C_1 = \pi/2$. Άρα (καί γιά τά δύο πρόσημα στό δεξιό μέλος τής (39)) έχουμε

$$p = \frac{dy}{dx} = \sigma v x .$$

Από τήν τελευταία αύτή έξισωση παίρνουμε

$$y = \eta v x + C_2 ,$$

(*) Παράβαλε μέ παράδειγμα 1.

(**) Η $p = -1$ δεν οδηγεῖ σέ λύση σύμφωνη μέ τίς άρχικές συνθήκες πού δένονται.

η, σύμφωνα μέ τίς άρχικές συνθήκες,

$$y = 1 + \eta \mu x . \quad (40)$$

Περνοῦν λοιπόν άπό τό σημεῖο $M(0, 1)$ μέ $(\frac{dy}{dx})_M = 1$ δύο λύσεις (Σχῆμα 18): Η (38) καὶ ή (40).

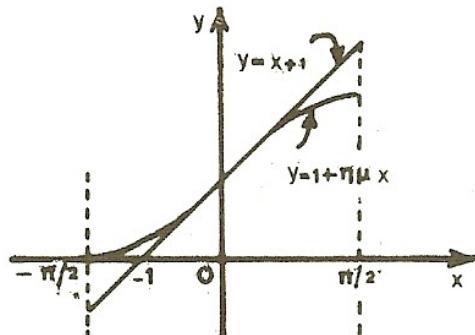
"Αν, άπό τό ίδιο σημεῖο M , ζητήσουμε τή λύση (ή τίς λύσεις) μέ $(\frac{dy}{dx})_M = \frac{1}{2}$ τά πράγματα άλλαζουν κάπως. Από τήν (37) πηγαίνουμε κατ' εύθεταν στήν (39), χωρίς νά περάσουμε άπό τήν (38). Διότι τώρα $p \neq 1$ καὶ $p \neq -1$. Στή συνέχεια άπό τήν (39) καὶ μέ τίς νέες άρχικές συνθήκες βρίσκουμε καὶ πάλι δύο λύσεις:

τήν

$$y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{συν}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \quad (41\alpha)$$

καὶ τήν

$$y = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{συν}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) . \quad (41\beta)$$



Σχῆμα 18.

Σχόλιο: "Ας δοῦμε τίς άκριβῶς γίνεται μέ τό θεώρημα γιά τήν ύπαρξη καὶ τήν μοναδικότητα τῶν λύσεων πού διατυπώσαμε στήν § 17. Παρατηροῦμε δτι ή (36) εἶναι ἵσοδύναμη μέ δυό διαφορικές ἔξισώσεις 2ας τάξεως, στή λυμένη μορφή. Τίς

$$y'' = + \sqrt{1 - y'^2} \quad (42\alpha)$$

καὶ

$$y'' = - \sqrt{1 - y'^2} . \quad (42\beta)$$

Η (41α) εἶναι λύση τής (42α) καὶ ή (41β) τής (42β). Κάθε μιά δηλαδή άπό τίς ἔξισώσεις (42), σέ σημεῖα ὅπου ή $\partial(y'')/\partial y$ καὶ ή $\partial(y'')/\partial y'$ μπάρχουν καὶ εἶναι συνεχεῖς (*), δίνει (ὅπως καὶ πρέ-

(*) Κι αὐτό βέβαια ἵσχει γιά τίς άρχικές συνθήκες $x=0$, $y=1$, $y'=1/2$ ὅχι ὅμως γιά τίς $x_O=0$, $y_O=1$, $y'_O=1$.

πει) μέλα μόνο λύση. "Αν είχαμε άπό τήν άρχη κάποια δέσμευση για τό πρόσημο τῆς y' τότε θά λέγαμε ότι μέλα μόνο λύση και τής (36) περνάει άπό κάθε σημεῖο $(x_0, y_0, y'_0 \neq 1)$. Είδικά δημοσιεύουμε για $y'_0 = 1$ (πού σημαίνει $y''_0 = 0$) δέν έφαρμόζεται τό θεώρημα τῶν πεπλεγμένων συναρτήσεων καί, οὕτως ή άλλως, έχουμε δύο λύσεις. Αύτη ή τελευταία είναι ή περίπτωση τῶν άρχικῶν συνθηκῶν $x_0 = 0, y_0 = 1, y'_0 = 1$.

