

## ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, - Ασκήσεις 1, Λύσεις

1.  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ .

(α) αθροισμα:  $\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + q_1 p_2}{q_1 q_2} \in \mathbb{Q}$

γινόμενο:  $\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} \in \mathbb{Q}$

πηλικο:  $\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1 q_2}{p_2 q_1} \in \mathbb{Q}$

(β) Οχι. π.χ.  $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$ ,  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \in \mathbb{Q}$

2. (α)  $B = \{-a : a \in A\}$ .

Εστω  $s = \sup B$ . Τότε  $b \leq s$  για κάθε  $b \in B$ ,  $\Rightarrow -b \geq -s$  για κάθε  $b \in B$ , δηλ.  $a \geq -s$  για κάθε  $a \in A$ . Επομένως  $-s \leq \inf A$ .

Αν υποθέσουμε ότι  $-s < \inf A$  (γνησια ανισότητα) τότε για κάποιο  $\epsilon > 0$  θα έχουμε  $-s + \epsilon < \inf A \leq a$  για κάθε  $a \in A$ , δηλ.  $s - \epsilon > -a$  για κάθε  $a \in A$ . Τότε  $b < s - \epsilon$  για κάθε  $b \in B$  δηλ.  $\sup B \leq s - \epsilon$  άτοπο. Άρα  $-s = \inf A$  δηλ.  $\sup B = -\inf A$ .

(β) Εστω  $i_A = \inf A, i_B = \inf B, s_A = \sup A, s_B = \sup B$ . Έχουμε: 1)  $i_B \leq s_B$  (παντα). 2)  $i_A \leq a$  για κάθε  $a \in A$  και αφού  $B \subset A$ , θα έχουμε  $i_A \leq b$  για κάθε  $b \in B$ . Επομένως  $i_A \leq i_B$ . Αναλογα βρισκουμε  $s_B \leq s_A$  οπότε  $i_A \leq i_B \leq s_B \leq s_A$ .

3. Υποθετουμε  $a \geq b$ . Τότε

$$\begin{aligned} a &\leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{a^n + a^n} \\ &= \sqrt[n]{2a^n} \\ &= a \sqrt[n]{2} \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$a \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq a \sqrt[n]{2}.$$

Επειδη  $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$  θα είναι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a.$$

Αναλογα, αν  $b > a$  βρισκουμε το οριο  $b$ . Δηλ. σε κάθε περίπτωση  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$ .