Κεφάλαιο 2

Βασικές Έννοιες

2.1 Γεωμετρικές και αναλυτικές μέθοδοι στα μαθηματικά

René Descartes

Τον 17ο αιώνα, ο Γάλλος φιλόσοφος και μαθηματικός Descartes (1596-1650), γνωστός σε μας με το εξελληνισμένο όνομα Καρτέσιος, χρησιμοποίησε συντεταγμένες για την περιγραφή σημείων του χώρου με αριθμούς. Μολονότι η ιδέα αυτή δεν ήταν πρωτοφανής (αρκεί να αναφερθούμε στο γεωγραφικό μήκος και πλάτος της γεωγραφίας του Πτολεμαίου), οι συντεταγμένες δεν αναφέρονται πλέον στον πραγματικό χώρο αλλά στον αφηρημένο χώρο της γεωμετρίας και πηγάζουν από την επιθυμία να λυθούν καθαρά γεωμετρικά προβλήματα με αλγεβρικά μέσα. Η προσέγγιση αυτή οφείλεται όχι μόνο στον Descartes, αλλά και τον σύγχρονο του Fermat (1601-1665) και ξεκινά με τον Vieta (1540-1603) που πρώτος χρησιμοποιεί αλγεβρικές μεθόδους για την επίλυση «κατασκευαστικών» προβλημάτων της γεωμετρίας. Χάρις στην ευρύτερη επιρροή της φιλοσοφικής σκέψης του Descartes στους σύγχρονους και μεταγενέστερους του, η νέα μεθοδολογία έπαιξε ένα καταλυτικό ρόλο στην μετέπειτα εξέλιξη των μαθηματικών και της φυσικής, επειδή επέτρεψε τη σύνδεση ανάμεσα στις, μέχρι τότε κυρίαρχες, γεωμετρικές μεθόδους και στις «αριθμητικές» μεθόδους για τις οποίες επικράτησε η ονομασία «αναλυτικές μέθοδοι».

Με αυτή τη σύνδεση γεωμετρίας και άλγεβρας, γεωμετρικά αντικείμενα μπορούν να περιγραφούν με αναλυτικά (δηλαδή μαθηματικά - αριθμητικά) μέσα. Για παράδειγμα μία ευθεία περιγράφεται από μία πρωτοβάθμια εξίσωση, ή μία κωνική τομή (κύκλος, έλλειψη, παραβολή, υπερβολή) από μία κατάλληλη (κατά περίπτωση) δευτεροβάθμια εξίσωση. Αλλά και αντίστροφα, μαθηματικά αντικείμενα επιδέχονται μία γεωμετρική ερμηνεία, για παράδειγμα σε μία συνάρτηση μιας μεταβλητής $y(x)$ αντιστοιχεί η γραφική της παράσταση, δηλαδή μία καμπύλη στο επίπεδο με συντεταγμένες x και y. Την περιγραφή μαθηματικών εννοιών, όπως οι αλγεβρικές εξισώσεις, με γεωμετρικά μέσα είχαν ήδη χρησιμοποιήσει Έλληνες μαθηματικοί.

Η αλήθεια είναι ότι η επιστημονική κοινότητα χρειάστηκε πολύ χρόνο για να αποδεχτεί την αντικατάσταση των γεωμετρικών μεθόδων (ή μάλλον του γεωμετρικού τρόπου σκέψης) με την αναλυτική προσέγγιση, παρά τα αδιαμφισβήτητα πλεονεκτήματα της τελευταίας. Χαρακτηριστική είναι η στάση του Νεύτωνα, παρά το γεγονός ότι υπήρξε (ταυτόχρονα με τον Leibniz) ο θεμελιωτής του κυρίαρχου αναλυτικού μαθηματικού εργαλείου του διαφορικού-ολοκληρω(μα)τικού λογισμού. Τα αίτια του σκεπτικισμού αυτού πρέπει να αναζητηθούν στην αίγλη που ασκούσε, από την αναγέννηση και μετά, η αρχαία ελληνική σκέψη και ιδιαίτερα η αυστηρή λογική προσέγγιση των μεθόδων της γεωμετρίας. Η αυστηρή μαθηματική θεμελίωση των αναλυτικών μεθόδων ήρθε πολύ αργότερα και υπήρξε ουσιαστικά έργο του εικοστού αιώνα.

Η έννοια του «συστήματος συντεταγμένων» και εκείνη του «συστήματος αναφοράς», καίτοι διαφορετικές, συγχέονται μεταξύ τους εξαιτίας της στενής σχέσης που έχουν στο πλαίσιο της ευκλείδειας γεωμετρίας, η οποία αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της κλασσικής Νευτώνειας φυσικής. Η σχέση αυτή δεν επιζεί στις πιο σύγχρονες φυσικές θεωρίες, όπως η ειδική και η γενική θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν, αλλά ούτε καν στην κλασσική περιγραφή μη επίπεδων χώρων, όπως η επιφάνεια μιας σφαίρας. Ένα άλλο χαρακτηριστικό της Νευτώνεια μηχανικής που δεν επιζεί σε νεότερες θεωρίες είναι ο διαχωρισμός χώρου και χρόνου. Στη θεωρία της σχετικότητας χώρος και χρόνος παραμένουν αδιαχώριστοι στα πλαίσια ενός τετραδιάστατου «χωροχρόνου», «σημεία» του οποίου αποτελούν τα «γεγονότα» (γεγονός ίσον τόπος συν χρονική στιγμή).

Μολονότι εδώ θα περιοριστούμε κυρίως στα συστήματα αναφοράς και χρόνου στα πλαίσια της Νευτώνειας μηχανικής, υπάρχουν περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα η ανάλυση παρατηρήσεων γεωδαιτικών δορυφόρων, όπου η επίδραση της θεωρίας της σχετικότητας δεν μπορεί να αγνοηθεί, επειδή είναι σημαντική σε σχέση με την ακρίβεια των διαθέσιμων παρατηρήσεων.

Για να ξεκαθαρίσουμε λοιπόν τις σχετικές έννοιες του συστήματος συντεταγμένων και του συστήματος αναφοράς, θα τις εξετάσουμε πρώτα από μια γενικότερη σκοπιά για να δούμε στη συνέχεια πως αυτές σχετίζονται και σχεδόν ταυτίζονται στα πλαίσια της ευκλείδειας γεωμετρίας.

2.2 Συστήματα συντεταγμένων και τοπικά διανυσματικά συστήματα αναφοράς

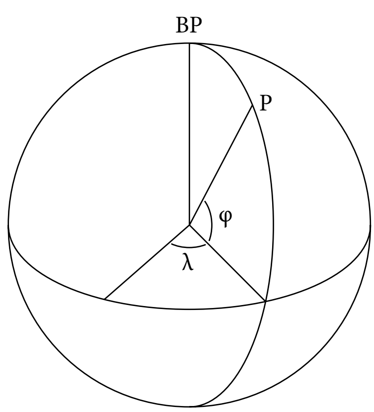
Αναλυτική περιγραφή των σημείων του χώρου

Ένα ***σύστημα συντεταγμένων*** είναι μία απεικόνιση (συνάρτηση) η οποία σε κάθε σημείο P , ενός συγκεκριμένου γεωμετρικού χώρου n διαστάσεων, αντιστοιχεί n πραγματικούς αριθμούς $q^1(P)$, $q^2(P)$, ..., $q^n(P)$.

Μία ουσιαστική ιδιότητα του συστήματος συντεταγμένων είναι ο αμφιμονοσήμαντος χαρακτήρας της σχετικής απεικόνισης: σε διαφορετικά σημεία πρέπει να αντιστοιχούν διαφορετικές συντεταγμένες αλλά και σε διαφορετικές συντεταγμένες διαφορετικά σημεία. Η απαραίτητη ιδιότητα αυτή, μπορεί εύκολα να ικανοποιηθεί για ένα επίπεδο ή για τον επίσης επίπεδο (ευκλείδειο) τρισδιάστατο χώρο, αλλά όχι, π.χ., για την δύο διαστάσεων επιφάνεια μιας σφαίρας.

Το πρόβλημα αυτό ξεπερνιέται στα θεωρητικά μαθηματικά με τη χρησιμοποίηση δύο ή περισσότερων συστημάτων συντεταγμένων, τα οποία συνιστούν έναν «άτλαντα», το καθένα από τα οποία καλύπτει ένα μέρος μόνο του αντίστοιχου χώρου, έτσι ώστε να καλύπτεται το σύνολο του χώρου. Στα εφαρμοσμένα όμως μαθηματικά προτιμούμε τη χρήση «προβληματικών» αλλά απλούστερων ενιαίων συστημάτων συντεταγμένων, έχοντας επίγνωση των ενδεχόμενων λαθών που μπορούν να προκύψουν από τη χρήση τους.

Για παράδειγμα στην επιφάνεια της σφαίρας (σχήμα 1) χρησιμοποιούμε για συντεταγμένες το σφαιρικό μήκος λ και πλάτος φ, παρά το γεγονός ότι δια-



Σχήμα 1:

Σφαιρικό πλάτος και μήκος

φορετικές συντεταγμένες $\varphi_1 = \varphi(P_1) = \varphi_2 = \varphi(P_2) = 90^\circ$, $\lambda_1 = \lambda(P_1) \neq \lambda_2 = \lambda(P_2)$ αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο $P_1 = P_2$, τον «βόρειο» πόλο της σφαίρας, ενώ το ίδιο πρόβλημα εμφανίζεται και στον «νότιο» πόλο, όπου $\varphi_1 = \varphi_2 = -90^\circ$ και $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Αν κρατήσουμε όλες τις συντεταγμένες σταθερές εκτός από μία στην οποία επιτρέπουμε να λάβει όλες τις πραγματικές τιμές, τα σημεία που προκύπτουν σχηματίζουν μία καμπύλη γραμμή που ονομάζεται καμπύλη της σχετικής συντεταγμένης (σχήμα 2). Για το λόγο αυτό οι συντεταγμένες ονομάζονται ***καμπυλόγραμμες συντεταγμένες***, σε αντιδιαστολή με τις ευθύγραμμες ή καρτεσιανές συντεταγμένες τις οποίες θα γνωρίσουμε στη συνέχεια.

Για παράδειγμα στην περίπτωση των σφαιρικών συντεταγμένων μήκος $q^1 = \lambda$, πλάτος $q^2 = \varphi$ και ακτινική απόσταση $q^3 = r$, οι καμπύλες των συντεταγμένων έχουν ως εξής: Η λ-καμπύλη (φ και r σταθερά) είναι κύκλος σε επίπεδο κάθετο στον άξονα Ox^3, με κέντρο πάνω στον ίδιο άξονα (παράλληλος κύκλος) και ακτίνα τέτοια ώστε να διέρχεται από το σημείο P. Η φ-καμπύλη (λ και r σταθερά) είναι κύκλος σε επίπεδο που περιέχει τον άξονα Ox^3 με κέντρο την αρχή O (μεσημβρινός κύκλος) και ακτίνα τέτοια ώστε να διέρχεται από το σημείο P. Η r-καμπύλη (λ και φ σταθερά) ταυτίζεται με την ημιευθεία με άκρο την αρχή O η οποία διέρχεται από το σημείο P.

Περιορίζοντας τη συζήτηση στον τρισδιάστατο φυσικό χώρο, ένα σύστημα συντεταγμένων $q^1(P)$, $q^2(P)$, $q^3(P)$ έχει σκοπό την περιγραφή του χώρου με αριθμούς, έτσι ώστε να είναι δυνατή η εκτέλεση αριθμητικών υπολογισμών σχετικών με φυσικά φαινόμενα που συμβαίνουν σ' αυτόν. Για να γίνει όμως κάτι τέτοιο κατορθωτό είναι απαραίτητο να περιγραφούν με αριθμητικά μέσα και τα διάφορα φαινόμενα που συμβαίνουν στα σημεία του γεωμετρικού χώρου. Το πιο απλό παράδειγμα είναι ένα ***βαθμωτό*** φυσικό φαινόμενο, (όπως π.χ. η θερμοκρασία, η πίεση, κλπ.), δηλαδή ένα φαινόμενο για το οποίο σε κάθε σημείο P αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός $f(P)$. Η χρησιμοποίηση συντεταγμένων επιτρέπει την περιγραφή του φυσικού αυτού φαινομένου με τη βοήθεια αναλυτικών μέσων και συγκεκριμένα με μία πραγματική συνάρτηση τριών ανεξάρτητων μεταβλητών $f(q^1, q^2, q^3)$, όπου οι ανεξάρτητες μεταβλητές q^1, q^2, q^3 είναι οι συντεταγμένες του τυχόντος σημείου P.

Αναλυτική περιγραφή των τοπικών διανυσμάτων

Περισσότερο πολύπλοκα φυσικά φαινόμενα μπορούν να περιγραφούν αναλυτικά, ξεκινώντας από την εξέταση ενός διανυσματικού φυσικού φαινομένου, που αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου και εκτός από μέγεθος έχει και διεύθυνση και φορά, όπως π.χ. η δύναμη, η ταχύτητα, η επιτάχυνση κλπ. Συμβολίζομε ένα ***διάνυσμα*** (διανυσματικό μέγεθος) με ένα βέλος, π.χ. $\vec{v}$, απομένει όμως να βρεθεί ένας τρόπος ώστε το σύμβολο αυτό να αντικατασταθεί με 3 πραγματικούς αριθμούς (2 χρειάζονται για τη διεύθυνση και 1 για το μέγεθος). Για να το πετύχουμε αυτό πρέπει να εισάγουμε τοπικά (δηλαδή στο συγκεκριμένο σημείο P όπου εμφανίζεται το διάνυσμα $\vec{v}$) τρία διανύσματα $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, τα οποία όμως να μη βρίσκονται πάνω στο ίδιο επίπεδο.

