Ασκήσεις 1.

1-3-2006

Χρησιμοποιουμε τον συμβολισμο $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ για σημεια του $\mathbb{R}^n$.

1. (α) Δειξετε οτι η αποσταση

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_k - y_k| : k = 1, 2, \cdots, n\},$$

ειναι μετρικη στον $\mathbb{R}^n$.

(β) Ζωγραφισετε την μοναδιαια μπαλα $D(0,1) = \{y \in \mathbb{R}^2 : d_\infty(0,y) < 1\}$ στον $\mathbb{R}^2$ ως προς αυτη την μετρικη.

2. Στον χωρο $C[0,1]$ των συνεχων συναρτησεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με μετρικη

$$d(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : 0 \leq t \leq 1\}$$

βρειτε την αποσταση της συναρτησης $f(x) = x^n(1-x)^m, \quad (n, m \geq 2)$, απο την συνάρηση $g \equiv 0$.

3. (α) Δειξετε οτι για καθε p με $1 \leq p < \infty$ η αποσταση

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

οριζει μετρικη στον $\mathbb{R}^n$.

(β) Ζωγραφισετε τις μοναδιαιες μπαλες $D_p(0,1) = \{y \in \mathbb{R}^2 : d_p(0,y) < 1\}$ στον $\mathbb{R}^2$ για $p = 1, \frac{3}{2}, 2, 4$.

4. (α) Δείξετε οτι ο χώρος l_2 με μετρικη $d_2(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2\right)^{1/2}$ ειναι διαχωρισιμος.

(β) Δείξετε οτι ο l_∞ με μετρική $d_\infty(x,y) = \sup_{1 \leq k < \infty} |x_k - y_k|$ δεν ειναι διαχωρισιμος.