ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΠΕΤΡΟΣ ΓΑΛΑΝΟΠΟΥΛΟΣ

Ημιομάδες τελεστών σύνθεσης και πίνακες **Hausdorff** σε χώρους αναλυτικών συναρτήσεων

Διδακτορική Διατριβή

Θεσσαλονίκη 2002

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Χώροι συναρτήσεων

Παραθέτουμε τις βασικότερες έννοιες που χρησιμοποιούνται στη μεγαλύτερη έκταση της διατριβής αυτής. Συμβολίζουμε με

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

τον μοναδιαίο δίσκο στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ και με $\partial\mathbb{D}$ το σύνορο του $\mathbb{D}$. Το σύνολο των αναλυτικών συναρτήσεων επί του $\mathbb{D}$ θα το συμβολίζουμε με $A(\mathbb{D})$. Επίσης με

$$dm(z) = \frac{1}{\pi}dxdy = \frac{1}{\pi}rdrd\theta$$

παριστάνουμε το κανονικοποιημένο μέτρο του Lebesgue επί του $\mathbb{D}$.

Για $\alpha > -1$, ο **σταθμισμένος χώρος Dirichlet** $\mathcal{D}_\alpha$ αποτελείται από τις συναρτήσεις $f(z) \in A(\mathbb{D})$ για τις οποίες ισχύει

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}_a} = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha dm(z) < \infty.$$

Οι $\mathcal{D}_\alpha$ είναι χώροι Hilbert, με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + \int_{\mathbb{D}} f'(z)\overline{g'(z)}(1-|z|^2)^\alpha dm(z).$$

Θα δούμε στο δεύτερο κεφάλαιο ότι μία ισοδύναμη έκφραση για την νόρμα, όταν $0 \leq \alpha \leq 1$, είναι

$$\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 \sim \sum_{n=0}^{\infty}(1+n)^{1-\alpha}|a_n|^2,$$

όπου $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{D}_\alpha$. Ειδικότερα για $\alpha = 0$ λαμβάνουμε τον κλασικό χώρο Dirichlet $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$, που περιέχει τις αναλυτικές συναρτήσεις f επί του $\mathbb{D}$ των οποίων οι εικόνες έχουν πεπερασμένο εμβαδόν (λαμβάνοντας υπ΄ όψιν την πολλαπλότητα). Δηλαδή :

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dm(z).$$

Για $\alpha = 1$ λαμβάνουμε το χώρο Hardy H^2, που περιέχει τις συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Είναι φανερό ότι, για $0 < \alpha < \beta < 1$,

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_\alpha \subset \mathcal{D}_\beta \subset H^2.$$

Για $0 < p \leq \infty$, ο χώρος Hardy H^p αποτελείται απο τις αναλυτικές συναρτήσεις $f \in A(\mathbb{D})$ που ικανοποιούν

$$\|f\|_{H^p}^p = \sup_{r\in[0,1)} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty.$$

Ο H^∞ είναι ο χώρος των φραγμένων αναλυτικών συναρτήσεων επί του $\mathbb{D}$, δηλαδή $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty$. Για $0 < p < q < \infty$ ισχύει

$$H^\infty \subset H^q \subset H^p.$$

Για $1 \leq p \leq \infty$ οι H^p, εφοδιασμένοι με τη παραπάνω νόρμα, είναι χώροι Banach. Περισσότερες πληροφορίες για αυτούς τους χώρους περιέχονται στο [DU].

1.2 Τελεστές σύνθεσης

Θεωρούμε μία αναλυτική συνάρτηση

$$\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}.$$

Ο **τελεστής σύνθεσης** που ορίζεται από την φ είναι

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi, \qquad f \in A(\mathbb{D}).$$

Απο ένα θεώρημα του Littlewood (Littlewood's subordination principle, [DU, Theorem 1.7]) ο τελεστής C_φ, για κάθε φ όπως παραπάνω, είναι φραγμένος στους χώρους H^p και ισχύει

$$\|C_\varphi\| \leq \left(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p \in [1, \infty).$$

Στην περίπτωση όμως των χώρων $\mathcal{D}_\alpha$ δεν είναι πάντα αληθές ότι μια αναλυτική συνάρτηση $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ εισάγει φραγμένο τελεστή σύνθεσης. Αν όμως η φ είναι αμφιμονότιμη (univalent), τότε ο C_φ είναι φραγμένος στον $\mathcal{D}_\alpha$ όπως δείχνει μία αλλαγή μεταβλητής.

