

Συναρτησιακή Ανάλυση, Ασκήσεις 4.

5-4-2005

1. Εστω $X = C[-1, 1]$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

Θεωρούμε την ακολουθία $\{f_n\}$ με $f_n(t) = t^n, n = 0, 1, 2, \dots$.

(α) Δειξτε ότι η ακολουθία αυτή είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

(β) Βρείτε τους πρώτους 3 όρους της ορθοκανονικής ακολουθίας που προκύπτει από την δοθείσα με εφαρμογή της διαδικασίας Gram-Schmidt.

2.(α) Δειξτε ότι η συνήθης νόρμα στον χώρο $l^p, p \neq 2$, δεν προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο.

(β) Κάνετε το ίδιο για την sup νόρμα $\| \cdot \|_\infty$ στον χώρο $C[0, 1]$, καθώς και για την νόρμα $\| \cdot \|_\infty$ στον c_0 .

3. (α) Εστω $X_1 = (C[0, 1], \| \cdot \|_\infty)$ και $X_2 = (C[0, 1], \| \cdot \|_2)$ όπου $\| \cdot \|_2$ η νόρμα που προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Εξετάσετε αν οι ταυτοτικοί τελεστές $I_1 : X_1 \rightarrow X_2$ και $I_2 : X_2 \rightarrow X_1$ είναι φραγμένοι.

(β) Εστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $x, y \in X$. Δειξτε ότι τα επομένα είναι ισόδυναμα:

(i) $x \perp y$

(ii) $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.