

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, - Ασκήσεις 7. 27 - 11 - 2003

1. Αν  $f, g$  έχουν παραγωγούς τάξης μέχρι και  $n$ , δείξτε τον κανόνα παραγωγίσης του Leibniz:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$$

(Η παραγωγός μηδενικής τάξης  $f^{(0)}(x)$  είναι εξ ορισμού η  $f(x)$ ).

2. (α) Βρείτε την παραγωγή κάθε συναρτήσης (χρησιμοποιήστε:  $a^x = e^{x \log a}$ ).

$$(1) f(x) = \sin\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad (2) g(x) = \sin\left(e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}\right), \quad (3) h(x) = e^{x^x}.$$

(β) Δείξτε ότι από όλα τα ορθογώνια με δοσμένο εμβαδόν, την μικρότερη περιμετρο έχει το τετράγωνο.

3. (α) Υποθέτουμε ότι  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι διαφορίσιμη με  $f'(x) = \frac{1}{x}$  για κάθε  $x \in (0, \infty)$  και  $f(1) = 0$ . Δείξτε ότι  $f(xy) = f(x) + f(y)$  για κάθε  $x, y$ .

(β) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι διαφορίσιμη στο σημείο  $a$ . Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a-h)}{h}$$

και αν ναι βρείτε την τιμή του.