Σημαντικό ρόλο για τις ιδιότητες των τελεστών σύνθεσης διαδραματίζει η θέση των σταθερών σημείων της φ. Ένα σημείο $\beta \in \partial\mathbb{D} \cup \mathbb{D}$ λέγεται σταθερό σημείο της φ αν

$$\lim_{r \to 1} \varphi(r\beta) = \beta.$$

Είναι φανερό ότι αν $\beta \in \mathbb{D}$ τότε $\varphi(\beta) = \beta$.

Για μια φ όπως παραπάνω θεωρούμε τις αναδρομές

$$\varphi_1 = \varphi, \quad \varphi_2 = \varphi \circ \varphi, \quad \cdots, \quad \varphi_n = \varphi \circ \varphi_{n-1}, \quad n = 3, 4, \cdots$$

Από το θεώρημα Denjoy-Wolff [CMc, Theorem 2.51], προκύπτει (εκτός της περίπτωσης όπου η φ είναι ελλειπτικός αυτομορφισμός του $\mathbb{D}$, δηλ. αυτομορφισμός με σταθερό σημείο μέσα στο $\mathbb{D}$), ότι υπάρχει $b \in \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$ έτσι ώστε $\varphi_n \to b$, καθώς $n \to \infty$, ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{D}$. Το χαρακτηριστικό αυτό σημείο λέγεται **σημείο Denjoy-Wolff** της φ και είναι εκείνο απο τα σταθερά σημεία της φ που ικανοποιεί την

$$\lim_{r \to 1^-} |\varphi'(rb)| \leq 1.$$

Στην παρούσα μελέτη οι τελεστές σύνθεσης χρησιμοποιούνται σαν εργαλείο. Σημειώνουμε όμως ότι η μελέτη των τελεστών αυτών, αυτή καθεαυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και έχει αναπτυχθεί προς δύο κατευθύνσεις. Η μία κατεύθυνση, αποτελέσματα της οποίας χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία, θεωρεί τελεστές σύνθεσης σε χώρους αναλυτικών συναρτήσεων. Αντικείμενο αυτής της κατεύθυνσης είναι η σύνδεση ιδιοτήτων της ολόμορφης συνάρτησης φ, οι οποίες ιδιότητες προέρχονται από την Κλασσική Ανάλυση, με τις ιδιότητες του εισαγόμενου τελεστή C_φ, που αναφέρονται στην Θεωρία Τελεστών. Περισσότερες πληροφορίες για τελεστές σύνθεσης μπορούν να βρεθούν στα βιβλία [CMc], [SH], [SM].

Η δεύτερη κατεύθυνση, η οποία προηγείται χρονικά της πρώτης, θεωρεί τελεστές

$$Vf(\omega) = f(S(\omega))$$

όπου $S : \Omega \to \Omega$ μετασχηματισμός σε χώρο μέτρου Ω και f μετρήσιμη (και συνήθως L^2- ολοκληρώσιμη συνάρτηση). Ο τελεστής V είναι γνωστός ως τελεστής Koopman. Τέτοιοι τελεστές εισήχθησαν από τον B. Koopman [K] σε σχέση με την μελέτη της Στατιστικής Μηχανικής. Η μελέτη τελεστών Koopman επέτρεψε αργότερα την ευρεία χρήση της θεωρίας Τελεστών στην Στατιστική Μηχανική, Δυναμικά Συστήματα και Εργοδική Θεωρία. Ο αναγνώστης μπορεί να βρεί περισσότερες πληροφορίες στις εργασίες [AT], [ASS].

1.3 Ημιομάδες αναλυτικών συναρτήσεων

Έστω $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ μία οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων από το δίσκο στο δίσκο που ικανοποιεί

- $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}, \quad t, s \geq 0$
- $\varphi_0(z) = z$
- η $\varphi_t(z) : [0, \infty) \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Η $\{\varphi_t\}$ ονομάζεται **ημιομάδα αναλυτικών συναρτήσεων του δίσκου**. Είναι γνωστό [BP], ότι για κάθε $t \geq 0$ η φ_t είναι αμφιμονότιμη και ότι το όριο

$$G(z) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\partial \varphi_t(z)}{\partial t}$$

υπάρχει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{D}$. Η αναλυτική συνάρτηση $G(z)$ ονομάζεται **απειροστικός γεννήτορας** της ημιομάδας $\{\varphi_t\}$. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η συνάρτηση $G(z)$ ικανοποιεί

$$G(\varphi_t(z)) = \frac{\partial \varphi_t(z)}{\partial t}, \qquad t \geq 0,\ z \in \mathbb{D}.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η $\{\varphi_t\}$ δεν είναι η τετριμμένη ημιομάδα $\varphi_t(z) = z$. Τότε, αφού οι συναρτήσεις φ_t είναι κλασματικές αναδρομές της φ, έπεται φυσιολογικά ότι [BP]:

- είτε υπάρχει ένα σημείο $b \in \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$ τέτοιο ώστε $\varphi_t \to b$, καθώς το $t \to \infty$, ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{D}$.
- είτε η ημιομάδα $\{\varphi_t\}$ αποτελείται από ελλειπτικούς αυτομορφισμούς του $\mathbb{D}$, οι οποίοι έχουν ένα κοινό σταθερό σημείο $b \in \mathbb{D}$.

