ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, - Ασκήσεις 11, Λυσεις

1. (α) Εχομε

$$\begin{aligned}\sin(x) =& P_{2n+1,0}(x) + R_{2n+1,0}(x)\\ =& x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + R_{2n+1,0}(x)\end{aligned}$$

οπου το υπολοιπο $R_{2n+1,0}(x)$ ικανοποιει (σελ. 352)

$$|R_{2n+1,0}(x)| \leq \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

Για $x = 1$ το σφαλμα ειναι

$$|R_{2n+1,0}(1)| \leq \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Αρα αρκει να βρουμε n τετοιο ωστε $\frac{1}{(2n+1)!} \leq 10^{-5}$. Το μικροτερο τετοιο n ειναι $n = 4$, δηλ.

$$\sin(1) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!},$$

με σφαλμα $< 10^{-5}$.

(β)Ομοια εχομε

$$\begin{aligned}\log(1+x) =& P_{n,0}(x) + R_{n,0}(x)\\ =& x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{(n-1)} \frac{x^n}{n} + R_{n,0}(x)\end{aligned}$$

οπου το υπολοιπο $R_{n,0}(x)$ ικανοποιει (σελ. 355)

$$|R_{n,0}(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Για $x = 1/2$ το σφαλμα ειναι

$$|R_{n,0}(1/2)| \leq \frac{(1/2)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2^{(n+1)}(n+1)}.$$

Αρκει να βρουμε n τετοιο ωστε $\frac{1}{2^{(n+1)}(n+1)} < 10^{-2}$. Το μικροτερο τετοιο n ειναι $n = 4$, δηλ.

$$\log(3/2) = \log(1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^3}{3} - \frac{(\frac{1}{2})^4}{4}$$

με σφαλμα $< 10^{-2}$.

2. (α) Για $x \in [-1, 1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x|$$

και η συναρτηση οριο ειναι $f(x) = |x|$.

Για το ειδος συγκλισης:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+|x|\geq\sqrt{\frac{1}{n}}$$

και

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-|x|=\frac{x^2+\frac{1}{n}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+x^2}=\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+x^2}\leq\frac{1}{n}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Δηλ. $|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{1}{\sqrt{n}}$ απο οπου επεται οτι η συγκλιση ειναι ομοιομορφη στο $[-1,1]$.

(β) Για $x\in(0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+nx^2}{n+x}=\frac{\frac{1}{n}+x^2}{1+\frac{x}{n}}=x^2$$

αρα η συναρτηση ορι ειναι $f(x)=x^2$.

Για το ειδος συγκλισης: Επιλεγοντας $x_n=n$,

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=|\frac{1+nx_n^2}{n+x_n}-x_n^2|=|\frac{1+nn^2}{n+n}-n^2|=\frac{n^3-1}{2n}\to\infty$$

και η συγκλιση δεν ειναι ομοιομορφη στο $(0,\infty)$.

3. (α)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x}=&\frac{1}{2+(x-1)}=\frac{1}{2[1+\frac{x-1}{2}]}\\=&\frac{1}{2}\frac{1}{1+(\frac{x-1}{2})}=\frac{1}{2}\left(1-(\frac{x-1}{2})+(\frac{x-1}{2})^2-(\frac{x-1}{2})^3+\cdots\right)\end{aligned}$$

Αρα

$$P_{n,1}(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}(x-1)+\frac{1}{2^3}(x-1)^2-\frac{1}{2^4}(x-1)^3+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}(x-1)^n.$$

(β)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-3x}=&\frac{1}{2-3(x-2+2)}=\frac{1}{2-3(x-2)-6}\\=&\frac{1}{-4-3(x-2)}=\frac{-1}{4+3(x-2)}=\frac{-1}{4[1+\frac{3}{4}(x-2)]}\\=&\frac{-1}{4}\left(1-\frac{3}{4}(x-2)+(\frac{3}{4}(x-2))^2-\cdots\right)\end{aligned}$$

Αρα

$$P_{n,2}(x)=\frac{-1}{4}+\frac{3}{4^2}(x-2)-\frac{3^2}{4^3}(x-2)^2+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{3^n}{4^{n+1}}(x-2)^n$$