Δύο θεμελιώδεις ιδιότητες των τοπικών φυσικών διανυσματικών μεγεθών είναι η δυνατότητα πολλαπλασιασμού τους με έναν πραγματικό αριθμό λ και η πρόσθεση δύο διανυσμάτων με όμοια φυσικά χαρακτηριστικά. Με τον πολλαπλασιασμό το αρχικό διάνυσμα $\vec{v}$ αντικαθίσταται από ένα νέο διάνυσμα $\lambda\vec{v}$, το οποίο σε σχέση με το $\vec{v}$ έχει τη ίδια διεύθυνση, μέγεθος πολλαπλασιασμένο με την απόλυτη τιμή $|\lambda|$, την ίδια φορά όταν $\lambda > 0$ και αντίθετη φορά όταν $\lambda < 0$. Η πρόσθεση δύο διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{u}$, από την οποία προκύπτει ένα νέο διάνυσμα $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$ είναι μία φυσική ιδιότητα των τοπικών διανυσμάτων: Για παράδειγμα αν σε ένα σημείο επιδρούν ταυτόχρονα δύο δυνάμεις $\vec{f}_1$ και $\vec{f}_2$, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο όπως και στην περίπτωση που θα επιδρούσε μόνο μία δύναμη $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$.

Τις δύο παραπάνω ιδιότητες του πολλαπλασιασμού και της άθροισης συνοψίζουμε λέγοντας ότι το σύνολο των τοπικών διανυσμάτων συνιστά ένα «γραμμικό διανυσματικό χώρο». Από μαθηματική σκοπιά αυτό σημαίνει ότι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός $\lambda\vec{v} + \mu\vec{u}$ (λ και μ πραγματικοί), δύο οποιωνδήποτε τοπικών διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{u}$, συνιστά ένα τοπικό διάνυσμα $\vec{w} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{u}$.

Ας σημειωθεί ότι αποφεύγουμε εδώ την συνηθισμένη γραφική παράσταση των διανυσμάτων με ευθύγραμμα βέλη τα οποία έχουν αρχή το σημείο εφαρμογής, διεύθυνση και φορά ίδια με το διάνυσμα, και μήκος ίσο με το μέγεθος του διανύσματος. Η γραφική αυτή απεικόνιση είναι δυνατή μόνο σε επίπεδους χώρους όπου μπορούν να «σχεδιαστούν» τέτοια ευθύγραμμα βέλη και όχι σε γενικότερους «καμπύλους» χώρους όπως η επιφάνεια μιας σφαίρας ή ο χωροχρόνος της (γενικής) θεωρίας της σχετικότητας. Έτσι η συζήτηση διατηρείται σε ένα γενικότερο επίπεδο πριν εξειδικευτεί στο επόμενο κεφάλαιο στην περίπτωση του ευκλείδειου χώρου της κλασσικής φυσικής.

Με την εισαγωγή μιας ***τοπικής διανυσματικής βάσης*** (ή ενός ***τοπικού διανυσματικού συστήματος αναφοράς***) $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, είναι δυνατό να εκφράσουμε οποιοδήποτε τοπικό διάνυσμα $\vec{v}$ ως ένα γραμμικό συνδυασμό

$$\vec{v} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + v^3\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{e}}\,\mathbf{v}\,. \tag{1}$$

Στην παραπάνω σχέση εισάγαμε χάριν ευκολίας τον συμβολισμό πινάκων θέτοντας

$$\vec{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Οι τρεις πραγματικοί αριθμοί v^1, v^2, v^3 αποτελούν τις ***συνιστώσες*** του διανύσματος $\vec{v}$, ως προς τη συγκεκριμένη βάση. Οι συνιστώσες βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα διανύσματα: διαφορετικά διανύσματα έχουν διαφορετικές συνιστώσες και διαφορετικές συνιστώσες αντιστοιχούν σε διαφορετικά διανύσματα. (Προσοχή: συνιστώσες ή συντεταγμένες είναι διαφορετικές όταν διαφέρει έστω και μία μόνο από αυτές). Η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία διανυσμάτων και συνιστωσών, (η οποία επιτρέπει την αντικατάσταση του ενός από το άλλο), είναι συνέπεια του γεγονότος ότι τα διανύσματα βάσης δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και επομένως είναι ***γραμμικά ανεξάρτητα***, δηλαδή κανένα από αυτά δεν μπορεί να προκύψει από γραμμικό συνδυασμό των δύο άλλων.

Αναλυτική περιγραφή των διανυσματικών πεδίων

Πολλά φυσικά διανυσματικά φαινόμενα, όπως π.χ. η έλξη ανά μονάδα μάζας που ασκεί η γη πάνω σε άλλα σώματα, δεν έχουν τοπικό χαρακτήρα αλλά ορίζονται σε κάθε σημείο του χώρου. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για ένα ***δια-***

νυσματικό πεδίο, δηλαδή σε μία απεικόνιση κάθε σημείου P του χώρου σε ένα αντίστοιχο τοπικό διάνυσμα $\vec{v}(P)$. Για την αναλυτική περιγραφή των διανυσματικών πεδίων χρειάζεται να εισάγουμε μια τοπική διανυσματική βάση $\vec{e}_1(P)$, $\vec{e}_2(P)$, $\vec{e}_3(P)$, σε κάθε σημείο του χώρου, δηλαδή να εισάγουμε ένα «πεδίο διανυσματικών βάσεων». Αυτό δεν μπορεί να γίνει αυθαίρετα αλλά με «ομαλό» τρόπο, έτσι ώστε όταν μεταβάλλεται η θέση κατά τρόπο συνεχή (π.χ. κατά μήκος μιας καμπύλης) να μεταβάλλονται και τα διανύσματα βάσης με τρόπο συνεχή χωρίς απότομα «πηδήματα» (ασυνέχειες).

Αν αντικαταστήσουμε το διάνυσμα

$$\vec{v}(P) = v^1(P)\vec{e}_1(P) + v^2(P)\vec{e}_2(P) + v^3(P)\vec{e}_3(P)$$

με τις συνιστώσες του $v^1(P)$, $v^2(P)$, $v^3(P)$ και το σημείο P με τις συντεταγμένες του q^1, q^2, q^3, προκύπτει η αναλυτική περιγραφή του διανυσματικού πεδίου μέσω τριών συναρτήσεων τριών ανεξάρτητων μεταβλητών

$$v^1(q^1,q^2,q^3),\ \ v^2(q^1,q^2,q^3),\ \ v^3(q^1,q^2,q^3)\,.$$

Αναλυτική περιγραφή των τανυστών

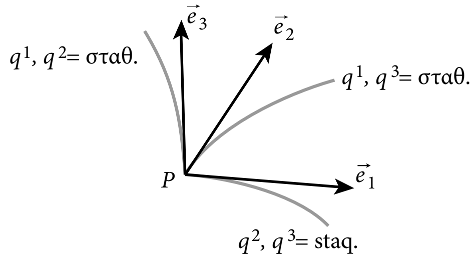
Για την περιγραφή των φυσικών φαινομένων χρειάζονται και φυσικά αντικείμενα περισσότερο πολύπλοκα τα οποία ονομάζονται ***τανυστές***. Εντούτοις και οι τανυστές μπορούν να περιγραφούν αναλυτικά με βάση την αντίστοιχη περιγραφή των διανυσμάτων. Σαν πρώτο βήμα εισάγονται τοπικά οι γραμμικές μορφές οι οποίες είναι γραμμικές απεικονίσεις α των διανυσμάτων $\vec{v}$ σε πραγματικούς αριθμούς $a(\vec{v})$.

Ο όρος ***γραμμική απεικόνιση*** σημαίνει ότι ικανοποιείται η γραμμική ιδιότητα

$$a(\lambda\vec{v} + \mu\vec{u}) = \lambda a(\vec{v}) + \mu a(\vec{u}) \tag{3}$$

για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{u}$ και πραγματικούς αριθμούς λ, μ. Στην συνέχεια οι τανυστές ορίζονται ως γραμμικές απεικονίσεις T, ενός αριθμού r διανυσμάτων $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_r$ και s γραμμικών μορφών α_1, α_2, ..., α_s, σε πραγματικούς αριθμούς $T(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)$.

Τον ουσιαστικότερο ρόλο στον ***τανυστικό λογισμό*** παίζει ο ιδιαίτερος τρόπος επιλογής των τοπικών διανυσματικών βάσεων (σχήμα 2). Κάθε διάνυσμα βάσης



Σχήμα 2:
Η τοπική διανυσματική βάση με διανύσματα εφαπτόμενα στις καμπύλες των συντεταγμένων

$\vec{e}_i(P)$ επιλέγεται να είναι εφαπτόμενο, στο σημείο P, στην καμπύλη της αντίστοιχης συντεταγμένης q^i (όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω), και να έχει μέγεθος ίσο με την τιμή στο P του ρυθμού μεταβολής ds/dq^i του μήκους της καμπύλης s σε σχέση με τη συντεταγμένη q^i (σχετικές λεπτομέρειες στο κεφ. 3.1).

Η συνέπεια της επιλογής αυτής είναι ιδιαίτερα μεγάλης σημασίας: *η μορφή που παίρνουν οι εξισώσεις περιγραφής των φυσικών φαινομένων είναι πάντοτε η ίδια, ανεξάρτητα από ποιο σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων χρησιμοποιείται.*

2.3 Συστήματα συντεταγμένων και αναφοράς στον ευκλείδειο χώρο

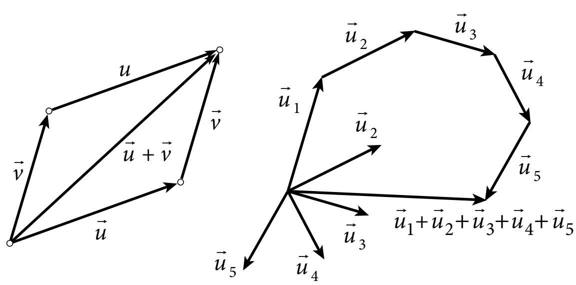
Ευκλείδειος χώρος και παράλληλη μετάθεση

Το μαθηματικό μοντέλο για τον χώρο που χρησιμοποιείται στη Νευτώνεια μηχανική, συστηματοποιήθηκε από τον Ευκλείδη στα περίφημα «*Στοιχεία*» του, όπου περιγράφεται με βάση ορισμένα αξιώματα, από τα οποία το περίφημο «5ο αξίωμα» αποτελεί και την πεμπτουσία της ευκλείδειας γεωμετρίας. Στη σύγχρονη του διατύπωση το αξίωμα αυτό εισάγει την ιδιότητα ότι «από δοσμένο σημείο διέρχεται μόνο μία ευθεία παράλληλη προς δοσμένη ευθεία». Για την ιστορία ας συμπληρώσουμε ότι επί αιώνες οι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με το ερώτημα αν το αξίωμα αυτό είναι αυτοτελές, ή λογική συνέπεια των υπόλοιπων αξιωμάτων ώστε να μπορεί να αποδειχτεί από αυτά. Την απάντηση έδωσε τελικά η εισαγωγή μη ευκλείδειων γεωμετριών από τους Lobatsevsky και Riemman. Η γεωμετρία του Riemman μάλιστα αποτελεί το μαθηματικό μοντέλο του χωροχρόνου της θεωρίας της σχετικότητας.

Σε έναν ευκλείδειο χώρο η ευθεία γραμμή εισάγεται ως συστατικό στοιχείο με την ιδιότητα να περνά μόνο μία ευθεία από δύο σημεία, ενώ το αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα είναι η συντομότερη καμπύλη που ενώνει τα δύο σημεία. Το 5^o αξίωμα μας επιτρέπει να μεταφέρουμε μία ευθεία σε οποιοδήποτε άλλο σημείο διατηρώντας τη διεύθυνση της μέσω μιας παράλληλης μετάθεσης. Σε κάθε σημείο οποιαδήποτε κατεύθυνση ορίζεται μονοσήμαντα από μία ευθεία που διέρχεται από το σημείο, πράγμα που μας επιτρέπει να θεωρήσουμε τις ευθείες ως «φορείς» των διανυσμάτων και να παραστήσουμε τα τελευταία με ευθύγραμμα τμήματα μήκους ίσου με το μέγεθος τους. Επιπλέον μπορούμε να ***μεταφέρουμε παράλληλα*** κάθε διάνυσμα από ένα σημείο σε οποιοδήποτε άλλο, αρκεί να μεταφέρουμε παράλληλα την ευθεία-φορέα του.