Πρόβλημα.

Ξεκινώντας (σέ χρόνο $t=0$) άπό τήν άρχη τῶν άξόνων Ox , μιά γάτα Γ τρέχει πάνω στόν θετικό ήμιαξονα Ox μέσα σταθερή ταχύτητα v . Ενας σκύλος Σ , πού σέ χρόνο $t=0$ βρίσκεται στό σημεῖο $\Sigma_0(0, y_0)$, παρακολουθεῖ συνεχῶς τή γάτα^(*), καί τρέχει μέσα σταθερή ταχύτητα $V > v$ νά τή φτάσει. Ζητεῖται ή τροχιά πού γράφει ο σκύλος.

Λύση:

"Ας πούμε ότι $y = y(x)$ είναι ή (φθίνουσα φυσικά) συνάρτητη πού δίνει τή ζητούμενη τροχιά πού γράφει ο σκύλος. "Ας πούμε ότι σέ χρόνο t ο σκύλος έχοντας γράψει τόξο

$$(\Sigma_0 \Sigma) = s = \int_0^x \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx ,$$

βρίσκεται στή θέση $\Sigma(x, y)$. Τήν ΐδια στιγμή ή γάτα βρίσκεται στή θέση Γ , μέσα τετυμένη vt . "Οπως φαίνεται άπό τό Σχήμα 19 είναι

$$x - vt = \frac{y}{y'} \quad (43)$$

Παραγωγίζοντας τήν (43) ώς πρός x , έχουμε

$$1 - v \frac{dt}{dx} = \frac{y'^2 - yy''}{y'^2}$$

(*) Αύτό θά έρμηνευθεῖ ώς έξης: Σέ κάθε σημεῖο τῆς τροχιᾶς πού γράφει ο σκύλος, ή έφαπτόμενη περνάει άπό τή θέση πού βρίσκεται ή γάτα.

$\ddot{\eta}$

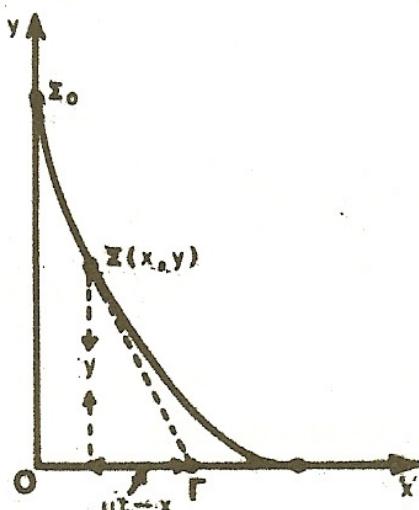
$$\frac{dx}{dt} = \frac{vy'^2}{yy''} . \quad (44)$$

Είναι ομως

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{V}{\sqrt{1+y'^2}} . \quad (45)$$

Από τις (44) και (45) παίρνουμε

$$\frac{yy''}{vy'^2} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{V} . \quad (46)$$



Σχήμα 19.

Η (46) είναι Δ.Ε. (2ας τάξεως) άπο τήν δποία θά βρεθεῖ ή τροχιά $y = y(x)$. Επειδή άπο τήν (46) λείπει ή x , θέτουμε

$$y' = p \quad \text{όπότε} \quad y'' = p \frac{dp}{dy} .$$

Παρατηρώντας άκομη ότι $p \neq 0^{(*)}$ καταλήγουμε, μετά άπο κάποιες πράξεις, στήν έξισωση

$$\frac{dp}{p \sqrt{1+p^2}} = \frac{v}{V} \frac{dy}{y} ,$$

άπο τήν δποία στή συνέχεια παίρνουμε $(**)$

$$\ln\left(\frac{1}{p} + \sqrt{1 + \frac{1}{p^2}}\right) = \frac{v}{V} \ln(Cy) . \quad (47)$$

Από τό γεγονός ότι γιά $x=0$ είναι $y=y_0 > 0$ και $y'=p=\infty$ (δηλαδή $1/p=0$) προκύπτει ότι $C=1/y_0$. Μ' αυτή τήν τιμή τοῦ C , προκύ-

(*) διότι ή $y = \text{σταθ. δέν είναι λύση τής (46)}$.

