

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, - Ασκήσεις 9. 11 - 12 - 2003

1. (α) Εξετάζοντας το  $\int_1^n \frac{1}{t} dt$  και συγκρινοντας εμβαδα δείξετε οτι

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log(n) < \frac{1}{n}, \quad \text{για καθε } n \geq 1$$

(β) Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n), \quad b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \log(n).$$

Με χρήση του (α) δείξετε οτι η  $\{a_n\}$  είναι φθίνουσα, η  $\{b_n\}$  αυξουσα και οτι οι δυο ακολουθίες έχουν κοινό όριο.

Σχολιο: Το κοινό όριο  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  λεγεται σταθερα του Euler και έχει τιμη  $\gamma = 0,57721566\dots$ . Δεν είναι γνωστο αν η  $\gamma$  είναι ρητος η αρρητος αριθμος.

2. (α) Δειξετε οτι αν  $\beta > 0$ , η σειρα

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log(n))^k}{n^{1+\beta}}$$

συγκλινει για οποιοδηποτε  $k \in \mathbb{N}$ .

(β) Βρειτε τα ορια (με L' Hopital):  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$ , καθώς και τα  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2}{x^3}$ .

3. (α) Για  $x > 0$  δείξετε οτι  $e^x > 1 + x$ ,  $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ , και με επαγωγή οτι για καθε  $n \geq 1$ ,

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

(β) Με χρήση του (α) δείξετε οτι για  $x > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ .

4. (προαιρετικο) (α) Χρησιμοποιοντας την παραπάνω Ασκηση 1, δωσετε μια αλλη λύση της ασκησης 1 της Ομαδας 2.

(β) Αν  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχης συναρτηση για την οποια ισχυει

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \text{για καθε } x, y \in \mathbb{R},$$

δείξετε οτι είτε  $f \equiv 0$  είτε  $f(x) = a^x$  για καποια σταθερα  $a$ .