Άθροιση διανυσμάτων

Η παράλληλη μετάθεση διανυσμάτων μας επιτρέπει να ορίσουμε με γεωμετρικό τρόπο το άθροισμα $\vec{u}+\vec{v}$ δύο διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ που εφαρμόζονται στο ίδιο σημείο (ή ακόμα και διανυσμάτων που δεν εφαρμόζονται στο ίδιο σημείο αρκεί το άθροισμα που προκύπτει να έχει φυσικό νόημα). Το διάνυσμα $\vec{v}$ μεταφέρεται παράλληλα έτσι ώστε η αρχή του να συμπέσει με την κορυφή του $\vec{u}$, οπότε το διάνυσμα $\vec{u}+\vec{v}$ έχει αρχή την αρχή του $\vec{u}$ και κορυφή την κορυφή του $\vec{v}$ στη νέα του θέση. Το ίδιο άθροισμα θα προκύψει αν αντί για το $\vec{v}$ μεταφερθεί παράλληλα το διάνυσμα $\vec{u}$ (γεγονός που εκφράζει γεωμετρικά την ιδιότητα $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$). Το άθροισμα μπορεί να επεκταθεί και σε οσαδήποτε διανύσματα. Αν τα διανύσματα $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_n$ τοποθετηθούν σε σειρά (σχήμα 3) έτσι ώστε το τέλος καθενός να είναι η αρχή του επομένου, το διάνυσμα με αρχή την αρχή του $\vec{u}_1$ και κορυφή την κορυφή του $\vec{u}_n$ αντιστοιχεί στο άθροισμα $\vec{u}_1+\vec{u}_2+\ldots+\vec{u}_n$.



Σχήμα 3:

Άθροιση διανυσμάτων με παράλληλη μετάθεση

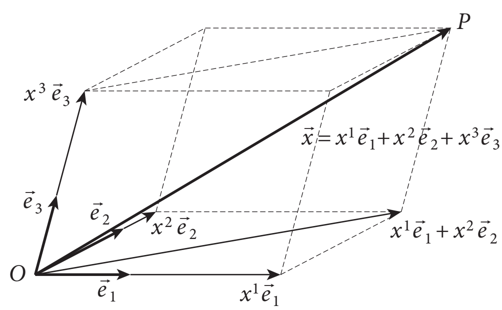
Σύστημα αναφοράς στον ευκλείδειο χώρο

Χάρις στην δυνατότητα παράλληλης μετάθεσης των διανυσμάτων, αρκεί να επιλέξουμε ένα σημείο O του χώρου, να ορίσουμε εκεί μία διανυσματική βάση $\vec{e}_1(O)$, $\vec{e}_2(O)$, $\vec{e}_3(O)$ και να την μεταθέσουμε παράλληλα σε κάθε σημείο του χώρου P ώστε να προκύψει ένα πεδίο τοπικών διανυσματικών βάσεων $\vec{e}_1(P)$, $\vec{e}_2(P)$, $\vec{e}_3(P)$.

Η βάση $\vec{e}_1(O)$, $\vec{e}_2(O)$, $\vec{e}_3(O)$ αποτελεί έτσι ένα ***παγκόσμιο*** (διανυσματικό) ***σύστημα αναφοράς***, ενώ το σημείο O αποτελεί την ***αρχή*** του συστήματος.

Διάνυσμα θέσης και καρτεσιανές συντεταγμένες

Σε κάθε σημείο P μπορεί να αντιστοιχηθεί ένα διάνυσμα $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$, με αρχή το O και τέλος το σημείο P, το οποίο ονομάζεται ***διάνυσμα θέσης*** του σημείου P (σχήμα 4). Οι συνιστώσες x^1, x^2, x^3 του διανύσματος θέσης



Σχήμα 4:

Διάνυσμα θέσης και καρτεσιανές συντεταγμένες σε σύστημα αναφοράς με τυχούσα (μη ορθογώνια) διανυσματική βάση

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3 , \tag{4}$$

ως προς το παγκόσμιο διανυσματικό σύστημα αναφοράς $\vec{e}_1(O)$, $\vec{e}_2(O)$, $\vec{e}_3(O)$, αποτελούν μία ιδιαίτερη επιλογή συντεταγμένων, οι οποίες ονομάζονται ***καρτεσιανές συντεταγμένες***.

Με συμβολισμό πινάκων η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{e}}\mathbf{x} , \tag{5}$$

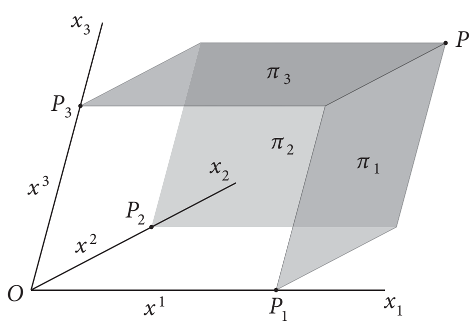
με διάνυσμα συντεταγμένων

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Απευθείας ορισμός των καρτεσιανών συντεταγμένων χωρίς το σύστημα αναφοράς

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες μπορούν να προκύψουν και απευθείας με την εξής γεωμετρική κατασκευή: Επιλέγεται ένα σημείο O και 3 ευθείες (άξονες) Ox_1, Ox_2, Ox_3, που διέρχονται από αυτό, πάνω στις οποίες επιλέγεται μία θετική και μία αρνητική κατεύθυνση. Από το σημείο P (σχήμα 5) φέρουμε επίπεδο π_1 παράλληλο προς το επίπεδο των Ox_2 και Ox_3 το οποίο τέμνει τον άξονα Ox_1 στο σημείο P_1. Η συντεταγμένη x^1 είναι ίση με την απόσταση OP_1 με θετικό πρόσημο όταν το P_1 βρίσκεται στο θετικό σκέλος του άξονα Ox_1 και αρνητικό πρόσημο όταν αυτό βρίσκεται στο αρνητικό σκέλος. Παρόμοια επίπεδο π_2 παράλληλο προς το επίπεδο Ox_1, Ox_3 τέμνει τον άξονα Ox_2 στο σημείο P_2, ενώ επίπεδο π_3 παράλληλο προς το επίπεδο Ox_1, Ox_2 τέμνει τον άξονα Ox_3 στο σημείο P_3. Οι αποστάσεις OP_2 και OP_3, με το κατάλληλο πρόσημο όπως εξηγήθηκε παραπάνω, αποτελούν τις συντεταγμένες x^2 και x^3, αντίστοιχα, του σημείου P.

Είδαμε ότι από το σύστημα αναφοράς προκύπτουν με τρόπο φυσικό οι καρτεσιανές συντεταγμένες, αλλά ισχύει και το αντίστροφο. Μετά την επιλογή της αρχής O και των αξόνων Ox_1, Ox_2, Ox_3 του συστήματος των καρτεσιανών



Σχήμα 5:

Απευθείας ορισμός των καρτεσιανών συντεταγμένων χωρίς την εισαγωγή συστήματος αναφοράς συντεταγμένων, έχει ουσιαστικά επιλεγεί και ένα παγκόσμιο σύστημα αναφοράς, αρκεί να ορίσουμε τα διανύσματα βάσης $\vec{e}_1(O)$, $\vec{e}_2(O)$, $\vec{e}_3(O)$ συγγραμμικά με τα θετικά σκέλη των αξόνων και να επιλέξουμε το μήκος τους (κατά προτίμηση ίσο με 1). Σε κάθε άλλο σημείο P, οι «καμπύλες» των καρτεσιανών συντεταγμένων, οι οποίες προκύπτουν μεταβάλλοντας ελεύθερα μία από αυτές κρατώντας τις άλλες δύο σταθερές, δεν είναι παρά ευθείες γραμμές παράλληλες προς τους άξονες. Σύμφωνα με την επιλογή του τανυστικού λογισμού, ένα τοπικό σύστημα αναφοράς $\vec{e}_1(P)$, $\vec{e}_2(P)$, $\vec{e}_3(P)$, στο σημείο P, δημιουργείται από τα διανύσματα τα εφαπτόμενα στις καμπύλες-ευθείες των συντεταγμένων με μέγεθος dx^i / ds, ίσο με τη μονάδα, όπου $s = x^i - x^i(P)$ είναι το μήκος επάνω στη καμπύλη-ευθεία της κάθε συντεταγμένης x^i. Είναι προφανές ότι κάθε διάνυσμα $\vec{e}_i(P)$ της τοπικής βάσης είναι ίσο σε μέγεθος και παράλληλο προς το αντίστοιχο διάνυσμα $\vec{e}_i(O)$ στην αρχή O του συστήματος των καρτεσιανών συντεταγμένων. Επομένως και οι τοπικές διανυσματικές βάσεις που προκύπτουν απευθείας από τις καρτεσιανές συντεταγμένες ταυτίζονται με τις τοπικές διανυσματικές βάσεις του συστήματος αναφοράς οι οποίες προκύπτουν από την παράλληλη μετάθεση της διανυσματικής βάσης $\vec{e}_1(O)$, $\vec{e}_2(O)$, $\vec{e}_3(O)$ του συστήματος αναφοράς από το σημείο O στο σημείο P.

Διαφορά συστήματος αναφοράς και συστήματος συντεταγμένων

Η δυνατότητα εισαγωγής των καρτεσιανών συντεταγμένων χωρίς την άμεση χρησιμοποίηση ενός παγκόσμιου διανυσματικού συστήματος αναφοράς, αποτελεί την αφετηρία της σύγχυσης μεταξύ των δύο εννοιών, οι οποίες στην περίπτωση αυτή είναι ουσιαστικά ισοδύναμες μεταξύ τους.

Ο ορισμός ενός συστήματος αναφοράς σε ένα ευκλείδειο χώρο είναι ο εξής:

Ένα ***σύστημα αφοράς*** αποτελείται από

(α) ένα σημείο του χώρου O το οποίο επιλέγεται ως η αρχή του συστήματος αναφοράς.

(β) Ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων τοπικών διανυσμάτων $\vec{e}_1(O)$, …, $\vec{e}_n(O)$ στο σημείο O τόσα όση η διάσταση n του ευκλείδειου χώρου, τα οποία αποτελούν την (παγκόσμια) διανυσματική βάση του συστήματος αναφοράς (3 μη συνεπίπεδα διανύσματα για τον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο).

(γ) Ένα πεδίο τοπικών διανυσματικών βάσεων $\vec{e}_1(P)$, …, $\vec{e}_n(P)$, το οποίο προκύπτει από την παράλληλη μετάθεση της βάσης $\vec{e}_1(O)$, …, $\vec{e}_n(O)$ από το σημείο O σε κάθε σημείο P του χώρου και χρησιμεύει για την αναλυτική περιγραφή των τοπικών διανυσμάτων σε κάθε σημείο P, καθώς και την αναλυτική περιγραφή των διανυσματικών πεδίων.

Παράγωγο του συστήματος αναφοράς είναι ένα αντίστοιχο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων $x^1(P)$, …, $x^n(P)$, οι οποίες προκύπτουν ως οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης $\vec{x} = \overline{OP}$, του τυχόντος σημείου P. Σε διαφορετικές επιλογές του συστήματος αναφοράς αντιστοιχούν διαφορετικά συστήματα καρτεσιανών συντεταγμένων. Όμως η χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων για τον ευκλείδειο χώρο, όπου έχει ήδη οριστεί ένα σύστημα αναφοράς, δεν είναι υποχρεωτική (αλλά απλά βολική): είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ένα οποιοδήποτε άλλο σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων.

Ένα σύστημα συντεταγμένων μπορεί να οριστεί όχι μόνο σε ένα ευκλείδειο χώρο αλλά και σε μη ευκλείδειους χώρους. Ο σχετικός ορισμός είναι ο εξής:

Ένα ***σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων*** σε ένα χώρο n διαστάσεων αποτελείται από n απεικονίσεις (συναρτήσεις) q^1, …, q^n, οι οποίες σε κάθε σημείο του χώρου P αντιστοιχίζουν n πραγματικούς αριθμούς $q^1(P)$, …, $q^n(P)$.

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων είναι δυνατόν (αλλά όχι υποχρεωτικό) να αντιστοιχηθεί ένα πεδίο διανυσματικών βάσεων $\vec{e}_1$, …, $\vec{e}_n$, οι οποίες ορίζονται σε κάθε σημείο P από τα διανύσματα $\vec{e}_1(P)$, …, $\vec{e}_n(P)$, τα οποία ορίζονται σε σχέση με τις αντίστοιχες καμπύλες των συντεταγμένων. Κάθε διάνυσμα $\vec{e}_k$ είναι «εφαπτόμενο» στην καμπύλη της αντίστοιχης συντεταγμένης q^k (το εφαπτόμενο διάνυσμα σε μία καμπύλη σε συγκεκριμένο σημείο ορίζεται στο κεφ. 3.1, σχέση 3.9).

Τη σχέση και τις διαφορές ανάμεσα στην έννοια του συστήματος συντεταγμένων και του συστήματος αναφοράς, σε συνάφεια με τις απαιτήσεις για την αναλυτική (με μαθηματικά–υπολογιστικά εργαλεία) περιγραφή της φύσης μπορούμε να συνοψίσουμε ως εξής:

Για να περιγράψουμε τη φύση αναλυτικά, δηλαδή με μαθηματικά – υπολογιστικά εργαλεία, απαιτείται ένα σύστημα συντεταγμένων για την περιγραφή των σημείων του χώρου και ένα πεδίο διανυσματικών βάσεων (δηλαδή μία τοπική βάση σε κάθε σημείο) για την περιγραφή των τοπικών διανυσμάτων, αλλά και πιο γενικών φυσικών αντικειμένων που ονομάζονται τανυστές.

Όταν εισάγεται ένα σύστημα (γενικά καμπυλόγραμμων) συντεταγμένων, είναι δυνατόν (αλλά όχι υποχρεωτικό) να προκύψει από αυτό ένα πεδίο διανυσματικών βάσεων μέσα από τα εφαπτόμενα διανύσματα στις καμπύλες των συντεταγμένων. Η επιλογή αυτή είναι δυνατή και σε μη ευκλείδειους χώρους.