(**) Θεωροῦμε $y > 0$. Επίσης παίρνουμε $p = -\sqrt{p^2} < 0$.

πτει ἀπό τήν (47), μετά ἀπό πράξεις,

$$\frac{2}{p} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{v/V} - \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-v/V}$$

ἢ, ἐπειδὴ $p = \frac{dy}{dx}$,

$$dx = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{y}{y_0}\right)^{v/V} - \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-v/V} \right\} dy \quad (48)$$

Όλοκληρώνουμε τέλος τήν (48) μέ τήν ἀπαίτηση νά εἶναι γιά $x = 0$, $y = y_0$. Βρίσκουμε τότε

$$x = \frac{1}{2} V y \left\{ \frac{1}{V+v} \left(\frac{y}{y_0}\right)^{v/V} - \frac{1}{V-v} \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-v/V} \right\} + \frac{Vv y_0}{V^2 - v^2} . \quad (49)$$

Γιά ποιά τιμή τοῦ x εἶναι $y = 0$; Ποῦ δηλαδὴ θά συναντήσει ὁ σκύλος τή γάτα; Ἀπό τήν (29) προκύπτει ὅτι αὐτό θά γίνει στή θέση

$$x = \frac{Vv}{V^2 - v^2} y_0 . \quad (50)$$

Πότε; Σέ χρόνο

$$t = \frac{x}{v} = \frac{V}{V^2 - v^2} y_0 .$$

(δ). Διαφορική ἔξισωση δμογενής ως πρός τίς μεταβλητές y, y', y'', \dots
 $\dots y^{(k)}$.

"Αν καὶ ὁ, τι θά ποῦμε ἵσχυει γενικά γιά δμογενεῖς Δ.Ε. κάθε τάξης, ἂς περιοριστοῦμε σέ μιά ἔξισωση 2ας τάξεως

$$F(x, y, y', y'') = 0 , \quad (51)$$

γιά τήν δοπία ὑποθέτουμε ὅτι ἡ συνάρτηση $F(x, y, y', y'')$ εἶναι δμογενής ως πρός τίς μεταβλητές y, y', y'' . Εἶναι δηλαδὴ

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') \equiv \lambda^k F(x, y, y', y'')$$

γιά κάθε λ . Ο ἐκθέτης k εἶναι ὁ βαθμός δμογένειας τῆς συνάρτησης F . "Οποιος κι ἂν εἶναι αὐτός ὁ βαθμός k , ἡ ἀντικατάσταση

$$y = e^{\int z(x) dx} \quad (52)$$

ύποβιτβάζει κατά ένα τήν τάξη τῆς Δ.Ε. (51).

Παράδειγμα.

Η έξισωση

$$xyy'' - yy' - 3y'^2 = 0 \quad (53)$$

είναι διμογενής ώς πρός τίς μεταβλητές y , y' και y'' . Θέτοντας

$$y = e^{\int z dx}$$

παίρνουμε

$$y' = ze^{\int z dx} \quad \text{καὶ} \quad y'' = (z' + z^2)e^{\int z dx}.$$

Τότε ή (53) γράφεται

$$x(z' + z^2) - z - 3z^2 = 0$$

ή

$$z' - \frac{1}{x}z + \frac{x-3}{x}z^2 = 0 \quad | \quad x \neq 0. \quad (53a)$$

Η (53a) είναι τύπου Bernoulli. Η γενική της λύση βρίσκεται ότι είναι ή

$$z = \frac{2x}{x^2 - 6x + 2C_1} \quad | \quad x \neq 0.$$

Υπολογίζεται ότι

$$\int z dx = \ln|x^2 - 6x + 2C_1| + 6K \quad (54)$$

όπου

$$K = \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 2C_1 - 9}.$$

Όπως βλέπουμε άποφασιστική σημασία γιά τόν ύπολογισμό τοῦ K έχει τό πρόσημο τοῦ $2C_1 - 9$. Ας προχωρήσουμε μέ τήν ύπόθεση $\overset{(*)}{2C_1 - 9 > 0}$.

(*) Ανάλογα μποροῦν νά μελετηθοῦν καύ οἱ περιπτώσεις $2C_1 - 9 < 0$ καύ $2C_1 - 9 = 0$.

