

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, - Ασκήσεις 5, Λυσεις

1. (γραφικές παραστάσεις)

2. (α) Εστω $\epsilon > 0$. Επιλεγόμε $\delta = \frac{\epsilon}{M}$. Αν $|x - c| < \delta$ τότε

$$\begin{aligned} |g(x) - g(c)| &= |(x - c)f(x) - 0| \\ &= |(x - c)f(x)| \\ &= |x - c||f(x)| \\ &< \delta M \\ &= \frac{\epsilon}{M} M \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

(β) Είναι ευκολο να δουμε οτι η $g(x) = f(-x)$ είναι επίσης συνεχης στο $[-1, 1]$ αφού η f είναι συνεχης. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(-x) = f(0),$$

λογω συνεχειας, και

$$2f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + f(-x)) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0$$

δηλ. $f(0) = 0$.

3. (α) Πεδιο ορισμου

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

Εχομε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. Πραγματι

$$|f(x) - 0| = |\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0| = |\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq \sqrt{x}$$

Αν $\epsilon > 0$ εχει δοθει επιλεγόμε $\delta = \epsilon^2$ οποτε για $0 < x - 0 < \delta$ εχομε

$$|f(x) - 0| < \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon.$$

(β) Πεδιο ορισμου: $B = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ και } \sin\left(\frac{1}{x}\right) \neq 0\}$. Επειδη

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

θα είναι

$$B = \mathbb{R} \setminus \left(\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} : k \in \mathbb{Z} \right\} \right).$$

Το 0 είναι σημειο συσσωρευσεως του B . Πραγματι για την ακολουθια $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ εχομε $x_n \in B$ και $x_n \rightarrow 0$. (ολα τα x_n ανηκουν στο B , αλλιως θα προεκυπτε ο π να είναι ρητος - δειξτε το).