Όταν εισάγεται ένα σύστημα αναφοράς (δυνατότητα η οποία περιορίζεται σε ευκλείδειους χώρους) προκύπτουν αυτόματα από αυτό, τόσο ένα σύστημα συντεταγμένων (οι καρτεσιανές), όσο και ένα πεδίο διανυσματικών βάσεων (από την παράλληλη μετάθεση της διανυσματικής βάσης του συστήματος αναφοράς σε κάθε σημείο). Χάρις στη ικανοποίηση των δύο απαιτήσεων με ένα μόνο εργαλείο, η χρήση συστήματος αναφοράς είναι σχεδόν «ἐκ τῶν ὤν οὐκ ἄνευ» για την περιγραφή φυσικών φαινομένων στον ευκλείδειο χώρο της Νευτώνειας μηχανικής.

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Δύο οικείες έννοιες από την ευκλείδεια γεωμετρία, η απόσταση και η γωνία, βρίσκουν τη μαθηματική τους έκφραση μέσα από την έννοια του ***εσωτερικού γινομένου*** $\vec{u}\bullet\vec{v}$ δύο διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

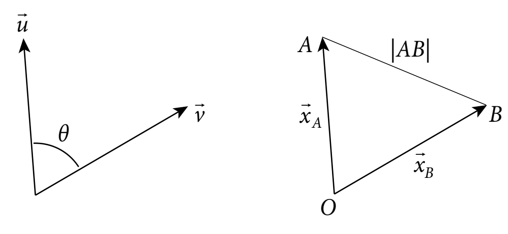
Από τις ιδιότητες της συμμετρίας $\vec{u}\bullet\vec{v}=\vec{v}\bullet\vec{u}$ και της γραμμικότητας

$$\vec{u}\bullet(\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2)=\lambda_1(\vec{u}\bullet\vec{v}_1)+\lambda_2(\vec{u}\bullet\vec{v}_2)\,,$$

και την συνακόλουθη ιδιότητα $(\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2)\bullet\vec{v}=\lambda_1(\vec{u}_1\bullet\vec{v})+\lambda_2(\vec{u}_2\bullet\vec{v})$, προκύπτει ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι μία συμμετρική διγραμμική απεικόνιση g δύο διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ σε έναν πραγματικό αριθμό $\vec{u}\bullet\vec{v}=g(\vec{u},\vec{v})$.

Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου προκύπτει το μήκος $|\vec{u}|$ ενός διανύσματος $\vec{u}$,

$$|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\bullet\vec{u}}\,, \tag{7}$$



Σχήμα 6:

Σχέση γωνίας και απόστασης με το εσωτερικό γινόμενο η απόσταση $|AB|$ μεταξύ δύο σημείων A, B, με αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\vec{x}_A$, $\vec{x}_B$,

$$|AB| = |\vec{x}_B - \vec{x}_A| = \sqrt{(\vec{x}_B - \vec{x}_A)\bullet(\vec{x}_B - \vec{x}_A)}, \tag{8}$$

καθώς και η γωνία θ μεταξύ δύο διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ από τις σχέσεις

$$\vec{u}\bullet\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \arccos\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}. \tag{9}$$

Διαφορά φυσικού και μαθηματικού Ευκλείδειου χώρου

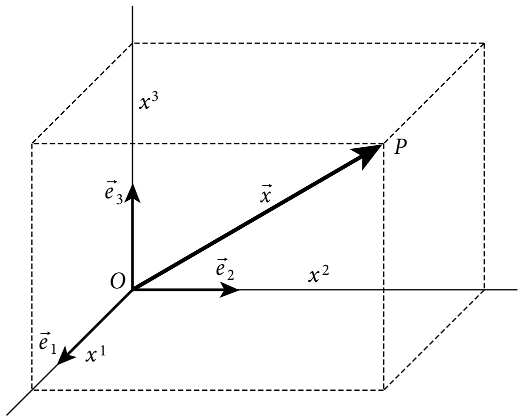
Τα σημεία P του φυσικού (γεωμετρικού) τρισδιάστατου χώρου βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$. Το σύνολο των διανυσμάτων θέσης συνιστούν έναν μαθηματικό ευκλείδειο χώρο, όπως εξάλλου συμβαίνει και για το σύνολο των τοπικών διανυσμάτων σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Ο ***μαθηματικός ευκλείδειος χώρος*** είναι γενικά ένα σύνολο στοιχείων για των οποίων μπορούν να σχηματιστούν γραμμικοί συνδυασμοί οι οποίοι είναι επίσης στοιχεία του συνόλου και για τα οποία επιπλέον ορίζεται, μια διγραμμική συμμετρική μορφή (δηλαδή απεικόνιση με πραγματική τιμή) ως εσωτερικό γινόμενο.

Αντίθετα ο φυσικός ευκλείδειος χώρος δεν συνιστά και ένα μαθηματικό ευκλείδειο χώρο, επειδή τα στοιχεία του (σημεία) δεν μπορούν ούτε να πολλαπλασιασθούν με πραγματικούς αριθμούς, ούτε να προστεθούν! Το σημείο C με διάνυσμα θέσης $\vec{x}_A + \vec{x}_B$, (όπου $\vec{x}_A$, $\vec{x}_B$ τα διανύσματα θέσης αντίστοιχων σημείων A, B), δεν αποτελεί σε καμία περίπτωση άθροισμα των σημείων A και B, αφού αυτό εξαρτάται από την αυθαίρετη επιλογή της αρχής O του συστήματος αναφοράς. Από μαθηματική σκοπιά ο φυσικός ευκλείδειος χώρος είναι ένας ***αφινικός*** (ή ομοπαραλληλικός) ***χώρος***.

Εσωτερικό γινόμενο μπορεί να οριστεί και για σύνολα σημείων τα οποία δεν συνιστούν ένα ευκλείδειο (επίπεδο) χώρο. Σύνολα σημείων με εσωτερικό γινόμενο για τα τοπικά τους διανύσματα, ονομάζονται ***χώροι Riemman***. Παραδείγματα χώρων Riemman είναι οι διδιάστατες καμπύλες επιφάνειες του τρισδιάστατου ευκλείδειου χώρου, όπως, π.χ. η επιφάνεια μιας σφαίρας.

Ορθοκανονικές βάσεις

Δύο διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$, ***ορθογώνια*** μεταξύ τους, σχηματίζουν γωνία $\theta = 90^\circ$ με $\cos\theta = \cos 90^\circ = 0$ και έχουν εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.



Σχήμα 7:

Διάνυσμα θέσης και (συνήθεις) καρτεσιανές συντεταγμένες ως προς ορθοκανονική διανυσματική βάση

Η πιο πλεονεκτική επιλογή των διανυσμάτων βάσης είναι τα ορθοκανονικά διανύσματα, δηλαδή διανύσματα ορθογώνια μεταξύ τους και με μήκος 1. Τα διανύσματα μιας ***ορθοκανονικής*** βάσης ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\vec{e}_i \bullet \vec{e}_k = \delta_{ik} \equiv \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}. \tag{10}$$

Με την επιλογή αυτή οι συνιστώσες ενός διανύσματος και οι (ορθοκανονικές) καρτεσιανές συντεταγμένες δίνονται από τις σχέσεις

$$u^i = \vec{u} \bullet \vec{e}_i, \quad x^i = \vec{x} \bullet \vec{e}_i, \quad i = 1,2,3, \tag{11}$$

το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{u} = u^1\vec{e}_1 + u^2\vec{e}_2 + u^3\vec{e}_3$ και $\vec{v} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + v^3\vec{e}_3$ από τη σχέση

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3 = \begin{bmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}. \tag{12}$$

και το μήκος από τη σχέση (Πυθαγόρειο θεώρημα στις 3 διαστάσεις)

$$|\vec{u}| = \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2} = \sqrt{\mathbf{u}^T\mathbf{u}} \; . \qquad (13)$$

Μη ορθοκανονικές βάσεις

Στην γενικότερη περίπτωση της μη ορθοκανικής βάσης οι παραπάνω σχέσεις γίνονται πιο περίπλοκες και περιλαμβάνουν τα εσωτερικά γινόμενα των διανυσμάτων βάσης $g_{ik} \equiv \vec{e}_i \bullet \vec{e}_k$. Συγκεκριμένα

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} g_{ik} u^i v^k = \begin{bmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} = \mathbf{u}^T\mathbf{G}\mathbf{v} \, , \qquad (14)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} g_{ik} u^i u^k} = \sqrt{\mathbf{u}^T\mathbf{G}\mathbf{u}} \, , \qquad (15)$$

ενώ οι συνιστώσες διανύσματος προκύπτουν από τη λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} g_{11}u^1 + g_{12}u^2 + g_{13}u^3 &= \vec{u} \bullet \vec{e}_1 \\ g_{21}u^1 + g_{22}u^2 + g_{23}u^3 &= \vec{u} \bullet \vec{e}_2 \\ g_{31}u^1 + g_{32}u^2 + g_{33}u^3 &= \vec{u} \bullet \vec{e}_3 \, . \end{aligned} \qquad (16)$$

Ο 3×3 πίνακας $\mathbf{G}$ ονομάζεται ***μετρικός πίνακας*** της μη ορθοκανονικής βάσης $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Για μία ορθοκανονική βάση ισχύει $\mathbf{G} = \mathbf{I}$ (μοναδιαίος πίνακας).

Μία τελευταία επιλογή σε μία ορθοκανονική βάση $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ σχετίζεται με τον προσανατολισμό της, δηλαδή με την επιλογή της φοράς κάθε διανύσματος σε σχέση με τα άλλα δύο. Αν από την πλευρά του $\vec{e}_3$ το $\vec{e}_1$ φαίνεται στα δεξιά του $\vec{e}_2$ έχουμε ένα ***δεξιόστροφο*** σύστημα και στην αντίθετη περίπτωση ένα αριστερόστροφο.

Από δω και πέρα όλα τα παγκόσμια συστήματα αναφοράς και οι σχετικές καρτεσιανές συντεταγμένες θα θεωρούνται (χωρίς αυτό να διατυπώνεται ρητά) ότι αναφέρονται σε ορθοκανονικές και δεξιόστροφες βάσεις.

Επίσης θα παραλείπουμε το επίθετο «παγκόσμιος» και θα αναφερόμαστε απλά σε ένα σύστημα αναφοράς, αφού από αυτό προκύπτει με παράλληλη μετάθεση και ένα τοπικό σύστημα σε κάθε σημείο του χώρου.

Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

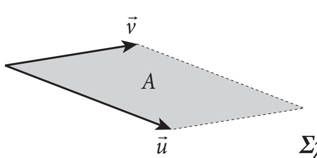
Ο δεύτερος τύπος γινομένου μεταξύ διανυσμάτων είναι το εξωτερικό γινόμενο $\vec{u}\times\vec{v}$, το οποίο συνδέεται με το εμβαδόν

$$A = |\vec{u}\times\vec{v}| \tag{17}$$

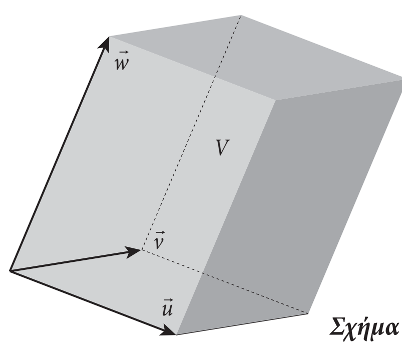
του παραλληλόγραμμου που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ (σχήμα 8), καθώς και με τον όγκο

$$V = (\vec{u}\times\vec{v})\bullet\vec{w} \tag{18}$$

του παραλληλεπιπέδου με πλευρές τρία δεξιόστροφα διατεταγμένα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ (σχήμα 9).



Σχήμα 8

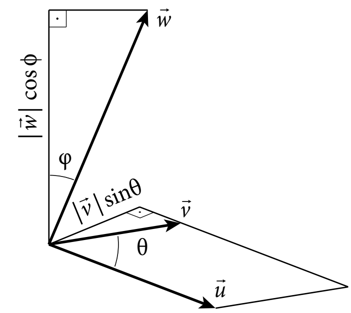


Σχήμα 9

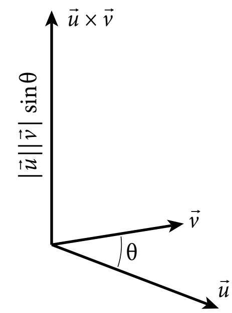
Έστω θ η γωνία μεταξύ $\vec{u}$ και $\vec{v}$ και ϕ η γωνία μεταξύ $\vec{w}$ και της καθέτου στο επίπεδο των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ (σχήμα 10). Το παραλληλόγραμμο, που σχηματίζουν τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$, έχει βάση $|\vec{u}|$, ύψος $|\vec{v}|\sin\theta$ και εμβαδόν $A = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$. Το παραλληλεπίπεδο των $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, με εμβαδόν βάσης A , έχει ύψος $h = |\vec{w}|\cos\varphi$ και όγκο

$$V = Ah = \left(|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta\right)|\vec{w}|\cos\varphi = (\vec{u}\times\vec{v})\bullet\vec{w}\,. \tag{19}$$

Από την παραπάνω σχέση είναι φανερό ότι το εξωτερικό γινόμενο $\vec{u}\times\vec{v}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ (σχήμα 11) με μέγεθος



Σχήμα 10



Σχήμα 11

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta\,, \tag{20}$$

ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Ο πραγματικός αριθμός

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = (\vec{u}\times\vec{v})\bullet\vec{w}\,, \tag{21}$$

ονομάζεται ***μικτό γινόμενο*** των διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ και ισούται με τον όγκο V του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν όταν τα διανύσματα αυτά σχηματίζουν δεξιόστροφη τριάδα, ή με το αντίθετο $-V$ όταν η σχετική τριάδα είναι αριστερόστροφη. Για το μικτό γινόμενο ισχύει η ιδιότητα

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = -[\vec{u},\vec{w},\vec{v}] = -[\vec{w},\vec{v},\vec{u}] = -[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]\,, \tag{22}$$

δηλαδή το πρόσημο διατηρείται για κυκλική μετάθεση των τριών διανυσμάτων.

