ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, - Ασκήσεις 4, Λυσεις

1. (ι) Θετομε

$$A_n = |\frac{a^n}{n!}| = \frac{|a|^n}{n!},$$

και χρησιμοποιουμε το κριτηριο του λογου. Υποθετομε $a \neq 0$ (για $a = 0$ η σειρα προφανως συγκλινει).

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{|a|}{n+1} \to 0 < 1.$$

Αρα η σειρα συγκλινει απολυτα και επομενως συγκλινει και απλα.

(ιι) Η ακλουθια $a_n = \frac{1}{n \log n}$, $n = 2, 3, ...$ ειναι μη αυξουσα και τεινει στο μηδεν. Αρα το Θεωρημα Leibniz εφαρμοζεται και η σειρα $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log n}$ συγκλινει.

Η σειρα δεν συγκλινει απολυτα. Πραγματι με εφαρμογη του κριτηριου συμπυκνωσης βρισκουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \log(2^n)} = \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{\log 2}) \frac{1}{n}.$$

Η αρμονικη σειρα δεν ειναι αθροισιμη αρα και η $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ δεν ειναι αθροισιμη.

(ιιι) Παρατηρουμε

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdot n \cdots n} = (\frac{1 \cdot 2}{n \cdot n})(\frac{3}{n})(\frac{4}{n}) \cdots (\frac{n}{n}) \leq \frac{2}{n^2}.$$

Επειδη $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ θα εχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < \infty$, και $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n} < \infty$

2. (α) Για $\beta = -1$ προκυπτει η αρμονικη σειρα που αποκλινει. Για $\beta > -1$ θα ειναι $\beta + 1 > 0$. Τωρα $\log(n) < \log(n+1)$, $\Rightarrow$ $(\log(n))^{1+\beta} < (\log(n+1))^{1+\beta}$, $\Rightarrow$ $n(\log(n))^{1+\beta} < (n+1)(\log(n+1))^{1+\beta}$, δηλ.

$$\frac{1}{n(\log(n))^{1+\beta}} > \frac{1}{(n+1)(\log(n+1))^{1+\beta}}$$

και η ακολουθια των ορων της σειρας ειναι φθινουσα. Με κριτηριο συμπυκνωσης,

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\log(2^n))^{1+\beta}} = \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{\log 2})^{1+\beta} \frac{1}{n^{1+\beta}},$$

η οποια συγκλινει αν και μονον αν $\beta > 0$.

Τελος αν $\beta < -1$ θα ειναι $1 + \beta < 0$ και $n(\log(n))^{1+\beta} < n$, δηλ.

$$\frac{1}{n(\log(n))^{1+\beta}} > \frac{1}{n},$$

και σε αυτη την περιπτωση η σειρα αποκλινει.

Αρα η σειρα $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1+\beta}}$ συγκλινει αν και μονον αν $\beta > 0$.

(β) Παρατηρουμε

$$\frac{n^\gamma+1}{n^2+n} \le \frac{n^\gamma+1}{n^2} = \frac{n^\gamma}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^{2-\gamma}} + \frac{1}{n^2}.$$

Η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλινει. Αρα αν $\gamma < 1$ τοτε $2-\gamma > 1$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\gamma}} < \infty$, οποτε και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\gamma+1}{n^2+n} < \infty$.

Αν τωρα $\gamma \ge 1$ τοτε $2-\gamma \le 1$ και απο την

$$\frac{n^\gamma+1}{n^2+n} > \frac{n^\gamma}{n^2+n} > \frac{n^\gamma}{2n^2} = (\frac{1}{2})\frac{1}{n^{2-\gamma}}$$

συμπεραινουμε οτι η σειρα αποκλινει.

(γ) Εχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^\delta+1)}} \le \frac{1}{\sqrt{n(n^\delta)}} = \frac{1}{\sqrt{n^{\delta+1}}} = \frac{1}{n^{\frac{\delta+1}{2}}},$$

που σημαινει οτι αν $\delta > 1$ τοτε $(\delta+1)/2 > 1$ και η σειρα συγκλινει.

Αν $0 \le \delta \le 1$ τοτε

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^\delta+1)}} \ge \frac{1}{\sqrt{n(n^\delta+n^\delta)}} = \frac{1}{\sqrt{2n^{\delta+1}}} = (\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{1}{n^{\frac{\delta+1}{2}}}$$

και $(\delta+1)/2 \le 1$ αρα η σειρα αποκλινει.

Τελος αν $\delta < 0$ τοτε $n^\delta < 1$ αρα $n(n^\delta+1) < 2n$, αρα

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^\delta+1)}} > \frac{1}{\sqrt{2n}} = (\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{1}{\sqrt{n}}$$

και η σειρα αποκλινει, αφου η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλινει.

3. (ι) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ τοτε επειδη

$$\frac{a_n}{1+a_n} \le a_n, \qquad n = 1, 2, 3, ...,$$

θα ειναι και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} < \infty$.

Αντιστροφα, υποθετουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} < \infty$. Τοτε $b_n = \frac{a_n}{1+a_n} \to 0$. Αρα υπαρχει N ωστε για $n \ge N$ να ισχυει $b_n < \frac{1}{2}$. Για αυτα τα n εχουμε

$$a_n = \frac{b_n}{1-b_n} < 2b_n$$

Επομενως $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

(ιι) Γραφουμε

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{n+1}.$$

Το $n^{\text{υοστο}}$ μερικο αθροισμα ειναι

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2+1}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3-1} - \frac{1}{3+1}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{4-1} - \frac{1}{4+1}) + \cdots + \frac{1}{2}(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} &= \lim_{n\to\infty} S_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$