

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, - Ασκήσεις 9, Λυσεις

1. (α) Θεωρούμε το γραφημά της $\phi(t) = \frac{1}{t}$ για $t > 0$ και τα σημεία

$$A = (n, 0), \quad B = (n + 1, 0), \quad \Gamma = (n + 1, \frac{1}{n + 1}),$$

$$\Delta = (n, \frac{1}{n + 1}), \quad E = (n, \frac{1}{n}), \quad Z = (n + 1, \frac{1}{n}).$$

Σχηματίζονται τα ορθογώνια $AB\Gamma\Delta$, $ABZE$ και το χωρίο $AB\Gamma E$ του οποίου η μια πλευρά είναι τμήμα του γραφημάτος της ϕ .

Παρατηρούμε:

$$\log(n + 1) - \log(n) = \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt - \int_1^n \frac{1}{t} dt = \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt = \text{Εμβαδ}(AB\Gamma E)$$

Επίσης

$$\text{Εμβαδ}(AB\Gamma\Delta) < \text{Εμβαδ}(AB\Gamma E) < \text{Εμβαδ}(ABZE)$$

και

$$\text{Εμβαδ}(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{n + 1}, \quad \text{Εμβαδ}(ABZE) = \frac{1}{n},$$

δηλαδή,

$$\frac{1}{n + 1} < \log(n + 1) - \log(n) < \frac{1}{n}.$$

(β) Για την a_n ,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}) - \log(n+1) - ((1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) - \log(n)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log(n) < 0, \end{aligned}$$

αρα $a_{n+1} < a_n$. Ομοίως για την b_n ,

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) - \log(n+1) - ((1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}) - \log(n)) \\ &= \frac{1}{n} - \log(n+1) + \log(n) > 0, \end{aligned}$$

αρα $b_n < b_{n+1}$.

Παρατηρούμε τώρα ότι $b_n < a_n$ για κάθε n (φανερό) και ότι για κάθε δύο δείκτες m, k ισχύει $b_m < a_k$. Πραγματι αν $l > \max(m, k)$ θα είναι $b_m < b_l < a_l < a_k$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε όρος της $\{b_n\}$ είναι μικρότερος κάθε όρου της $\{a_n\}$.

Επιπλέον $a_n - b_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ απ' όπου έπεται ότι οι δύο ακολουθίες έχουν κοινό όριο.

2. (α) Γνωρίζουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{n^b} = 0$ για κάθε θετικό b . Αν $k \in \mathbb{N}$ θα έχουμε

$$\frac{(\log(n))^k}{n^{\frac{\beta}{2}}} = \left(\frac{\log(n)}{n^{\frac{\beta}{2k}}} \right)^k \rightarrow 0,$$

αρα $\frac{(\log(n))^k}{n^{\frac{\beta}{2}}} \leq M < \infty$ για καποιο M . Συνεπως

$$\frac{(\log(n))^k}{n^{1+\beta}} = \frac{(\log(n))^k}{n^{\frac{\beta}{2}}} \frac{1}{n^{1+\frac{\beta}{2}}} \leq \frac{M}{n^{1+\frac{\beta}{2}}}$$

δηλ.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log(n))^k}{n^{1+\beta}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{M}{n^{1+\frac{\beta}{2}}}$$

και απο το κριτηριο συγκρισης η σειρα $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log(n))^k}{n^{1+\beta}}$ συγκλινει.

(β)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{-1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + 1}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{(1+x)^3}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3. (α) Θετομε $f(x) = e^x - 1 - x$. Παρατηρουμε οτι $f(0) = 0$ και $f'(x) = e^x - 1 > 0$ για $x > 0$, δηλ. η f ειναι αυξουσα στο $(0, \infty)$. Αρα $f(x) > f(0) = 0$, δηλ. $e^x \geq 1 + x$ για $x > 0$.

Ομοια θεωρουμε την $f_1(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$. Εχομε $f'(x) = e^x - 1 - x > 0$ (απο το προηγουμενο βημα) αρα η f_1 ειναι αυξουσα. Επειδη $f_1(x) = 0$ θα ειναι $f_1(x) > 0$ δηλ. $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ για $x \in (0, \infty)$. Με την ιδια διαδικασια στα επομενα βηματα παιρνομε

$$\begin{aligned} e^x &> 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \\ e^x &> 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \\ &\dots\dots\dots \\ e^x &> 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

για $x > 0$.

(β) Απο το (α), αν $x > 0$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχυει

$$(*) \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} < e^x$$

Η σειρα $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ εχει μερικα αθροισματα

$$S_n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Για κάθε $x > 0$, η ακολουθία των μερικων αθροισματων $\{S_n\}$ είναι αυξουσα (προφανως) και ανω φραγμενη (απο την $(*)$). Άρα η σειρα συγκλνει. Επειται οτι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

4. (α) Απο την ασκηση 1, το οριο $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$ υπαρχει. Διαιρουμε με $\log(n)$ οποτε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\log(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma}{\log(n)} = 0$$

Αλλα

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{\log(n)} &= \frac{1}{\log(n)} \left(\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \log(n) \right) \\ &= \frac{1}{\log(n)} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) - 1 \end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\log(n)} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) - 1 \right) = 0$$

δηλ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\log(n)} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right) = 1.$$

Συνεπως

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{n} \frac{1}{\log(n)} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(n)} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \\ &= 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

(β) Για $x = y = 0$ θα είναι $f(0) = f(0)^2$ δηλ. $f(0)(1 - f(0)) = 0$. Άρα είτε $f(0) = 0$ είτε $f(0) = 1$.

Περιοπτωση 1: $f(0) = 0$. οτε για το τυχον $x \in \mathbb{R}$ θα είναι

$$f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = f(x) \cdot 0 = 0$$

δηλ. $f \equiv 0$.

Περιοπτωση 2. $f(0) = 1$. Παρατηρουμε

$$1 = f(0) = f(1-1) = f(1)f(-1) = af(-1)$$

αρα $f(1) \neq 0$. θετομε $a = f(1)$ και εχομε,

$$f(2) = f(1+1) = f(1)f(1) = f(1)^2 = a^2$$

$$f(3) = f(2+1) = f(2)f(1) = a^2a = a^3$$

και γενικα

$$f(n) = f(n-1)f(1) = a^{n-1}a = a^n$$

για καθε θετικο ακεραιο n . Επισης

$$1 = f(0) = f(-n)f(n) = f(-n)a^n$$

δηλ.

$$f(-n) = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

αρα

$$f(m) = a^m, \quad \text{για καθε ακεραιο } m.$$

Επισης για n θετικο ακεραιο

$$a = f(1) = f\left(\frac{n}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

απο οπου επεται

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Ακομη για καθε κλασμα θετικων ακεραιων $\frac{m}{n}$,

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

m φορες

και

$$1 = f(0) = f\left(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right)f\left(-\frac{m}{n}\right)$$

δηλ.

$$f\left(-\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{m}{n}\right)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}}$$

Αρα για καθε ρητο αριθμο $r \in \mathbb{Q}$ ισχυει

$$f(r) = a^r$$

Εστω τωρα $x \in \mathbb{R}$. Υπαρχει ακολουθια $\{q_n\}$ ρητων ωστε $q_n \rightarrow x$. Επειδη η f ειναι συνεχης θα ισχυει

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n},$$

και επειδη ην εκθετικη συναρτηση a^x ειναι συνεχης,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n} = a^{\lim_{n \rightarrow \infty} q_n} = a^x.$$

Συμπερασμα: $f(x) = a^x$ για καθε $x \in \mathbb{R}$.