Ιδιότητες εξωτερικού γινόμενου

Για το εξωτερικό γινόμενο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

$$\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}\,, \tag{23}$$

$$\vec{u}\times\vec{u} = 0\,, \tag{24}$$

$$\vec{u}\times(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) = \lambda(\vec{u}\times\vec{v})+\mu(\vec{u}\times\vec{w})\,, \tag{25}$$

$$(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\times\vec{w} = \lambda(\vec{u}\times\vec{w})+\mu(\vec{v}\times\vec{w})\,. \tag{26}$$

Για τα τρία ορθοκανονικά διανύσματα βάσης $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ενός καρτεσιανού συστήματος αναφοράς ισχύουν οι σχέσεις ($\theta = 90^\circ$, $\phi = 0^\circ$)

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 , \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 , \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 . \tag{27}$$

Συνιστώσες του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σχέση ανάμεσα στις συνιστώσες δύο διανυσμάτων $\vec{w} = \vec{\mathbf{e}}\,\mathbf{w}$, $\vec{v} = \vec{\mathbf{e}}\,\mathbf{v}$ και του εξωτερικού τους γινομένου $\vec{u} = \vec{\mathbf{e}}\,\mathbf{u} = \vec{w} \times \vec{v}$

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \vec{w} \times \vec{v} = (w^1\vec{e}_1 + w^2\vec{e}_2 + w^3\vec{e}_3) \times (v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + v^3\vec{e}_3) = \\
&= w^1\, \vec{e}_1 \times (v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + v^3\vec{e}_3) + w^2\, \vec{e}_2 \times (v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + v^3\vec{e}_3) + \\
&\qquad + w^3\, \vec{e}_3 \times (v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + v^3\vec{e}_3) = \\
&= w^1 v^1\, \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + w^1 v^2\, \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + w^1 v^3\, \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + w^2 v^1\, \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + \\
&\qquad + w^2 v^2\, \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 + w^2 v^3\, \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 + w^3 v^1\, \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + w^3 v^2\, \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 + w^3 v^3\, \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \\
&= 0 + w^1 v^2\, \vec{e}_3 + w^1 v^3\, (-\vec{e}_2) + w^2 v^1 (-\vec{e}_3) + 0 + w^2 v^3\, \vec{e}_1 + w^3 v^1\, \vec{e}_2 + w^3 v^2 (-\vec{e}_1) + 0 = \\
&= (w^2 v^3 - w^3 v^2)\vec{e}_1 + (w^3 v^1 - w^1 v^3)\vec{e}_2 + (w^1 v^2 - w^2 v^1)\vec{e}_3 = \\
&= \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^2 v^3 - w^3 v^2 \\ w^3 v^1 - w^1 v^3 \\ w^1 v^2 - w^2 v^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Επομένως

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^2 v^3 - w^3 v^2 \\ w^3 v^1 - w^1 v^3 \\ w^1 v^2 - w^2 v^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w^3 & w^2 \\ w^3 & 0 & -w^1 \\ -w^2 & w^1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^2 \end{bmatrix} = \mathbf{W}\,\mathbf{v} = [\mathbf{w}\times]\,\mathbf{v} \tag{29}$$

όπου εισήγαμε τον πίνακα

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}\times] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -w^3 & w^2 \\ w^3 & 0 & -w^1 \\ -w^2 & w^1 & 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

ο οποίος είναι αντισυμμετρικός, δηλαδή έχει την ιδιότητα

$$\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}\,, \quad ([\mathbf{w}\times]^T = -[\mathbf{w}\times]\,). \tag{31}$$

Κάθε αντισυμμετρικός πίνακας έχει μηδενικά τα διαγώνια στοιχεία του ($W_{ii} = 0$), ενώ μη διαγώνια στοιχεία συμμετρικά ως προς τη διαγώνιο έχουν αντίθετο πρόσημο ($W_{ik} = -W_{ki}$, $i \neq k$).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι συνιστώσες $\mathbf{u}$ του εξωτερικού γινομένου $\vec{u} = \vec{w} \times \vec{v}$, συνδέονται με τις συνιστώσες $\mathbf{w}$ και $\mathbf{v}$ των διανυσμάτων $\vec{w}$ και $\vec{v}$, αντίστοιχα, μέσω της σχέσης

$$\vec{u} = \vec{w} \times \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} = [\mathbf{w}\times]\,\mathbf{v} \tag{32}$$

όπου ο αντισυμμετρικός πίνακας $[\mathbf{w}\times]$ ορίζεται από τη σχέση (30).

Αξονικό διάνυσμα αντισυμμετρικού πίνακα (αντισυμμετρικής απεικόνισης)

Σε οποιονδήποτε 3×3 αντισυμμετρικό πίνακα

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διάνυσμα $\vec{\omega} = \vec{\mathbf{e}}\,\boldsymbol{\omega}$ με

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \Omega_{32} \\ \Omega_{13} \\ \Omega_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Omega_{23} \\ -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

ώστε να ισχύει η σχέση $\mathbf{\Omega} = [\boldsymbol{\omega}\times]$. Το διάνυσμα $\vec{\omega}$ είναι το ***αξονικό διάνυσμα*** που αντιστοιχεί στην αντισυμμετρική απεικόνιση Ω η οποία παριστάνεται στο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς από τον πίνακα $\mathbf{\Omega}$, έτσι ώστε αν $\vec{b} = \Omega(\vec{a}) = \vec{\omega} \times \vec{a}$ τότε για τις συνιστώσες να ισχύει η σχέση $\mathbf{b} = \mathbf{\Omega}\,\mathbf{a} = [\boldsymbol{\omega}\times]\mathbf{a}$.

Ιδιότητες αντισυμμετρικών πινάκων

Μερικές ιδιότητες των αντισυμμετρικών πινάκων όταν αυτές εκφράζονται μέσα από τα αξονικά τους διανύσματα είναι οι εξής

$$[\mathbf{a}\times]^T = -[\mathbf{a}\times]\,,\quad [\mathbf{a}\times]\mathbf{b} = -[\mathbf{b}\times]\mathbf{a}\,,\quad [\mathbf{a}\times]\mathbf{a} = 0\,, \tag{35}$$

για κάθε πραγματικό αριθμό λ

$$[(\lambda\mathbf{a})\times] = \lambda[\mathbf{a}\times]\,, \tag{36}$$

$$[\mathbf{a}\times][\mathbf{b}\times] = \mathbf{b}\mathbf{a}^T - (\mathbf{a}^T\mathbf{b})\mathbf{I}\,,\quad ([\mathbf{a}\times]^2 = \mathbf{a}\mathbf{a}^T - (\mathbf{a}^T\mathbf{a})\mathbf{I}\,) \tag{37}$$

ενώ αν $\mathbf{Q}$ είναι ένας ορθογώνιος πίνακας ($\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$, $|\mathbf{Q}| = 1$), τότε

$$[(\mathbf{Q}\mathbf{a})\times] = \mathbf{Q}[\mathbf{a}\times]\mathbf{Q}^T\,. \tag{38}$$

Φυσική σημασία της ορίζουσας πίνακα διαστάσεων 3×3

Για έναν ομαλό (τετραγωνικό και αντιστρέψιμο) πίνακα $\mathbf{S}$, ο οποίος αντιστοιχεί σε μία γραμμική απεικόνιση S, η ορίζουσα $\det S = |\mathbf{S}|$ εκφράζει τη μεταβολή του όγκου $V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\bullet(\vec{b}\times\vec{c})$ του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$. Αν $V(S\vec{a},S\vec{b},S\vec{c})$ είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα διανύσματα $S\vec{a}$, $S\vec{b}$, $S\vec{c}$ (εικόνες των $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, αντίστοιχα για τη γραμμική απεικόνιση S) τότε

$$|\mathbf{S}| = \frac{V(S\vec{a},S\vec{b},S\vec{c})}{V(\vec{a},\vec{b},\vec{c})} = \frac{(S\vec{a})\bullet[(S\vec{b})\times(S\vec{c})]}{\vec{a}\bullet(\vec{b}\times\vec{c})} = \frac{(\mathbf{S}\mathbf{a})^T[(\mathbf{S}\mathbf{b})\times](\mathbf{S}\mathbf{c})}{\mathbf{a}^T[\mathbf{b}\times]\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{S}^T[(\mathbf{S}\mathbf{b})\times]\mathbf{S}\mathbf{c}}{\mathbf{a}^T[\mathbf{b}\times]\mathbf{c}} \tag{39}$$

και επειδή τα διανύσματα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ είναι αυθαίρετα, ισχύει η σχέση $\mathbf{S}^T[(\mathbf{S}\mathbf{b})\times]\mathbf{S} = |\mathbf{S}|[\mathbf{b}\times]$, από την οποία προκύπτει η ιδιότητα

$$[(\mathbf{S}\mathbf{b})\times] = |\mathbf{S}|\,\mathbf{S}^{-T}[\mathbf{b}\times]\mathbf{S}^{-1}\,. \tag{40}$$

Από την ιδιότητα αυτή προκύπτει η παραπάνω ιδιότητα (38) για την ειδική περίπτωση όπου ο πίνακας είναι ορθογώνιος.

2.4 Σχέσεις μεταξύ δύο διαφορετικών συστημάτων αναφοράς

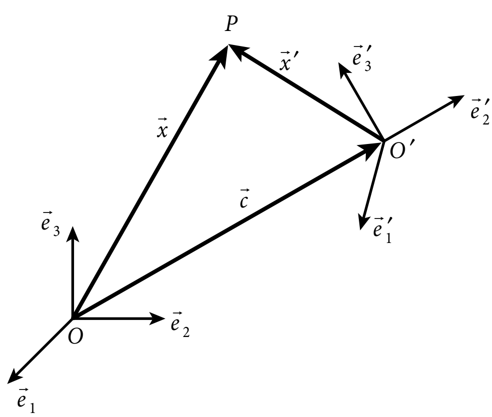
Έστω δύο διαφορετικά συστήματα αναφοράς $\vec{e}_1(O)$, $\vec{e}_2(O)$, $\vec{e}_3(O)$ και $\vec{e}_1'(O')$, $\vec{e}_2'(O')$, $\vec{e}_3'(O')$, με διαφορετικές αρχές και διανύσματα βάσης. Ένα σημείο P έχει στα δύο αυτά συστήματα διαφορετικά διανύσματα θέσης $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ και $\vec{x}' = \overrightarrow{O'P}$. Αν θέσουμε $\vec{c} = \overrightarrow{OO'}$ ισχύει προφανώς η σχέση $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$, δηλαδή

$$\vec{x} = \vec{c} + \vec{x}' . \tag{41}$$

Ένα διάνυσμα $\vec{v}$ που εφαρμόζεται στο σημείο P θα εκφραστεί μέσω των συνιστωσών του στις τοπικές βάσεις $\vec{e}_1(P)$, $\vec{e}_2(P)$, $\vec{e}_3(P)$ και $\vec{e}_1'(P)$, $\vec{e}_2'(P)$, $\vec{e}_3'(P)$, οι οποίες προκύπτουν από την παράλληλη μετάθεση των αρχικών βάσεων στο P από τα σημεία O και O', αντίστοιχα. Η ανάλυση του $\vec{v}$ σε συνιστώσες στα δύο συστήματα αναφοράς είναι

$$\vec{v}(P) = v^1\vec{e}_1(P) + v^2\vec{e}_2(P) + v^3\vec{e}_3(P) , \tag{42}$$

$$\vec{v}(P) = v'^1\vec{e}_1'(P) + v'^2\vec{e}_2'(P) + v'^3\vec{e}_3'(P) . \tag{43}$$



Σχήμα 12:

Σχέση μεταξύ δύο διαφορετικών συστημάτων αναφοράς

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες του P στα δύο συστήματα μπορούν να συνδεθούν με βάση τη σχέση $\vec{x} = \vec{c} + \vec{x}'$ αν λάβουμε υπόψη ότι

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1(O) + x^2\vec{e}_2(O) + x^3\vec{e}_3(O) , \tag{44}$$

$$\vec{x}' = x'^1\vec{e}_1'(O') + x'^2\vec{e}_2'(O') + x'^3\vec{e}_3'(O')\,, \tag{45}$$

$$\vec{c} = c^1\vec{e}_1(O) + c^2\vec{e}_2(O) + c^3\vec{e}_3(O) = c'^1\vec{e}_1'(O') + c'^2\vec{e}_2'(O') + c'^3\vec{e}_3'(O')\,. \tag{46}$$

Για να πετύχουμε την απευθείας σύνδεση μεταξύ συντεταγμένων και συνιστωσών στα δύο συστήματα πρέπει να εκφράσουμε τα διανύσματα της κάθε βάσης σε σχέση με τα διανύσματα της άλλης, αφού και οι δύο μετατεθούν σε ένα οποιοδήποτε κοινό σημείο. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό πινάκων

$$\vec{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{e}}' = \begin{bmatrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' & \vec{e}_2' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} \tag{47}$$

οι προηγούμενες σχέσεις παίρνουν τη μορφή

$$\vec{v}(P) = \vec{\mathbf{e}}(P)\,\mathbf{v} = \vec{\mathbf{e}}'(P)\,\mathbf{v}'\,, \tag{48}$$

$$\vec{x} = \vec{\mathbf{e}}(O)\,\mathbf{x}\,, \tag{49}$$

$$\vec{x}' = \vec{\mathbf{e}}'(O')\,\mathbf{x}'\,, \tag{50}$$

$$\vec{c} = \vec{\mathbf{e}}(O)\,\mathbf{c} = \vec{\mathbf{e}}'(O')\,\mathbf{c}'\,. \tag{51}$$

Για τη σύνδεση μεταξύ των δύο βάσεων σε οποιοδήποτε σημείο θέτουμε $\vec{e}_i' = R_{i1}\vec{e}_1 + R_{i2}\vec{e}_2 + R_{i3}\vec{e}_3$, $i = 1,2,3$, όπου R_{ik} είναι η k συνιστώσα του διανύσματος $\vec{e}_i'$ ως προς τη βάση $\vec{\mathbf{e}}$. Με συμβολισμό πινάκων οι σχέσεις αυτές γίνονται

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{e}}' &= \begin{bmatrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' & \vec{e}_3' \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} R_{11}\vec{e}_1 + R_{12}\vec{e}_2 + R_{13}\vec{e}_3 & R_{21}\vec{e}_1 + R_{22}\vec{e}_2 + R_{23}\vec{e}_3 & R_{31}\vec{e}_1 + R_{32}\vec{e}_2 + R_{33}\vec{e}_3 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{e}}\,\mathbf{R}^T\,,
\end{aligned} \tag{52}$$

όπου

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}. \tag{53}$$

είναι ο ***πίνακας στροφής*** από το σύστημα $\vec{\mathbf{e}}$ στο σύστημα $\vec{\mathbf{e}}'$.

