

Ασκήσεις 2. (Επαναληψης)

22-3-2005

1. Εστω $X = C[0, 1]$ ο γραμμικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

(α) Ποιά απο τα παρακατω συνολα είναι γραμμικοί υπόχωροι του X ;

$$Y = \{f \in X : f(0) = f(1)\},$$

$$Z = \{f \in X : f(\frac{1}{2}) \geq 0\},$$

$$V = \{f \in X : \int_0^1 f(t) dt = 0\},$$

$$W = \{f \in X : f(t) = 0 \text{ για καθε } t \in (\frac{1}{2}, 1]\}.$$

(β) Ποιο γνωστο σύνολο είναι το γραμμικό περιβλημα

$$S = \text{span}\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$$

του συνόλου όλων των μονωνύμων;

2. Εστω $X = c$, ο γραμμικός χώρος των συγκλινουσων ακολουθιων πραγματικων αριθμών.

(α) Ποια απο τα παρακατω υποσυνολα του X είναι γραμμικοί υποχωροι του X ;

$$A = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in c : x_{2k} = 0, k = 1, 2, 3, \dots\},$$

$$B = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in c : \text{υπάρχει } N = N(x) \text{ ωστε } x_k = 0 \text{ για } k \geq N\},$$

$$C = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in c : x_1 + x_2 = 1\}.$$

(β) Εξετάσετε αν η συναρτηση

$$p(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{2^k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

είναι νορμα στον X .

3. (α) Δειξτε οτι ο c_0 με την $\|\cdot\|_{\infty}$ νορμα είναι χώρος Banach.

(β) Δειξτε οτι το σύνολο

$$Q = \{x = (r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots) : n \in \mathbb{N}, r_i \in \mathbb{Q}\}$$

είναι αριθμησιμο και πυκνό στο c_0 , δηλαδή ο c_0 είναι διαχωρίσιμος.

4. (α) Εστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νορμα και Y γραμμικός υπόχωρος του X . Δείξτε οτι η κλειστή θήκη (περίβλημα) \bar{Y} είναι επίσης γραμμικός υποχωρος του X .

(β) Δώστε παραδειγμα όπου $Y \subset \bar{Y} \subset X$ γνησια.

5. (α) Στον χώρο c_0 των μηδενικων ακολουθιων με την $\|\cdot\|_{\infty}$ νορμα θεωρουμε την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ με στοιχεια

$$y_1 = (1, 0, 0, \dots), y_2 = (0, \frac{1}{2}, 0, \dots), \dots, y_n = (0, 0, \dots, 0, \frac{1}{n}, 0, \dots), \dots$$

Δειξτε οτι η σειρα συγκλινει, και βρειτε το αθροισμα της. Συγκλινει η σειρα απολυτα;

(β) Στον χώρο c_{00} των τελικα μηδενικων ακολουθιων, με την $\|\cdot\|_{\infty}$ νορμα θεωρουμε την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ με στοιχεια

$$z_1 = (1, 0, 0, \dots), z_2 = (0, \frac{1}{4}, 0, \dots), \dots, z_n = (0, 0, \dots, 0, \frac{1}{n^2}, 0, \dots), \dots$$

Δειξτε οτι η σειρα συγκλινει απολυτα, αλλα δεν υπαρχει $z \in c_{00}$ τετοιο ωστε $z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ (δηλ. η σειρα δεν συγκλινει). Τι συμπεραινετε για τον c_{00} ;

6. Στον χώρο

$$C^1[0, 1] = \{f \in C[0, 1] : \text{η παραγωγος } f' \text{ υπαρχει και είναι συνεχής στο } [0, 1]\},$$

οριζουμε τις νορμες

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|, \text{ και } \|f\|_1 = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |f'(t)|.$$

Δειξτε οτι $\|\cdot\|_1$ είναι πραγματι νορμα και οτι οι δυο νορμες δεν είναι ισοδύναμες. (Υπόδειξη: υπαρχουν συναρτήσεις με μικρό sup και μεγάλη παράγωγο).

7. Στον χώρο $C[0, 1]$ με τις παρακατω νορμες

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \int_0^1 e^{-t} |f(t)| dt.$$

ελεγχετε ανα δυο τις νορμες αν ειναι ισοδυναμες.

8. (α) Για καθε $p \in [1, \infty)$ οριζομε τις νορμες $\|\cdot\|_p$ στον χώρο $C[0, 1]$,

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Δειξτε οτι αν $p \neq q$ οι $\|\cdot\|_p$ και $\|\cdot\|_q$ δεν ειναι ισοδυναμες.

(β) Για καθε $p \in [1, \infty)$ η

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ειναι νορμα στον c_{00} . Δειξτε οτι αν $p \neq q$ οι $\|\cdot\|_p$ και $\|\cdot\|_q$ δεν ειναι ισοδυναμες.

9. (α) Εστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νορμα και Y γραμμικός υπόχωρος του X . Δειξτε οτι η κλειστή θήκη (περίβλημα) \bar{Y} ειναι επισης γραμμικός υποχωρος του X .

(β) Δώσετε παραδειγμα όπου $Y \subset \bar{Y} \subset X$ γνησια.

10. Σε ενα χώρο με νορμα $(X, \|\cdot\|)$ δειξτε τα ακολουθα:

(α) Αν $x_n \rightarrow x$ και $x \neq 0$ τοτε $\frac{\|x_n\|}{\|x_n\|} \rightarrow \frac{\|x\|}{\|x\|}$.

(β) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλινει τοτε $\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

11. Αν Y γραμμικός υποχωρος χώρου με νορμα $(X, \|\cdot\|)$ και υπαρχει $y \in Y$ και $r > 0$ με $D(y, r) = \{x \in X : \|x - y\| < r\} \subset Y$ τοτε $Y = X$. (Ισοδυναμα: Αν $Y^\circ \neq \emptyset$ τοτε $Y = X$).

12. Για τους χωρους c, c_0, l_p, l_∞ δειξτε τα εξης:

(α) Για $1 < p < q < \infty$,

$$l_1 \subset l_p \subset l_q \subset c_0 \subset c \subset l_\infty,$$

και καθε μια απο τις σχεσεις \subset ειναι γνησια.

13. Θεωρουμε τον χώρο \mathcal{D} των ακολουθιών που οριζεται,

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k|x_k|^2 < \infty.$$

(α) Δειξτε οτι ο \mathcal{D} ειναι γραμμικός χώρος

(β) Δειξτε οτι η συναρτηση $p : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$p(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k|x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ειναι νορμα στον \mathcal{D} .

14. Στον χώρο $C[0, 1]$ των συνεχων συναρτησεων $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ δειξτε οτι η

$$\|f\|_* = |f(\frac{1}{2})| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$$

ειναι νορμα. Δειξτε οτι ο $(C[0, 1], \|\cdot\|_*)$ ειναι χώρος Banach.

15. Αν $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_p$, $1 \leq p < \infty$, και $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (η μοναδα στην n -οστη θεση), $n = 1, 2, 3, \dots$, δειξτε οτι η σειρα $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ συγκλινει στον l_p . Ποιο ειναι το αθροισμα της;

16. Εξετασετε αν ο $C[0, 1]$ με την συνηθη $\|\cdot\|_\infty$ νορμα ειναι διαχωρισμος.