

## ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, - Ασκήσεις 4. 6-11-2003

1. Εξετάσετε ως προς την σύγκλιση και ως προς την απολυτή σύγκλιση τις σειρές

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \quad (a \in \mathbb{R}), \quad (ii) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log n}, \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$$

2. Βρείτε για ποιες τιμές των  $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  συγκλίνουν οι σειρές

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1+\beta}}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\gamma + 1}{n^2 + n}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^\delta + 1)}}$$

3. (i) Αν  $a_n > 0$  για κάθε  $n$ , δείξτε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  είναι αθροιστική αν και μόνον αν η  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$  είναι αθροιστική.  
(ii) Δείξτε ότι  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$ .