Ο πίνακας $\mathbf{R}$ είναι ορθογώνιος ($\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, $|\mathbf{R}| = 1$) ιδιότητα η οποία προκύπτει από την ορθοκανονικότητα των βάσεων $\vec{\mathbf{e}}$ και $\vec{\mathbf{e}}'$. Οι σχέσεις ορθοκανονικότητας $\vec{e}_i \bullet \vec{e}_k = \delta_{ik}$, $\vec{e}'_i \bullet \vec{e}'_k = \delta_{ik}$ μπορούν να συνδυαστούν σε μορφή πινάκων ως εξής

$$\vec{\mathbf{e}}^T \bullet \vec{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}, \tag{54}$$

$$\vec{\mathbf{e}}'^T \bullet \vec{\mathbf{e}}' = \mathbf{I}. \tag{55}$$

Επομένως

$$\vec{\mathbf{e}}'^T \bullet \vec{\mathbf{e}}' = \left(\vec{\mathbf{e}}\mathbf{R}^T\right)^T \bullet \left(\vec{\mathbf{e}}\mathbf{R}^T\right) = \mathbf{R}(\vec{\mathbf{e}}^T \bullet \vec{\mathbf{e}})\mathbf{R}^T = \mathbf{R}\,\mathbf{I}\,\mathbf{R}^T = \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \tag{56}$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \tag{57}$$

και η ορθογωνικότητα του πίνακα $\mathbf{R}$ έχει αποδειχτεί.

Από τη σχέση $\vec{\mathbf{e}}' = \vec{\mathbf{e}}\mathbf{R}^T$ προκύπτει ότι $\vec{\mathbf{e}}'\mathbf{R} = \vec{\mathbf{e}}\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \vec{\mathbf{e}}$ και οι σχέσεις μεταξύ των δύο βάσεων είναι

$$\vec{\mathbf{e}}' = \vec{\mathbf{e}}\mathbf{R}^T, \quad \vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}'\mathbf{R}. \tag{58}$$

Από τη σχέση $\vec{v} = \vec{\mathbf{e}}'\,\mathbf{v}' = \vec{\mathbf{e}}\,\mathbf{v} = \vec{\mathbf{e}}'\,\mathbf{R}\,\mathbf{v}$ προκύπτει ότι

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R}\,\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{R}^T\mathbf{v}', \tag{59}$$

ή αναλυτικά

$$\begin{bmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ v'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ v'^3 \end{bmatrix}. \tag{60}$$

Για τις καρτεσιανές συντεταγμένες έχουμε $\vec{x}' = \vec{\mathbf{e}}'\mathbf{x}' = \vec{\mathbf{e}}\mathbf{R}^T\mathbf{x}' = \vec{c} + \vec{x} = \vec{\mathbf{e}}\mathbf{c} + \vec{\mathbf{e}}\mathbf{x}$ και επομένως $\mathbf{R}^T\mathbf{x}' = \mathbf{c} + \mathbf{x}$, ή

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}(\mathbf{x} + \mathbf{c}) = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{c}', \tag{61}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}^T\mathbf{x}' - \mathbf{c} = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}' - \mathbf{c}'), \quad (\mathbf{c}' = \mathbf{R}\mathbf{c}), \tag{62}$$

ή αναλυτικά

$$\begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 + c^1 \\ x^2 + c^2 \\ x^3 + c^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c'^1 \\ c'^2 \\ c'^3 \end{bmatrix} \tag{63}$$

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'^1 - c'^1 \\ x'^2 - c'^2 \\ x'^3 - c'^3 \end{bmatrix}. \tag{64}$$

Προσανατολισμός βάσης

Ο μαθηματικός ορισμός ενός ορθογώνιου πίνακα περιορίζεται στην ιδιότητα $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$, ενώ πίνακες για τους οποίους ισχύει ότι επιπλέον $|\mathbf{R}| = 1$ χαρακτηρίζονται ως ***γνήσια ορθογώνιοι***. Αν ένας 3×3 ορθογώνιος πίνακας $\mathbf{R}$ πολλαπλασιαστεί με ένα από τους πίνακες

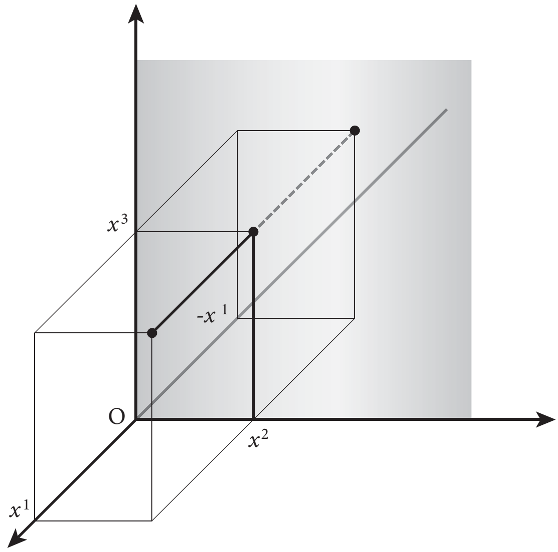
$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{65}$$

για τους οποίους $|\mathbf{E}_k| = -1$ και $\mathbf{E}_k^T\mathbf{E}_k = \mathbf{E}_k\mathbf{E}_k^T = \mathbf{E}_k^2 = \mathbf{I}$, προκύπτει ένας πίνακας $\mathbf{R}' = \mathbf{R}\mathbf{E}_k$ ή $\mathbf{R}'' = \mathbf{E}_k\mathbf{R}$, ο οποίος είναι επίσης ορθογώνιος

$$\mathbf{R}'^T\mathbf{R}' = \mathbf{E}_k^T\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{E}_k = \mathbf{E}_k^T\mathbf{E}_k = \mathbf{I}, \qquad \mathbf{R}''^T\mathbf{R}'' = \mathbf{R}^T\mathbf{E}_k^T\mathbf{E}_k\mathbf{R} = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I} \tag{66}$$

και επομένως

$$|\mathbf{R}'| = |\mathbf{R}''| = |\mathbf{R}||\mathbf{E}_k| = -|\mathbf{R}|. \tag{67}$$



Σχήμα 13:

Μετασχηματισμοί ανάκλασης οι οποίοι μεταβάλλουν το πρόσημο ενός ορθογώνιου πίνακα από θετικό σε αρνητικό

Οι τρεις πίνακες $\mathbf{E}_k$ της σχέσης (65) αντιπροσωπεύουν «ανακλάσεις» του χώρου ως προς τα επίπεδα των αξόνων (2,3), (3,1) και (1,2), αντίστοιχα. Για παράδειγμα ο πρώτος δίνει μετασχηματισμό $\mathbf{x}' = \mathbf{E}_1\mathbf{x}$ ή αναλυτικά $x'^1 = -x^1$, $x'^2 = x^2$, $x'^3 = x^3$, όπου κάθε σημείο (x^1, x^2, x^3) αντικαθίσταται από το συμμετρικό του ($-x^1, x^2, x^3$) ως προς το επίπεδο των αξόνων (2,3), το οποίο λειτουργεί ως ένας καθρέφτης όπου ($-x^1, x^2, x^3$) είναι το είδωλο του σημείου (x^1, x^2, x^3). Τα διανύσματα της βάσης $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ παραμένουν τα ίδια ενώ το $\vec{e}_1$ αντικαθίσταται από το $-\vec{e}_1$. Αυτό έχει σαν συνέπεια να αλλάξει ο προσανατολισμός της βάσης και από δεξιόστροφη να γίνει αριστερόστροφη. Για να περιοριστούμε σε βάσεις με τον ίδιο προσανατολισμό (που ήδη αποφασίσαμε ότι θα είναι δεξιόστροφος) πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μόνο γνήσια ορθογώνιους πίνακες ($|\mathbf{R}|=1$), οι οποίοι διατηρούν το δεξιόστροφο προσανατολισμό των βάσεων, ενώ οι μη γνήσια ορθογώνιοι πίνακες ($|\mathbf{R}|=-1$) μετατρέπουν ένα δεξιόστροφο σύστημα σε αριστερόστροφο και αντίστροφα.

> *Από δω και πέρα θα αναφερόμαστε σε ορθογώνιους πίνακες εννοώντας τους γνήσια ορθογώνιους πίνακες παραλείποντας χάριν απλότητας τη σχετική διευκρίνηση.*

2.5 Περιγραφή του πίνακα στροφής. Στροφές γύρω από τους άξονες.

Ανάλυση στροφής σε 3 στροφές γύρω από τους άξονες

Η στροφή ενός συστήματος αναφοράς από τη θέση $\vec{e}_1(O')$, $\vec{e}_2(O')$, $\vec{e}_3(O')$ στη θέση $\vec{e}_1'(O')$, $\vec{e}_2'(O')$, $\vec{e}_3'(O')$ περιγράφεται από τον πίνακα $\mathbf{R}$, για τον οποίο όμως χρειαζόμαστε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό μοντέλο. Στο μοντέλο αυτό θα υπεισέρχονται μόνο τρεις μεταβλητές, π.χ. $\mathbf{R}=\mathbf{R}(a,b,c)$, επειδή τα 9 στοιχεία του 3×3 πίνακα $\mathbf{R}$, ικανοποιούν 6 σχέσεις ορθογωνικότητας $\mathbf{R}\mathbf{R}^T=\mathbf{I}$, οπότε παραμένουν $9-6=3$ ανεξάρτητες παράμετροι. Εκ πρώτης όψεως έχουμε 9 σχέσεις για τα 9 στοιχεία του πίνακα $\mathbf{R}\mathbf{R}^T$. Επειδή όμως ο πίνακας αυτός είναι συμμετρικός οι σχέσεις των 3 πάνω από τη διαγώνιο στοιχείων θα είναι ταυτόσημες με τις αντίστοιχες σχέσεις των 3 στοιχείων κάτω από τη διαγώνιο. Για παράδειγμα η σχέση $(\mathbf{R}\mathbf{R}^T)_{ik}=R_{i1}R_{k1}+R_{i2}R_{k2}+R_{i3}R_{k3}=0$, όπου $i\neq k$ είναι προφανώς ταυτόσημη με τη σχέση $(\mathbf{R}\mathbf{R}^T)_{ki}=R_{k1}R_{i1}+R_{k2}R_{i2}+R_{k3}R_{i3}=0$.

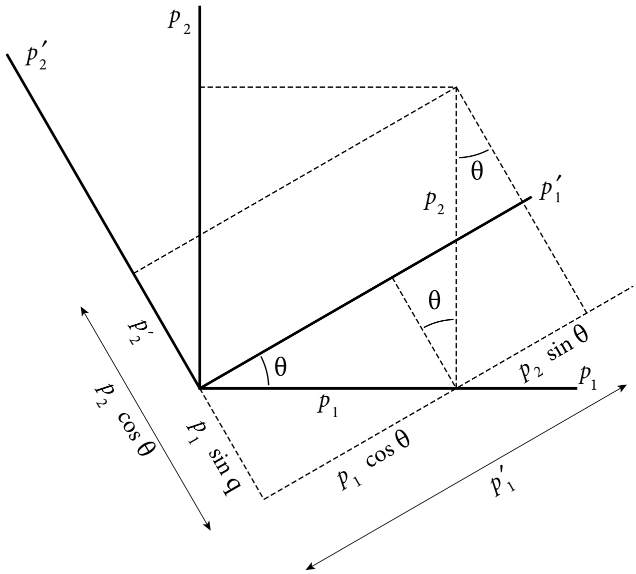
Η μετάβαση από τη αρχική θέση των διανυσμάτων βάσης στη νέα θέση μπορεί να επιτευχθεί με τη βοήθεια τριών διαδοχικών στροφών γύρω από τους άξονες, κατά αντίστοιχες γωνίες θ_1, θ_2, θ_3. Αν οι στροφές αυτές περιγράφονται από τους ορθογώνιους πίνακες $\mathbf{R}_1(\theta_1)$, $\mathbf{R}_2(\theta_2)$, $\mathbf{R}_3(\theta_3)$, ο συνολικός πίνακας στροφής θα είναι

$$\mathbf{R}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\mathbf{R}_3(\theta_3)\mathbf{R}_2(\theta_2)\mathbf{R}_1(\theta_1), \tag{68}$$

όπου οι πίνακες εμφανίζονται στο γινόμενο από τα δεξιά προς στα αριστερά σύμφωνα με τη σειρά που εφαρμόστηκαν οι στροφές γύρω από τους άξονες.

