ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, - Ασκήσεις 2, Λυσεις

1. Η "λυση"

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}) &= \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\cdots+\frac{1}{n^2}) \\
&= \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})+\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2n})+\cdots+\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}) \\
&= 0+0+\cdots+0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ειναι λανθασμένη, γιατι το πληθος των ορων του αθροισματος **μεταβαλλεται** καθως $n \to \infty$.

Θετουμε $A_n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$. Εστω $\epsilon > 0$. Υπαρχει N ωστε $\frac{1}{\sqrt{N}} < \epsilon$. Τοτε για $n > N$ θα εχουμε $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N}} < \epsilon$.

Με [ ] να συμβολιζει το ακεραιο μερος εχουμε για $n > N$,

$$\begin{aligned}
A_n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{[\sqrt{n}]}+\frac{1}{[\sqrt{n}]+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{[\sqrt{n}\,]}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{[\sqrt{n}\,]+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Η πρωτη παρενθεση περιεχει $[\sqrt{n}\,]$ το πληθος προσθετεους, καθενας απο τους οποιους ειναι ≤ 1. Στην δευτερη παρενθεση καθε ορος ειναι $\leq 1/([\sqrt{n}\,]+1)$ και το πληθος τους ειναι $< n$. Ετσι,

$$\begin{aligned}
A_n &\leq \frac{1}{n}([\sqrt{n}\,]\cdot 1)+\frac{1}{n}(n\cdot\frac{1}{[\sqrt{n}\,]+1}) \\
&= \frac{[\sqrt{n}\,]}{n}+\frac{1}{[\sqrt{n}\,]+1}
\end{aligned}$$

Αλλα $[\sqrt{n}\,] \leq \sqrt{n} < [\sqrt{n}\,]+1$ επομενως

$$\frac{[\sqrt{n}\,]}{n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$$

και

$$\frac{1}{[\sqrt{n}\,]+1} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon,$$

δηλ. για $n > N$ παιρνουμε $A_n < 2\epsilon$. Συνεπως $A_n \to 0$.

2. Θελω να δειξω $\frac{a^n}{n!} \to 0$. Αυτο ειναι ισοδυανμο με $|\frac{a^n}{n!}| \to 0$, δηλ. $\frac{|a|^n}{n!} \to 0$.

Θετω $B_n = \frac{|a|^n}{n!}$. Επειδη $\frac{|a|}{n} \to 0$, υπαρχει N_0 ωστε για $n \geq N_0$ να εχουμε $\frac{|a|}{n} < \frac{1}{2}$. Για $n > N_0$ θα εχουμε

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{|a|^n}{n!} \\ &= \frac{|a|}{n}\frac{|a|}{n-1}\cdots\frac{|a|}{N_0}\frac{|a|}{N_0-1}\cdots\frac{|a|}{1} \\ &= \left(\frac{|a|}{n}\frac{|a|}{n-1}\cdots\frac{|a|}{N_0}\right)\left(\frac{|a|}{N_0-1}\cdots\frac{|a|}{1}\right) \end{aligned}$$

Η πρωτη παρενθεση περιεχει $n - N_0 + 1$ κλασματα καθενα απο τα οποια ειναι $< \frac{1}{2}$. Η δευτερη παρενθεση δεν εξαρταται απο το n, ειναι δηλ. μια σταθερα M. Ετσι θα εχουμε

$$\begin{aligned} B_n &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N_0+1} M \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} 2^{N_0-1}M \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} M_0 \end{aligned}$$

οπου $M_0 = 2^{N_0-1}M$ ειναι σταθερα. Τοτε ομως

$$0 \leq B_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n M_0, \qquad \text{για } n \geq N_0$$

και επειδη $(\frac{1}{2})^n \to 0$ θα εχουμε επισης $B_n \to 0$.

3. (α) Η υπακολουθια $a_{2n} = (1 + \frac{1}{2n}) \to 1$ ενω η $a_{2n+1} = -(1 + \frac{1}{2n+1}) \to -1$. Οποιαδηποτε αλλη υπακολουθια ειτε θα τεινει στο 1 ειτε στο -1 ειτε δεν θα εχει οριο. Αρα τα σημεια συσσωρευσεως της a_n ειναι τα $-1, 1$.

Επομενως $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ και $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.

(β) Για $n = 8k + i$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ βρισκομε αντιστοιχα $\sin(\frac{(8k+i)\pi}{4}) = 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Λογω περιοδικοτητος της συναρτησης $\sin(\ )$, καθε μια απο αυτες τις τιμες εμφανιζεται απειρες το πληθος φορες στην ακολουθια. Τα σημεια συσσωρευσεως της ακολουθιας ειναι επομενως $0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm 1$. Αρα $\limsup_{n\to\infty} b_n = 1$ και $\liminf_{n\to\infty} b_n = -1$.

(γ) Για $n > 10^{101}$ εχουμε

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{10^{101}} = 0,\overbrace{000............000}^{100\,\text{το πληθος}}1$$

Αρα για $n > 10^{101}$, το $100^{\text{στο}}$ ψηφιο $c_n = 0$. Τοτε $\liminf_{n\to\infty} c_n = 0 = \limsup_{n\to\infty} c_n$