Αύτό σημαίνει ότι γιά όλα τά x είναι $x^2 - 6x + 2C_1 > 0$.

Είναι τότε

$$K = \frac{1}{\sqrt{2C_1 - 9}} \text{ τοξ}_o \epsilon \varphi \frac{x-3}{\sqrt{2C_1 - 9}} + C.$$

Άρα, πάντοτε κάτω από τούς περιορισμούς πού βάλαμε, και σύμφωνα μέ τίς (52) και (54), έχουμε

$$y = C_2(x^2 - 6x + 2C_1) \exp\left(\frac{6}{\sqrt{2C_1 - 9}} \text{ τοξ}_o \epsilon \varphi \frac{x-3}{\sqrt{2C_1 - 9}}\right) \quad \begin{array}{l} x \neq 0 \\ C_1 > 9/2 \\ C_2 > 0 \end{array} .$$

§ 19. Λύσεις μέ τεχνάσματα - Παραδείγματα.

Στή Φυσική συνήθως έχουμε Δ.Ε. 2ας τάξεως και μιλήσαμε σ' αύτό τό Κεφάλαιο γιά τόν τρόπο μέ τόν όποιο μποροῦμε νά μεθοδεύσουμε τή λύση κάποιων είδικῶν μορφῶν Δ.Ε. 2ας τάξεως (και γενικότερα πιό ψηλῆς τάξεως). Στό Κεφ. 4 θά μιλήσουμε γιά τίς λεγόμενες γραμμικές Δ.Ε. άνωτέρας τάξεως.

Πρέπει δημοσίευμε τό έξης πράγμα. Μιά Δ.Ε. δέν ύπάγεται, ἀν ύπαγεται, άναγκαστικά σέ μία μόνο άπό τίς μορφές πού άναφέραμε ἢ θά άναφέρουμε στή συνέχεια. Μπορεῖ νά τή δεῖ κανείς άπό τή δική του σκοπιά και νά τήν έντάξει στή μιά ἢ στήν άλλη κατηγορία ἢ δικόμη και σέ καμμιά κατηγορία άλλα νά τήν άντιμετωπίσει σάν μιά ξεχωριστή περίπτωση. Ή έξοικώσή του μέ τήν συγκεκριμένη διαφορική έξιση μπορεῖ νά τόν δύνησει σέ κάποια "τεχνασματική" λύση. Ισως μάλιστα γιά τόν έμπειρο μιά τέτοια "άνορθόδοξη" άντιμετώπιση είναι ἡ "πρώτη του άντιδραση".

Θά άναφερθοῦμε σέ μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1ο: "Ας πάρουμε τή Δ.Ε.

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 1 \quad | \quad x > 0 \quad (1)$$

Άντις γιά ότιδήποτε άλλο μποροῦμε νά παρατηρήσουμε ότι τό άριστερό

μέλος τῆς (1) γράφεται

$$\frac{d}{dx} \left(y' - \frac{y}{x} \right)$$

καὶ τό δεξιό σάν

$$\frac{d}{dx} (x + C_1) .$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$y' - \frac{y}{x} = x + C_1 \quad | \quad x > 0 . \quad (2)$$

Η (2) εἶναι γραμμική μέ γενική λύση

$$y = C_2 x + x^2 + C_1 x \ln x \quad | \quad x > 0 .$$

Αὕτη εἶναι καὶ ἡ γενική λύση τῆς ἀρχικῆς Δ.Ε. 2ας τάξεως. Ανάλογα θά μποροῦσε νά μελετηθεῖ ἡ περίπτωση $x < 0$.

Παράδειγμα 2: Ζητοῦμε τήν μερική λύση τῆς Δ.Ε.

$$y'y'' - x^2 yy' - xy^2 = 0 \quad (3)$$

πού περνάει ἀπό τό σημεῖο $A_0(0, 1)$ μέ $(\frac{dy}{dx})_{A_0} = 0$.

Τό ἀριστερό μέλος τῆς (3) γράφεται

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (y'^2 - x^2 y^2) .$$

Έχουμε λοιπόν

$$y'^2 - x^2 y^2 = C_1 .$$

Γιά τήν συγκεκριμένη μερική λύση θέλουμε γιά $x=0$ νάναι $y'=0$. Άρα πρέπει $C_1 = 0$.