Στροφή στο επίπεδο

Για να προσδιορίσουμε την αναλυτική μορφή των επιμέρους πινάκων στροφής γύρω από τους άξονες θα χρειαστούμε πρώτα τις σχέσεις αλλαγής των συντεταγμένων λόγω στροφής σε ένα επίπεδο. Όταν το σύστημα στρέφεται γύρω από έναν άξονα η συντεταγμένη που αντιστοιχεί στον άξονα αυτόν δεν μεταβάλλεται. Αν p_1,p_2 είναι αρχικές καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο, ύστερα από μία στροφή των αξόνων κατά γωνία θ (θετική κατά την αντίστροφη φορά των δεικτών του ρολογιού), θα προκύψουν νέες συντεταγμένες p_1',p_2'. Οι σχέσεις ανάμεσα σε αρχικές και νέες συντεταγμένες προκύπτουν εύκολα όπως φαίνεται στο σχήμα (14):



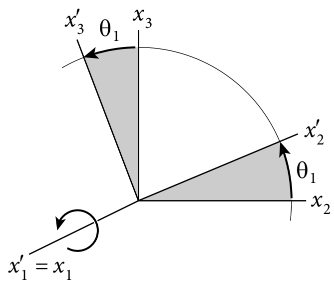
Σχήμα 14:

Μεταβολή συντεταγμένων στο επίπεδο λόγω στροφής των αξόνων κατά γωνία θ

$$p_1' = \cos\theta\, p_1 + \sin\theta\, p_2 \ ,$$
$$p_2' = \cos\theta\, p_2 - \sin\theta\, p_1 \ . \qquad (69)$$

Στοιχειώδεις στροφές γύρω από τους 3 άξονες

Για στροφή γύρω από τον πρώτο άξονα ($x'^1 = x^1$) αρκεί να θέσουμε $\theta = \theta_1$, $p_1 = x^2$, $p_2 = x^3$, $p_1' = x'^2$, $p_2' = x'^3$, οπότε η σχέση μετασχηματισμού $\mathbf{x}' = \mathbf{R}_1(\theta_1)\mathbf{x}$ γίνεται



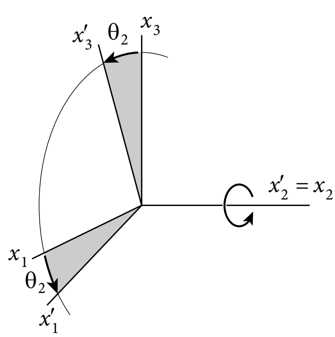
Σχήμα 15:

Στοιχειώδης στροφή γύρω από τον 1ο άξονα

$$\begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \cos\theta_1 x^2 + \sin\theta_1 x^3 \\ \cos\theta_1 x^3 - \sin\theta_1 x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}, \tag{70}$$

$$\mathbf{R}_1(\theta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}. \tag{71}$$

Για στροφή γύρω από το δεύτερο άξονα ($x'^2 = x^2$) αρκεί να θέσουμε $\theta = \theta_2$, $p_1 = x^3$, $p_2 = x^1$, $p_1' = x'^3$, $p_2' = x'^1$, οπότε η σχέση μετασχηματισμού $\mathbf{x}' = \mathbf{R}_2(\theta_2)\mathbf{x}$ γίνεται



Σχήμα 16:

Στοιχειώδης στροφή γύρω από τον 2ο άξονα

$$\begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 x^1 - \sin\theta_2 x^3 \\ x^2 \\ \cos\theta_2 x^3 + \sin\theta_2 x^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}, \tag{72}$$

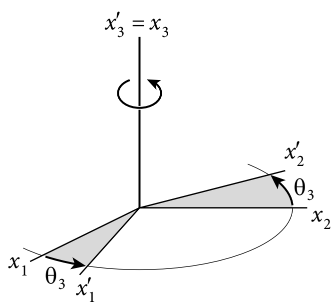
$$\mathbf{R}_2(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}. \tag{73}$$

Για στροφή γύρω από τον τρίτο άξονα ($x'^3 = x^3$) αρκεί να θέσουμε $\theta = \theta_3$, $p_1 = x^1$, $p_2 = x^2$, $p_1' = x'^1$, $p_2' = x'^2$, οπότε η σχέση μετασχηματισμού

$\mathbf{x}' = \mathbf{R}_3(\theta_3)\mathbf{x}$ γίνεται

$$\begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 x^1 + \sin\theta_3 x^2 \\ \cos\theta_3 x^2 - \sin\theta_3 x^1 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}, \tag{74}$$

$$\mathbf{R}_3(\theta_3) = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{75}$$



Σχήμα 17:

Στοιχειώδης στροφή γύρω από τον 2ο άξονα

Με την ευκαιρία, έχουμε ήδη προσδιορίσει τον πίνακα στροφής στο επίπεδο $\mathbf{R}(\theta)$ ο οποίος εμφανίζεται έμμεσα στις σχέσεις (69). Θέτοντας $x^1 = p^1$, $x^2 = p^2$, $\mathbf{x} = [x^1 \; x^2]^T$, για τις συντεταγμένες στο επίπεδο, οι σχέσεις μεταβολής των συντεταγμένων ύστερα από στροφή κατά γωνία θ είναι

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\theta)\,\mathbf{x}, \tag{76}$$

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{77}$$

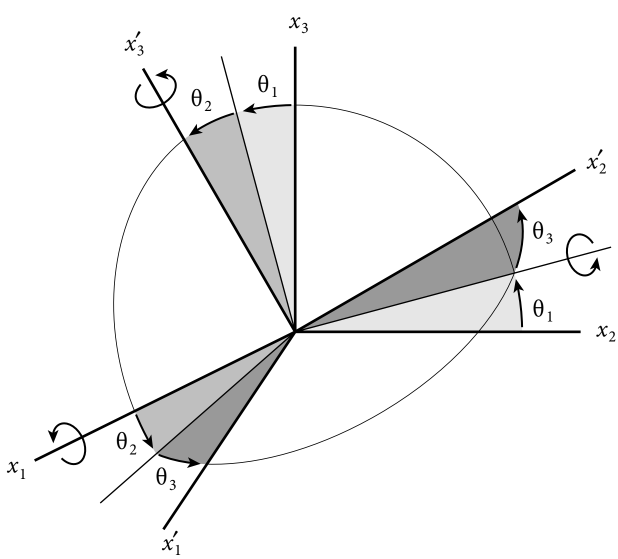
Δυνατότητες επιλογής στοιχειωδών στροφών. Γωνίες Cardan και Euler

Η επιλογή της σειρά στροφών γύρω από τους άξονες 1-2-3 δεν είναι υποχρεωτική, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε σειρά,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\mathbf{R}_3(\theta_3)\mathbf{R}_2(\theta_2)\mathbf{R}_1(\theta_1)\,,\\
&\mathbf{R}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\mathbf{R}_2(\theta_2)\mathbf{R}_3(\theta_3)\mathbf{R}_1(\theta_1)\,,\\
&\mathbf{R}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\mathbf{R}_1(\theta_1)\mathbf{R}_3(\theta_3)\mathbf{R}_2(\theta_2)\,,\\
&\mathbf{R}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\mathbf{R}_3(\theta_3)\mathbf{R}_1(\theta_1)\mathbf{R}_2(\theta_2)\,,\\
&\mathbf{R}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\mathbf{R}_2(\theta_2)\mathbf{R}_1(\theta_1)\mathbf{R}_3(\theta_3)\,,\\
&\mathbf{R}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\mathbf{R}_1(\theta_1)\mathbf{R}_2(\theta_2)\mathbf{R}_3(\theta_3)\,.
\end{aligned} \tag{78}$$

Οι γωνίες θ_1, θ_2, θ_3 όμως σε κάθε μια από τις παραπάνω επιλογές παίρνουν διαφορετικές τιμές προκειμένου να προκύψει τελικά ο ίδιος πίνακας $\mathbf{R}$. Όταν οι στροφές γίνονται γύρω και από τους τρεις άξονες, όπως παραπάνω, οι γωνίες στροφής ονομάζονται ***γωνίες Cardan***.

Μία διαφορετική επιλογή είναι οι ***γωνίες Euler***, όπου η πρώτη και η τελευταία στροφή γίνονται γύρω από τον ίδιο άξονα:

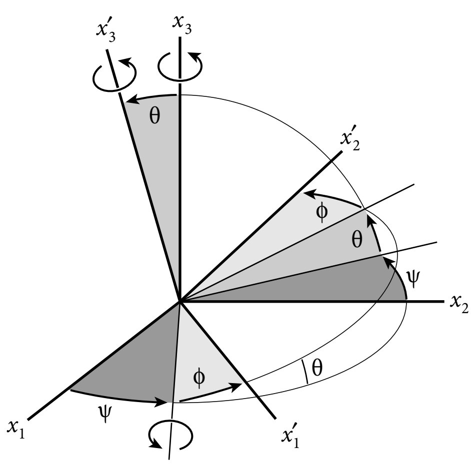


Σχήμα 18:

Γωνίες Cardan για περιστροφή $\mathbf{R}=\mathbf{R}_3(\theta_3)\mathbf{R}_2(\theta_2)\mathbf{R}_1(\theta_1)$

$$\mathbf{R}(\phi,\theta,\psi)=\mathbf{R}_1(\phi)\,\mathbf{R}_3(\theta)\,\mathbf{R}_1(\psi)\,,$$
$$\mathbf{R}(\phi,\theta,\psi)=\mathbf{R}_1(\phi)\,\mathbf{R}_2(\theta)\,\mathbf{R}_1(\psi)\,,$$
$$\mathbf{R}(\phi,\theta,\psi)=\mathbf{R}_2(\phi)\,\mathbf{R}_1(\theta)\,\mathbf{R}_2(\psi)\,,$$
$$\mathbf{R}(\phi,\theta,\psi)=\mathbf{R}_2(\phi)\,\mathbf{R}_3(\theta)\,\mathbf{R}_2(\psi)\,,$$
$$\mathbf{R}(\phi,\theta,\psi)=\mathbf{R}_3(\phi)\,\mathbf{R}_1(\theta)\,\mathbf{R}_3(\psi)\,,$$
$$\mathbf{R}(\phi,\theta,\psi)=\mathbf{R}_3(\phi)\,\mathbf{R}_2(\theta)\,\mathbf{R}_3(\psi)\,. \tag{79}$$

Παρόμοια οι γωνίες ψ, θ, ϕ παίρνουν διαφορετικές τιμές, σε κάθε μια από τις παραπάνω επιλογές, προκειμένου να προκύψει τελικά ο ίδιος πίνακας $\mathbf{R}$.



Σχήμα 19:

Γωνίες Euler για περιστροφή $\mathbf{R}=\mathbf{R}_3(\phi)\mathbf{R}_1(\theta)\mathbf{R}_3(\psi)$

Ιδιότητες των στοιχειωδών πινάκων στροφής

Μερικές βασικές ιδιότητες των στοιχειωδών πινάκων στροφής γύρω από τους άξονες είναι οι εξής:

$$\mathbf{R}_i(\alpha+\beta)=\mathbf{R}_i(\alpha)\,\mathbf{R}_i(\beta)\,, \tag{80}$$

$$\mathbf{R}_i(\alpha)\mathbf{R}_i(\beta)=\mathbf{R}_i(\beta)\,\mathbf{R}_i(\alpha) \tag{81}$$

$$\left[\mathbf{R}_i(\theta)\right]^{-1}=\left[\mathbf{R}_i(\theta)\right]^{T}=\mathbf{R}_i(-\theta)\,,\quad \mathbf{R}_i(0)=\mathbf{I}\,. \tag{82}$$

Η πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις εξηγεί γιατί στις επιλογές τριών στοιχειωδών πινάκων στροφής, για την ανάλυση ενός ορθογώνιου πίνακα $\mathbf{R}$, δεν υπάρχουν δύο διαδοχικές στροφές γύρω από τον ίδιο άξονα. Σε μια τέτοια περίπτωση $\mathbf{R}_i(\alpha)\,\mathbf{R}_i(\beta)=\mathbf{R}_i(\alpha+\beta)=\mathbf{R}_i(\alpha'+\beta')$, όπου α' και β' είναι οποιεσδήποτε άλλες γωνίες για τις οποίες ισχύει ότι $\alpha'+\beta'=\alpha+\beta$, και επομένως οι γωνίες στροφής δεν ορίζονται μονοσήμαντα.

