

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, - Ασκήσεις 6. 20 - 11 - 2003

1. (α) Αν  $a, b$  είναι δυο θετικοί αριθμοί και  $[ \ ]$  συμβολίζει ακέραιο μέρος, βρείτε τα όρια

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} \left[ \frac{b}{x} \right], \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{x} \left[ \frac{x}{a} \right]$$

- (β) Κάνετε προσεκτικά το γραφικό της συνάρτησης  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \inf \left\{ \left| x - \frac{1}{n} \right| : n = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

Με οδηγό το γραφικό, βρείτε σε ποια σημεία είναι συνεχής, και σε ποια παραγωγισίμη.

2. (α) Εστω  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει  $c \in [0, 1]$  ώστε  $f(c) = \cos(\frac{\pi c}{2})$ .  
(β) Ένα από τα βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις λέει: αν  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής τότε υπάρχει  $x_0 \in [a, b]$  ώστε  $f(x_0) \geq f(x)$  για κάθε  $x \in [a, b]$ . Αποδείξτε αυτό το θεώρημα κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Bolzano-Weierstrass.
3. (α) Εξετάστε αν η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$  είναι ομοιομορφα συνεχής στο  $[0, 1]$ .  
(β) Αν  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ικανοποιεί  $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x - y|}$  για κάθε  $x, y \in [0, 1]$  δείξτε ότι η  $f$  είναι ομοιομορφα συνεχής. Είναι αυτή κατ' αναγκήν παραγωγισίμη σε κάθε σημείο του  $[0, 1]$ ;