Άρα

$$\frac{dy}{dx} = \pm xy \quad \text{ἀπ' ὅπου} \quad y = C_2 e^{\pm x^2/2} .$$

Ἐπειδή μάλιστα θέλουμε γιά $x=0$ νάναι $y=1$, πρέπει νά πάρουμε τή σταθερά $C_2 = 1$. Περνοῦν λοιπόν ἀπό τό σημεῖο A_0 μέ $y'_{A_0} = 0$ δυό λύσεις τῆς (3): ἡ

$$y = e^{x^2/2} \quad \text{καὶ ἡ} \quad y = e^{-x^2/2} \quad (\Sigma x̄̄μα 20).$$

Παράδειγμα 3: Ζητοῦμε νά λύσουμε τή Δ.Ε.

$$\ddot{z} = - \frac{z}{R^2 - z^2} \dot{z}^2 \quad (*) \quad (4)$$

ὅπου ή παραγώγιση νοεῖται ώς πρός τόν χρόνο t . Από τόν τρόπο πού προέκυψε ή έξισωση (4) καί πού έξηγεῖται στήν παραπομπή έχουμε τόν περιορισμό

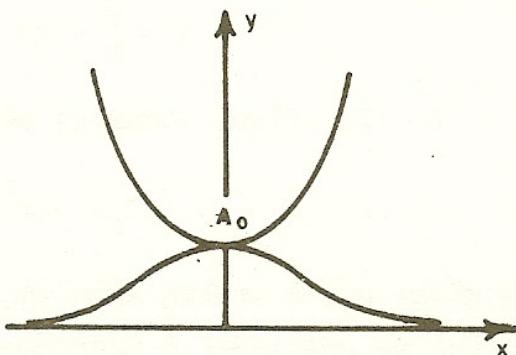
$$-R \leq z \leq R . \quad (5)$$

Σύμφωνα μέ τόν περιορισμό αύτό θέτουμε

$$z = R \eta \mu \vartheta \quad (6)$$

καί ζητοῦμε νά βροῦμε τήν καινούργια συνάρτηση $\vartheta = \vartheta(t)$. Από τήν (6) παίρνουμε

Σχῆμα 20



$$\dot{z} = R \eta \mu \dot{\vartheta} \quad \text{καί} \quad \ddot{z} = -R \eta \mu \dot{\vartheta}^2 + R \eta \mu \ddot{\vartheta} \quad (7)$$

Η (4) γίνεται τότε

$$\ddot{\vartheta} = 0 .$$

Άρα

$$\vartheta = C_1 t + C_2$$

καί

$$z = R \eta \mu (C_1 t + C_2) . \quad (8)$$

Τί θά μποροῦσε ομως νά γίνει αν μᾶς ήταν αγνωστος δ περιορισμός (5), αν δηλαδή δέν ξέραμε τό πρόβλημα πού δόδηγησε στήν έξισωση (4);

(*) Η (4) μαζί μέ τήν $\ddot{y} = 0$ (4α) περιγράφουν τήν κύνηση ένός έλευθερου ύλικού σημείου (μέ μάζα m , άλλα χωρίς βάρος) πάνω στήν κυλινδρική έπιφάνεια $x^2 + z^2 = R^2$. Οι (4) καί (4α) προκύπτουν άπό τή συνάρτηση τοῦ Lagrange

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{y}^2 + \frac{R^2}{R^2 - z^2} \dot{z}^2) ,$$

αν σάν γενικευμένες συντεταγμένες πάρουμε τές y καί z .