Παράγωγοι στοιχειωδών πινάκων στροφής

Οι παράγωγοι των στοιχειωδών πινάκων στροφής δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\big[\mathbf{R}_k(\theta)\big]=-[\mathbf{i}_k\times]\,\mathbf{R}_k(\theta)=-\mathbf{R}_k(\theta)[\mathbf{i}_k\times], \tag{83}$$

όπου οι αντισυμμετρικοί «πίνακες παραγώγισης» έχουν τις τιμές

$$[\mathbf{i}_1\times]=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix},\quad [\mathbf{i}_2\times]=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\quad [\mathbf{i}_3\times]=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}. \tag{84}$$

Ο συμβολισμός που επιλέχθηκε επισημαίνει το γεγονός ότι τα αξονικά διανύσματα των αντισυμμετρικών αυτών πινάκων έχουν συνιστώσες τις στήλες του μοναδιαίου πίνακα

$$\mathbf{i}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{i}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{i}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{I}=\big[\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_3\big]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}. \tag{85}$$

Επομένως τα αξονικά διανύσματα των πινάκων παραγώγισης είναι τα τρία διανύσματα βάσης $\vec{e}_1=\vec{\mathbf{e}}\,\mathbf{i}_1$, $\vec{e}_2=\vec{\mathbf{e}}\,\mathbf{i}_2$, $\vec{e}_3=\vec{\mathbf{e}}\,\mathbf{i}_3$.

Για τον πίνακα στροφής στο επίπεδο η παράγωγος δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\big[\mathbf{R}(\theta)\big]=\mathbf{W}\,\mathbf{R}(\theta)=\mathbf{R}(\theta)\mathbf{W}, \tag{86}$$

όπου

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 90^\circ&\sin 90^\circ\\-\sin 90^\circ&\cos 90^\circ\end{bmatrix}=\mathbf{R}(90^\circ) \tag{87}$$

και

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\mathbf{R}(\theta)\right] = \mathbf{R}(\theta + 90^\circ)\,. \tag{88}$$

2.6 Γεωμετρική σημασία των γωνιών στροφής γύρω από τους άξονες

Από τις 12 διαφορετικές επιλογές στοιχειωδών στροφών (6 Cardan και 6 Euler) για την περιγραφή ενός πίνακα στροφής $\mathbf{R}$, θα εξετάσουμε αναλυτικά μόνο 4 και συγκεκριμένα αυτές που έχουν για τελευταία (πρώτη αριστερά) μία στροφή γύρω από τον 3ο άξονα:

$$\mathbf{R}(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \mathbf{R}_3(\theta_3)\,\mathbf{R}_2(\theta_2)\,\mathbf{R}_1(\theta_1)\,,$$

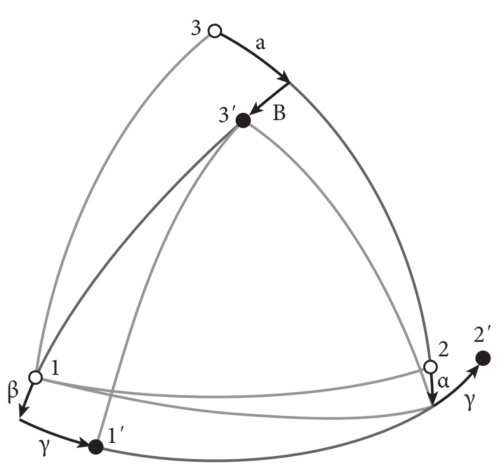
$$\mathbf{R}(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \mathbf{R}_3(\theta_3)\,\mathbf{R}_1(\theta_1)\,\mathbf{R}_2(\theta_2)\,,$$

$$\mathbf{R}(\phi,\theta,\psi) = \mathbf{R}_3(\phi)\,\mathbf{R}_1(\theta)\,\mathbf{R}_3(\psi)\,,$$

$$\mathbf{R}(\phi,\theta,\psi) = \mathbf{R}_3(\phi)\,\mathbf{R}_2(\theta)\,\mathbf{R}_3(\psi)\,.$$

Η επιλογή αυτή σημαίνει ότι στη μετατροπή $\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}$, οι 2 πρώτες στροφές έχουν ήδη φέρει τον 3ο άξονα από την αρχική του θέση (3) στη νέα του θέση (3′). Οι γωνίες της κάθε περίπτωσης φαίνονται στο σχήμα (20). Οι υπόλοιπες περιπτώσεις είναι εντελώς ανάλογες, αρκεί να αλλάξουμε κυκλικά τους άξονες

$$(1,2,3) \rightarrow (2,3,1) \rightarrow (3,1,2)\,.$$



***Σχήμα 20** :*

Διαφορετικές επιλογές στοιχειωδών στροφών όταν προηγείται η μετάβαση του 3ου άξονα στη νέα του θέση με 2 στροφές.

***Σχήμα 20 α**:*

Επιλογή (1):

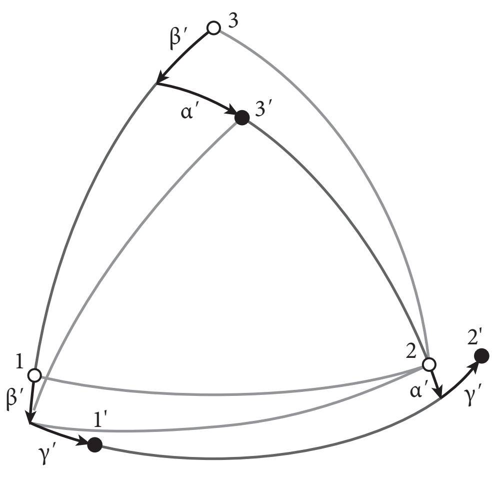
$\mathbf{R}_3(\gamma)\,\mathbf{R}_2(\beta)\,\mathbf{R}_1(-\alpha)$

(1) Γωνίες Cardan $\mathbf{x}' = \mathbf{R}_3(\gamma)\,\mathbf{R}_2(\beta)\,\mathbf{R}_1(-\alpha)\mathbf{x}$

Η γωνία α είναι η γωνία ανάμεσα στο επίπεδο των αξόνων 1, 3 και στο επίπεδο των αξόνων 1, 3′.
Η γωνία β είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας 3′ με το επίπεδο των αξόνων 2,3 (δηλαδή με την προβολή του πάνω στο επίπεδο αυτό)
Η γωνία γ είναι η γωνία ανάμεσα στο επίπεδο των αξόνων 3′, 1 και στο επίπεδο των αξόνων 3′, 1′.

(2) Γωνίες Cardan $\mathbf{x}' = \mathbf{R}_3(\gamma')\,\mathbf{R}_1(-\alpha')\,\mathbf{R}_2(\beta')\mathbf{x}$

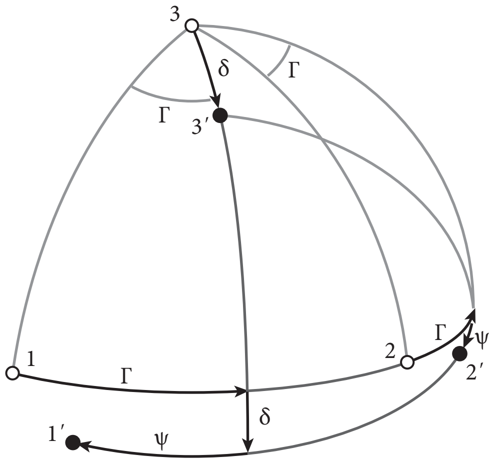
Η γωνία β' είναι η γωνία ανάμεσα στο επίπεδο των αξόνων 2, 3 και στο επίπεδο των αξόνων 2, 3′.
Η γωνία α' είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας 3′ με το επίπεδο των αξόνων 1,3
Η γωνία γ' είναι η γωνία ανάμεσα στο επίπεδο των αξόνων 3′, 2 και στο επίπεδο των αξόνων 3′, 2′.



Σχήμα 20 β:
Επιλογή (2):
$\mathbf{R}_3(\gamma')\,\mathbf{R}_1(-\alpha')\,\mathbf{R}_2(\beta')$

(3) Γωνίες Euler $\mathbf{x}' = \mathbf{R}_3(-\psi)\,\mathbf{R}_2(\delta)\,\mathbf{R}_3(\Gamma)\mathbf{x}$

Η γωνία Γ είναι η γωνία ανάμεσα στο επίπεδο των αξόνων 3, 1 και στο επίπεδο των αξόνων 3, 3′.
Η γωνία δ είναι η γωνία ανάμεσα στον άξονα 3 και στον άξονα 3′.
Η γωνία ψ είναι η γωνία ανάμεσα στο επίπεδο των αξόνων 3, 3′ και στο επίπεδο των αξόνων 3, 1′.



Σχήμα 20 γ:

Επιλογή (3):

$\mathbf{R}_3(-\psi)\,\mathbf{R}_2(\delta)\,\mathbf{R}_3(\varGamma)$

4) Γωνίες Euler

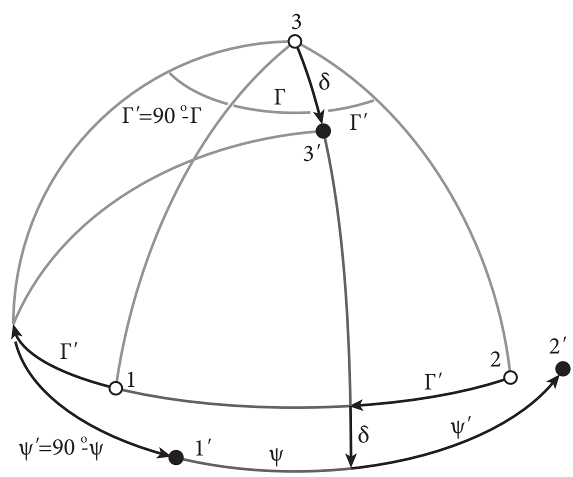
$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}_3(\psi')\,\mathbf{R}_1(-\delta)\,\mathbf{R}_3(-\varGamma')\mathbf{x} = \mathbf{R}_3(90^\circ - \psi)\,\mathbf{R}_1(-\delta)\,\mathbf{R}_3(-90^\circ + \varGamma)\mathbf{x}$$

Η γωνία $\varGamma'$ είναι η γωνία ανάμεσα στο επίπεδο των αξόνων 3, 2 και στο επίπεδο των αξόνων 3, 3′.

Η γωνία δ είναι η γωνία ανάμεσα στον άξονα 3 και στον άξονα 3′.

Η γωνία ψ' είναι η γωνία ανάμεσα στο επίπεδο των αξόνων 3, 3′ και στο επίπεδο των αξόνων 3, 2′.

Οι γωνίες $\varGamma'$ και ψ' είναι οι συμπληρωματικές των γωνιών $\varGamma$ και ψ, αντίστοιχα, της προηγούμενης περίπτωσης: $\varGamma' = 90^\circ - \varGamma$, $\psi' = 90^\circ - \psi$.



Σχήμα 20 δ:

Επιλογή (4):

$\mathbf{R}_3(\psi')\,\mathbf{R}_1(-\delta)\,\mathbf{R}_3(-\varGamma') =$

$= \mathbf{R}_3(90^\circ - \psi)\,\mathbf{R}_1(-\delta)\times$

$\times\mathbf{R}_3(-90^\circ + \varGamma)$

2.7 Μιγαδικοί αριθμοί και στροφή στο επίπεδο

Ένας διαφορετικός τρόπος για να παραστήσουμε ένα σημείο P στο επίπεδο, με καρτεσιανές συντεταγμένες x και y, είναι μέσω ενός μιγαδικού αριθμού

$$z = x + i\,y \tag{89}$$

όπου $i = \sqrt{-1}$ είναι η φανταστική μονάδα. Αν r και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες του ίδιου σημείου, τότε ισχύουν οι σχέσεις $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ και ο μιγαδικός αριθμός που παριστάνει το σημείο παίρνει την εναλλακτική μορφή

$$z = x + i\,y = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta} \tag{90}$$

Οι συντεταγμένες x', y' ύστερα από στροφή του συστήματος αναφοράς κατά γωνία ψ, δίνονται από τις σχέσεις

$$x' = x\cos\psi + y\sin\psi\,, \qquad y' = -x\sin\psi + y\cos\psi \tag{91}$$

ενώ το σημείο παριστάνεται στο νέο σύστημα από τον μιγαδικό αριθμό

$$\begin{aligned} z' &= x' + i\,y' = x\cos\psi + y\sin\psi - i\,x\sin\psi + i\,y\cos\psi = \\ &= r\cos\theta\cos\psi + r\sin\theta\sin\psi - i\,r\cos\theta\sin\psi + i\,r\sin\theta\cos\psi = \\ &= r(\cos\theta\cos\psi + \sin\theta\sin\psi) + ri(-\cos\theta\sin\psi + \sin\theta\cos\psi) = \\ &= r[\cos(\theta-\psi) + i\sin(\theta-\psi)] = \\ &= r\,e^{i(\theta-\psi)} = r\,e^{-i\psi}e^{i\theta} = e^{-i\psi}z \end{aligned} \tag{92}$$

Επομένως η στροφή των αξόνων κατά γωνία ψ παριστάνεται από τον πολλαπλασιασμό

$$z' = e^{-i\psi}z \tag{93}$$

με τον μιγαδικό αριθμό $e^{-i\psi} = \cos\psi - i\sin\psi$, ο οποίος παίζει στην περίπτωση αυτή το ρόλο του πίνακα στροφής $\mathbf{R}(\psi)$.

Για την παραγώγιση ως προς την πολική γωνία θ ισχύει

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = r\frac{\partial e^{i\theta}}{\partial \theta} = re^{i\theta} i = i\,z \tag{94}$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\cdot 1 = i$, τότε προκύπτει επίσης ότι η παραγώγιση αντιστοιχεί σε στροφή κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = i\,z = e^{i\frac{\pi}{2}} z\,. \tag{95}$$