

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, - Ασκήσεις 2. 23-10-2003

1. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = 0.$$

Σημείωση: Η «λυσή»: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$ είναι λανθασμένη (γιατί;). Υποδείξη: Για $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε $\frac{1}{\sqrt{n_0}} < \epsilon$. Γραψτε $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{[\sqrt{n}]} + \frac{1}{[\sqrt{n}]+1} + \dots + \frac{1}{n}$.

2. Αν $a \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{a^n}{n!}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ συγκλίνει και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

3. Βρείτε το \limsup και \liminf για κάθε μια από τις ακολουθίες:

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right), \quad b_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right),$$

$c_n =$ το 100^{στο} δεκαδικό ψηφίο στο δεκαδικό αναπτύγμα του $\frac{1}{n}$.