ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, - Ασκήσεις 3, Λυσεις

1. Επιλεγουμε πραγματικο αριθμο r ωστε $s < r < 1$. Επειδη
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = s < r,$$
υπαρχει N_0 ωστε
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r, \qquad \text{για καθε } \; n \geq N_0.$$
Αρα $a_{n+1} < r a_n$ για $n \geq N_0$, δηλαδη,
$$\begin{aligned}
&a_{N_0+1} < r a_{N_0} \\
&a_{N_0+2} < r a_{N_0+1} < r^2 a_{N_0} \\
&a_{N_0+3} < r a_{N_0+2} < r^3 a_{N_0} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{N_0+k} < r a_{N_0+k-1} < \ldots\ldots < r^k a_{N_0} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$
Για την ακολουθια a_n επομενως ισχυει
$$a_n < r^{n-N_0} a_{N_0} = r^n \left(\frac{a_{N_0}}{r^{N_0}}\right)$$
για $n \geq N_0$, δηλ. $a_n < r^n M$ με M σταθερα. Αλλα $r < 1$, $\Rightarrow r^n \to 0$ αρα $a_n \to 0$.

2. (α) Ειναι
$$\frac{n}{n^3+1} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$
Επειδη $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ απο κριτηριο συγκρισης εχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} < \infty$.

(β) Θετομε $a_n = n^3 |r|^n$, και εχουμε
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (\frac{n+1}{n})^3 |r| \to |r|.$$
Επειδη $|r| < 1$, απο κριτηριο του λογου $\sum_{n=1}^{\infty} |n^3 r^n| < \infty$, αρα και $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 r^n < \infty$.

(γ) Παρατηρουμε οτι
$$\frac{n^2}{2^{n^2}+1} < \frac{n^2}{2^{n^2}}$$
Η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}}$ συγκλινει. Πραγματι αν $b_n = \frac{n^2}{2^{n^2}}$ εχουμε
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = (\frac{n+1}{n})^2 \frac{1}{2^{2n+1}} \to 0.$$
Απο κριτηριο λογου $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}} < \infty$, και αρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}+1} < \infty$.

(δ) Θετουμε $a_n = \sin(1/n^2)$ και $b_n = 1/n^2$. Εχουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \to 1,$$

και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ αρα $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n^2}) < \infty$.

3. Αν S_n ειναι η ακολουθια των μερικων αθροισματων, θα βρουμε δυο υπακολουθιες που συγκλινουν σε διαφορετικα ορια, οποτε η σειρα δεν ειναι αθροισιμη. Πραγματι

$$S_1 = 1, \quad S_6 = 1, \quad S_{15} = 1, \quad ... \to 1$$

ενω

$$S_3 = 0, \quad S_{10} = 0, \quad S_{21} = 0, \quad ... \to 0$$

Για να βρουμε την γενικη μορφη των υπακολουθιων παρατηρουμε οτι $S_n = 1$ οταν το n ειναι της μορφης

$$n = 1,\ n = 1+2+3,\ n = 1+2+3+5, ..., n = 1+2+\cdots+(2k+1),$$

δηλ. $n = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)(k+1)$.

Ομοια $S_n = 0$ οταν το n ειναι της μορφης

$$n = 1+2,\ n = 1+2+3+4,\ n = 1+2+3+4+5+6, ..., n = 1+2+\cdots+(2k),$$

δηλ. $n = \frac{(2k)(2k+1)}{2} = k(2k+1)$.

Αρα $S_{(2k+1)(k+1)} = 1$ και $S_{k(2k+1)} = 0$ για καθε k. Το οριο $\lim_{n\to\infty} S_n$ δεν υπαρχει αρα η σειρα δεν συγκλινει.