Τά πράγματα δέν θάταν τό ՝διο άπλά. Ή εξίσωση (4) είναι 2ας τάξεως και όχι γνωστής μορφής. Ωστόσο κάτι μπορεῖ νά γίνει ἀν παρατηρήσουμε ὅτι

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{z}} \right) = - \frac{\ddot{z}}{\dot{z}^2} . \quad (9)$$

Η (4) μπορεῖ τότε νά γραφεῖ ὡς ἐξῆς:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{z}} \right) = \frac{z}{R^2 - z^2} . \quad (10)$$

Πολλαπλασιάζοντας ἐπί dz τά δύο μέλη τῆς (10) ἔχουμε

$$\dot{z} d \left(\frac{1}{\dot{z}} \right) = - \frac{1}{2} \frac{d(R^2 - z^2)}{R^2 - z^2} . \quad (11)$$

Τό ἀριστερό μέλος τῆς (11) προσφέρεται γιά ὀλοκλήρωση κατά παράγοντες. Ἐχουμε λοιπόν

$$1 - \ln \dot{z} = - \frac{1}{2} \ln |R^2 - z^2| + \text{σταθ.}$$

ἢ

$$\frac{\dot{z}}{\sqrt{|R^2 - z^2|}} = C_1 .$$

Εἶμαστε ὑποχρεωμένοι νά ξεχωρίσουμε δύο περιπτώσεις:

α) $z^2 < R^2$. Είναι τότε

$$\frac{dz}{\sqrt{|R^2 - z^2|}} = C_1 dt$$

και ἡ ὀλοκλήρωση μᾶς ὀδηγεῖ στή λύση (8) πού βρήκαμε καὶ προηγουμένως.

β) $z^2 > R^2$. Είναι τότε

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 - R^2}} = C_1 dt$$

και ἡ ὀλοκλήρωση δίνει

$$\ln |z + \sqrt{z^2 - R^2}| = C_1 t + C_2 .$$

Καί πάλι πρέπει νά ξεχωρίσουμε τίς περιπτώσεις $z > 0$ καί $z < 0$ (ή, τό 7διο πράγμα, $z > |R|$ καί $z < -|R|$). Παίρνουμε τότε ἀντίστοιχα

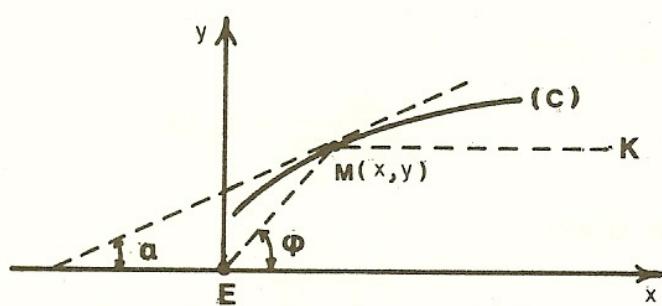
$$z = \pm \frac{1}{2} (e^{C_1 t + C_2} + R^2 e^{-(C_1 t + C_2)}). \quad (12)$$

Σχόλιο. Η Δ.Ε. (4) λύθηκε τεχνασματικά καί τίς δυό φορές, κι őταν δηλαδή λάβαμε ύπόψη τόν περιορισμό (5) κι őταν τόν ἀγνοήσαμε.

Ανεξάρτητα ὅμως ἀπ' αὐτό εἶναι χαρακτηριστικό τό γεγονός őτι, ἀπό μιά καθαρά μαθηματική σκοπιά, βρέθηκαν διάφορες ἐκφράσεις (ή (8) καί ή (12)) γιά τή γενική λύση ἀνάλογα μέ τά διαστήματα ἀπό τά ὅποια παίρνει τιμές ή ζητούμενη μεταβλητή z . Από τήν δική του σκοπιά ὁ φυσικός, γνωρίζοντας ἀπό πρίν τί δηλώνει αὐτό πού ζητάει νά βρεῖ, ἀπαλλάσσεται ἀπό τήν ύποχρέωση νά παρακολουθήσει ὅλες τίς δυνατές περιπτώσεις. Εἶναι λοιπόν ὅπωσδήποτε χρήσιμο νά λαβαίνει κανείς ύπόψη καί τό φυσικό νόημα τῶν μεταβλητῶν πού χρησιμοποιεῖ.

Πρόβλημα: Ζητεῖται τό σχῆμα ἐνός κατόπτρου μέ τήν ἔξης 7διότητα: Οι φωτεινές ἀκτίνες ἀπό μιά σημειακή πηγή E , μετά τήν ἀνάκλασή τους πάνω στό κάτοπτρο, δημιουργοῦν παράλληλη δέσμη.

