ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, - Ασκήσεις 8, Λυσεις

1. (α)

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dx}(4) = &\frac{d}{dx}\left(y^5 + y^3x^2 - y + 3x\right) \\ =&5y^4y' + 3y^2y'x^2 + 2y^3x - y' + 3 \\ =&(5y^4 + 3y^2x^2 - 1)y' + 2y^3x + 3. \end{aligned}$$

Επομενως $(5y^4 + 3y^2x^2 - 1)y' = -2y^3x - 3$ και $y' = \frac{-2y^3x-3}{5y^4+3y^2x^2-1}$.

(β)

$$\begin{aligned} 1 = \frac{d}{dx}(x) = &\frac{d}{dx}(xy + \sin(\frac{1}{y})) \\ =&y + xy' + \cos(\frac{1}{y})\frac{d}{dx}(\frac{1}{y}) \\ =&y + xy' + \cos(\frac{1}{y})\frac{-1}{y^2}y' \end{aligned}$$

επομενως

$$1 - y = (x - \frac{1}{y^2}\cos(\frac{1}{y}))y'$$

και

$$y' = \frac{(1-y)y^2}{xy^2 - \cos(\frac{1}{y})}.$$

(γ)

$$\begin{aligned} 1 = \frac{d}{dx}(x) = &\frac{d}{dx}(y^2\cos(xy) + \sqrt{y}) \\ =&2yy'\cos(xy) + y^2\sin(xy)(xy)' + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' \\ =&2yy'\cos(xy) + y^2\sin(xy)(xy' + y) + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' \\ =&2yy'\cos(xy) + y^2x\sin(xy)y' + y^3\sin(xy) + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' \\ =&(2y\cos(xy) + y^2x\sin(xy) + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}})y' + y^3\sin(xy) \end{aligned}$$

επομενως $1 - y^3\sin(xy) = (2y\cos(xy) + y^2x\sin(xy) + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}})y'$, και

$$y' = \frac{1 - y^3\sin(xy)}{2y\cos(xy) + y^2x\sin(xy) + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}}.$$

2. (α) Απο το Θεωρημα Μεσης Τιμης, υπαρχει $\xi_x \in [x, x+2]$ ωστε

$$\begin{aligned} f(x+2) - f(x) &= f'(\xi_x)(x + 2 - x) \\ &= 2f'(\xi_x) \end{aligned}$$

Επισης επειδη $\xi_x \in [x, x+2]$, το $\xi_x \to \infty$ καθως $x \to \infty$, και απο την υποθεση $\lim_{x\to\infty} f'(\xi_x) = 0$. Τοτε

$$\lim_{x\to\infty}(f(x+2) - f(x)) = \lim_{x\to\infty} 2f'(\xi_x) = 0$$

Δεν συμβαινει το ιδιο για το $\lim_{x\to\infty}(f(2x) - f(x))$. Πραγματι για την $f(x) = \sqrt{x}$ η παραγωγος $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to 0$ καθως $x \to \infty$ ενω

$$f(2x) - f(x) = \sqrt{2x} - \sqrt{x} = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{x} \to \infty.$$

(β) Επιλεγομε και σταθεροποιουμε $y \in (-1, 1)$ και θεωρουμε την συναρτηση $g(x) = f(\frac{x+y}{1-xy})$. Τοτε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}g(x) &= f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)' \\
&= \frac{1}{1+(\frac{x+y}{1-xy})^2}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)' \\
&= \frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\frac{1+y^2}{(1-xy)^2} \\
&= \frac{1+y^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2} \\
&= f'(x)
\end{aligned}$$

Επεται οτι οι g και f διαφερουν κατα σταθερα:

$$g(x) = f(x) + C, \qquad \text{δηλ.} \quad f(\frac{x+y}{1-xy}) = f(x) + C$$

Θετοντας $x = 0$ εχομε $f(y) = C$ δηλ. $f(\frac{x+y}{1-xy}) = f(x) + f(y)$.

3. (α) Η διαμεριση ειναι

$$P_n = \{t_0 = 0, t_1 = \frac{2}{n}, t_2 = \frac{4}{n}, ..., t_n = \frac{2n}{n} = 2\}$$

και η $f(x) = 2 - x$ στο $[0, 2]$ ειναι φθινουσα αρα

$$m_i = 2 - t_i = 2 - \frac{2i}{n}, \qquad M_i = 2 - t_{i-1} = 2 - \frac{2(i-1)}{n}$$

Κατω αθροισματα

$$
\begin{aligned}
L(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}(2-\frac{2i}{n})(\frac{2}{n}) \\
=&\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(2-\frac{2i}{n}) \\
=&\frac{2}{n}(2n-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i) \\
=&\frac{2}{n}(2n-\frac{2}{n}\frac{n(n+1)}{2}) \\
=&\frac{2}{n}(2n-(n+1)) \\
=&2\frac{n-1}{n}
\end{aligned}
$$

Ομοια βρισκομε τα ανω αθροισματα

$$U(f,P_n) = 2\frac{n+1}{n}.$$

Τα ορια ειναι $\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = 2$.

4. Εστω δυο οποιαδηποτε σημεια (απο τα πεντε). Τα δυο αυτα σημεια και το κεντρο της σφαιρας οριζουν επιπεδο που τεμνει την σφαιρα σε μεγιστο κυκλο K και χωριζει την σφαιρα σε δυο ημισφαιρια. Απο τα υπολοιπα 3 σημεια, τα δυο τουλαχιστον θα βρισκονται σε ενα απο τα δυο ημισφαιρια. Το ημισφαιριο αυτο μαζυ με τον K (δηλ. το κλειστο ημισφαιριο) επομενως περιεχει τα δυο αυτα σημεια συν τα αλλα δυο που βρισκονται στο μεγιστο κυκλο, συνολο τεσσερα σημεια.