

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, - Ασκήσεις 6, Λυσεις

1. (α) Για $t \in \mathbb{R}$ ισχυει $[t] \leq t < [t] + 1$ και μπορουμε να γραψουμε $[t] = t - (t - [t])$ οπου $0 \leq t - [t] < 1$.

(α) Απο τα παραπανω, για καθε $x > 0$ το $\frac{b}{x} - [\frac{b}{x}] \in [0, 1)$ δηλ. παραμενει φραγμενο. Αρα το οριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} (\frac{b}{x} - [\frac{b}{x}])$ υπαρχει και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} (\frac{b}{x} - [\frac{b}{x}]) = 0$ Επομενωσ,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} \left[\frac{b}{x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} \left(\frac{b}{x} - \left(\frac{b}{x} - \left[\frac{b}{x} \right] \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} \frac{b}{x} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} \left(\frac{b}{x} - \left[\frac{b}{x} \right] \right) \\ &= \frac{b}{a} - 0 \\ &= \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

(β) Για καθε $0 < x < a$ ειναι $0 < \frac{x}{a} < 1$ αρα $[\frac{x}{a}] = 0$. Δηλ. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{x} [\frac{x}{a}] = \lim_{x \rightarrow 0^+} (0) = 0$.

(β) (γραφημα). Η f ειναι συνεχης παντου στο \mathbb{R} . Δεν ειναι παραγωγισιμη στα σημεια $\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\} \cup \{\frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}) : n = 1, 2, \dots\} \cup \{0\}$. Σε ολα τα αλλα σημεια ειναι παραγωγισιμη.

2. (α) Αν $f(0) = 1$ τοτε για $c = 0$ εχομε το ζητουμενο. Επισησ αν $f(1) = 0$ τοτε για $c = 1$ εχομε το ζητουμενο. Μενει να εξετασομε την περιπτωση $f(0) \neq 0$ και $f(1) \neq 1$. Τοτε απο την υποθεση για την f θα ειναι $f(0) < 1$ και $f(1) > 0$. Θεωρουμε την συναρτηση

$$g(x) = f(x) - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

η οποια ειναι συνεχης στο $[0, 1]$ και

$$g(0) = f(0) - 1 < 0 \quad \text{και} \quad g(1) = f(1) - 0 = f(1) > 0$$

Απο το θεωρημα ενδιαμεσης τιμης υπαρχει $c \in (0, 1)$ ωστε $g(c) = 0$ και το ζητουμενο επεται.

(β) Επειδη η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ειναι συνεχης, θα ειναι φραγμενη (απο γνωστο θεωρημα). Αρα υπαρχουν m και M ωστε $m \leq f(x) \leq M$ για καθε $x \in [a, b]$. Θετομε

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = M_0 < \infty$$

Απο τον ορισμο του M_0 υπαρχει ακολουθια $\{x_n\}$ με $x_n \in [a, b]$ ωστε $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M_0$. Επειδη $a \leq x_n \leq b$ για καθε n , απο το θεωρημα Bolzano-Weierstrass υπαρχει συγκλινουσα υπακολουθια $\{x_{n_k}\}$. Αν $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ τοτε $a \leq x_0 \leq b$. Επειδη η f ειναι συνεχης θα εχομε $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Επειδη η $\{x_{n_k}\}$ ειναι υπακολουθια της $\{x_n\}$, $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M_0$. Απο την μοναδικοτητα των οριων, $f(x_0) = M_0$ και θα εχομε $f(x_0) \geq f(x)$ για καθε $x \in [a, b]$.

3. (α) Η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής στο κλειστό διαστήμα $[0, 1]$ άρα είναι ομοιομορφα συνεχής από γνωστό θεώρημα.
 (β) Έστω $\epsilon > 0$. Επιλεγόμε $\delta = \epsilon^2$. Αν $|x - y| < \delta$ τότε από την υποθεση,

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\delta} = \epsilon$$

δηλ. η f είναι ομοιομορφα συνεχής. Η f όμως δεν είναι κατ' αναγκη διαφορισιμη σε καθε σημειο του $[0, 1]$. π.χ. εστω

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Η f ικανοποιει $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x - y|}$ για καθε $x, y \in [0, 1]$ (λαμβανοντας υπ' οψιν οτι για $|x - y| < 1$ ισχυει $|x - y| < \sqrt{|x - y|}$) αλλα δεν είναι διαφορισιμη στο $\frac{1}{2}$.