"Ἄς πάρουμε σάν ἄξονα τῶν x ἔναν ἄξονα παράλληλο πρός τή δέσμη καί σάν ἀρχή τῶν ἄξόνων τή φωτεινή πηγή E . Θά ζητήσουμε στό ἐπίπεδο xy μιά καμπύλη (c): $y = f(x)$ μέ τήν ἔξης 7διότητα: Η προσπίπτουσα ἀκτίνα EM καί ή ἀνακλώμενη ἀκτίνα MK (παράλληλα στόν ἄξονα Ex) νά σχηματίζουν μέ τήν ἐφαπτόμενη τῆς καμπύλης (c) στό τυχαῖο σημεῖο τῆς $M(x, y)$ 7σες γωνίες. (Σχῆμα 21).



Σχῆμα 21

Κάποια συμμετρία είναι άμέσως φανερή. "Αν τό κομμάτι (c) του κατόπτρου ικανοποιεῖ τήν παραπάνω άπαίτηση, τότε καὶ τό συμμετρικό του ώς πρός τόν ἄξονα Ex . ἀλλά καὶ ώς πρός τόν Ey , ἐπίσης θά τήν ικανοποιεῖ^(*)". Μποροῦμε λοιπόν νά περιοριστοῦμε σέ $y > 0$ καὶ $y' > 0$.

Σύμφωνα μέ τό Σχῆμα 21 θά θέλαμε νάχουμε

$$\varepsilon\varphi \varphi = \varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha} ,$$

δηλαδή

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1 - y'^2} ,$$

η

$$2x = \frac{y}{y'} - yy' . \quad (13)$$

Γιά τή λύση τής (13) θά δουλέψουμε τεχνασματικά^(**).

Παραγωγίζουμε ώς πρός y τά δύο μέλη τής (13). Παίρνουμε τότε

$$\frac{2}{y'} = \frac{1}{y'} - \frac{y}{y'^2} \frac{dy'}{dy} - y' - y \frac{dy'}{dy} ,$$

η

$$\frac{1 + y'^2}{y'} = - y \frac{dy'}{dy} \frac{1 + y'^2}{y'^2} ,$$

η

$$\frac{dy'}{y'} = - \frac{dy}{y} . \quad (14)$$

Όλοκληρώνοντας τήν (14) έχουμε

$$y' = \frac{C}{y} , \quad (15)$$

καὶ στή συνέχεια

$$y^2 = 2Cx + C^* . \quad (16)$$

(*) Γιά λόγους συμμετρίας ἐπύσης τό κάτοπτρο πού ζητᾶμε θάναι ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφής περύ τόν ἄξονα Ex .

(**) Ο ὄρθοδοξος δρόμος θάταν νά δοῦμε τήν (13) σάν ὅμογενή διαφορεκή ἐξέσωση. Ού πράξεις ὅμως είναι πολλές.

Θά λέγαμε ότι ή (16) είναι ή γενική λύση τής (13). Συμβαίνει όμως στήν (16) νά έμφανιζονται δύο σταθερές, ένω ή (13) είναι Δ.Ε. πρώτης τάξης. Ξέρουμε γιατί έγινε αύτό. Οφείλεται στό γεγονός ότι παραγωγίσαμε τήν (13), δημιουργώντας έτσι μιά Δ.Ε. δευτέρας τάξεως. Άν λάβουμε όμως ύπόψη ότι γιά $x=0$ είναι, σύμφωνα μέ τό Σχήμα 21, $\varphi=90^\circ$, δηλαδή $\alpha=45^\circ$, δηλαδή $y'=1$, προκύπτει άπό τίς (15) καί (16) ότι

$$1 = \frac{C}{\sqrt{C^*}} \quad \text{δηλαδή} \quad C^* = C^2 .$$

Δέν είναι λοιπόν οι δυό σταθερές C καί C^* άνεξάρτητες.

Γενική λύση τής (13) είναι ή

$$y^2 = 2Cx + C^2 . \quad (17)$$

Η (17) παριστάνει μιά μονοπαραμετρική ολογένεια παραβολῶν, συμμετρικῶν ως πρός τόν αξονα *Ex*. Τό σχήμα τῶν κατόπτρων πού ζητοῦμε είναι λοιπόν παραβολοειδῆ ἐκ περιστροφῆς.