

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, - Ασκήσεις 8. 4 - 12 - 2003

1. Βρείτε την παραγωγο  $\frac{dy}{dx}$  για τις πεπλεγμένες συναρτήσεις

$$(a) y^5 + y^3x^2 - y + 3x = 4, \quad (b) xy + \sin\left(\frac{1}{y}\right) = x, \quad (c) y^2 \cos(xy) + \sqrt{y} = x.$$

2. (α) Αν  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγισιμη με  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ , δείξτε ότι  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x+2) - f(x)) = 0$ . Συμβαίνει το ίδιο για το όριο  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(2x) - f(x))$ ; Αν όχι βρείτε αντιπαραδειγμα.

(β) Αν  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγισιμη και ισχυει  $f(0) = 0$  και  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  για καθε  $x \in (-1, 1)$ , δείξτε ότι

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \quad \text{για καθε } x, y \in (-1, 1).$$

3. Βρείτε τα ανω και κατω αθροισματα για την συναρτηση  $f(x) = 2 - x$  στο διαστημα  $[0, 2]$  ως προς την διαμεριση  $P_n = \{t_0 = 0, t_1 = \frac{2}{n}, t_2 = \frac{4}{n}, \dots, t_n = \frac{2n}{n} = 2\}$ , και το όριο τους καθώς  $n \rightarrow \infty$ .
4. (σε εθελοντική βάση). Αν 5 σημεία βρίσκονται στην επιφάνεια μιας σφαιρας, δείξτε ότι υπάρχει κλειστο ημισφαιριο που περιεχει τα 4 απο αυτα (Κλειστο ημισφαιριο σημαινει το ημισφαιριο περιλαμβανει και το μεγαστο κυκλο που το οριζει. Εδω δεν χρειαζεται Λογισμος, μονο συνδυαστικη σκεψη).