

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 27/1/2005

Απαντήστε σε όλα τα ζητήματα 1-3, καθώς και σε ένα από τα ζητήματα 4-5. Όλα τα ζητήματα είναι ισοδύναμα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

1. (α). Έστω $E \subset \mathbb{R}$ μη κενό, φραγμένο σύνολο. Τι είναι το supremum του E ; Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup E$.

(β). Έστω $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ μία φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δώστε τον ορισμό του οριακού αριθμού της $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ και του $\limsup b_n$.

2. (α). Βρείτε τη συνάρτηση άθροισμα $f(x)$ για τη σειρά των συναρτήσεων

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή βρείτε το σημειακό όριο της παραπάνω σειράς.

Υπόδειξη: Γεωμετρική σειρά, αν $x \neq 0$.

(β). Δείξτε ότι αν $0 < a < b < \infty$, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο διάστημα $[a, b]$.

(γ). Ισχύει το ίδιο συμπέρασμα όπως στο (β), όταν $-\infty < a < 0 < b < \infty$;

3. (α). Δώστε τους ορισμούς των παρακάτω εννοιών:

σ-άλγεβρα, εξωτερικό μέτρο Lebesgue, μετρητό (μετρήσιμο) σύνολο, μέτρο Lebesgue.

(β). Δείξτε ότι κάθε μονοσύνολο έχει εξωτερικό μέτρο ίσο με το 0.

(γ). Δείξτε ότι κάθε αριθμήσιμο σύνολο έχει εξωτερικό μέτρο ίσο με το 0.

(δ). Αν το εξωτερικό μέτρο του $E \subset \mathbb{R}$ είναι ίσο με $l \in \mathbb{R}$ και $r > 0$, δείξτε ότι το εξωτερικό μέτρο του συνόλου $rE := \{rx : x \in E\}$, είναι ίσο με rl .

4. (α). Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n(x) = \frac{nx^2}{x^2+n^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε το σημειακό όριο f της $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και δείξτε ότι η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο διάστημα $[0, 5]$.

(β). Δείξτε ότι το σύνολο του Cantor C , δεν περιέχει διαστήματα θετικού μήκους.

(γ). Αν $x \in C$ και $x \leq \frac{1}{3}$, δείξτε ότι $3x \in C$.

Υπόδειξη: Τι παρατηρείτε για το πρώτο ψηφίο του τριαδικού αναπτύγματος του x ;

(δ). Αν $x \in C$, ισχύει ότι $1-x \in C$;

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το τριαδικό ανάπτυγμα του x .

5. (α). Δώστε τον ορισμό της έννοιας της συνάρτησης φραγμένης κύμανσης σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$.

(β). Αποδείξτε με χρήση του ορισμού ότι κάθε φθίνουσα συνάρτηση, ορισμένη σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$, είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης στο $[a, b]$.

(γ). Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \cos^2(x)$, είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης στο $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Υπολογίστε τη συνάρτηση ολικής κύμανσης $V_{\frac{\pi}{4}}^x f$ της f , για κάθε $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.