Και στις δύο περιπτώσεις ο απειροστικός γεννήτορας έχει την μοναδική αναπαράσταση

$$G(z) = F(z)(\bar{b}z - 1)(z - b), \qquad |b| \leq 1 \tag{1.1}$$

όπου η $F \in A(\mathbb{D})$ έχει μη αρνητικό πραγματικό μέρος και δεν είναι η μηδενική συνάρτηση. Το b είναι το κοινό Denjoy-Wolff σημείο των φ_t, στο οποίο θα αναφερόμαστε ως το Denjoy-Wolff σημείο της $\{\varphi_t\}$ (DW σημείο). Σημειώνουμε ότι αν αυτό βρίσκεται μέσα στον δίσκο τότε σύμφωνα με τα παραπάνω είναι ένα κοινό σταθερό σημείο των φ_t. Παρατηρούμε ότι αν οι φ_t έχουν ένα κοινό σταθερό σημείο μέσα στον δίσκο τότε αυτό είναι απαραίτητα το DW σημείο της ημιομάδας.

Οι ημιομάδες $\{\varphi_t\}$ μπορούν να χαρακτηρισθούν με βάση κάποιες αμφιμονότιμες αναλυτικές συναρτήσεις [Si1]. Συγκεκριμμένα, αν

$$h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$$

είναι αμφιμονότιμη και αναλυτική τέτοια ώστε για κάποιο μιγαδικό αριθμό $c \neq 0$, να ισχύει

$$h(z) + ct \in h(\mathbb{D}), \tag{1.2}$$

για κάθε $t \geq 0$ και $z \in \mathbb{D}$, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η

$$\varphi_t(z) = h^{-1}(h(z) + ct)$$

ορίζει μία μη τετριμμένη ημιομάδα, της οποίας το DW σημείο ανήκει στο $\partial\mathbb{D}$.

Επίσης αν $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ είναι αμφιμονότιμη και αναλυτική, διαφορετική από την ταυτοτική συνάρτηση, τέτοια ώστε $0 \in h(\mathbb{D})$ και για κάποιο μιγαδικό αριθμό $c \neq 0$ να ισχύει

$$e^{-ct}h(z) \in h(\mathbb{D}) \tag{1.3}$$

για κάθε $z \in \mathbb{D}$ και $t \geq 0$, τότε μπορούμε να δούμε ότι η συνάρτηση

$$\varphi_t(z) = h^{-1}(e^{-ct}h(z))$$

ορίζει μία μη τετριμμένη ημιομάδα αναλυτικών συναρτήσεων από το δίσκο στο δίσκο με DW σημείο το $h^{-1}(0) \in \mathbb{D}$.

Μπορούμε αντίστροφα να δούμε ότι κάθε μη τεριμμένη μονοπαραμετρική ημιομάδα $\{\varphi_t\}$ μπορεί να παρασταθεί με μία από τις δύο παραπάνω μορφές για μία κατάλληλη αμφιμονότιμη και αναλυτική συνάρτηση h κάθε φορά [Si1].

Συγκεκριμένα, έστω $\{\varphi_t\}$ μια ημιομάδα με DW σημείο b και απειροστικό γεννήτορα $G(z)$. Αν $b \in \partial\mathbb{D}$ τότε υπάρχει μοναδική αμφιμονότιμη h η οποία ικανοποιεί

$$h'(z) = \frac{G(0)}{G(z)}, \qquad h(0) = 0, \tag{1.4}$$

έτσι ώστε

$$\varphi_t(z) = h^{-1}(h(z) + G(0)t). \tag{1.5}$$

Ενώ αν το $b \in \mathbb{D}$, υπάρχει μοναδική αμφιμονότιμη h η οποία ικανοποιεί

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{G'(b)}{G(z)}, \qquad h'(b) = \frac{1}{1-|b|^2}, \tag{1.6}$$

έτσι ώστε

$$\varphi_t(z) = h^{-1}(e^{G'(b)t}h(z)). \tag{1.7}$$

Η συνάρτηση h σε κάθε περίπτωση θα ονομάζεται η αντίστοιχη αμφιμονότιμη συνάρτηση της ημιομάδας $\{\varphi_t\}$.

1.4 Ημιομάδες τελεστών

Έστω X ένας χώρος Banach. Μία οικογένεια $\{T_t\}_{t\geq 0}$ φραγμένων γραμμικών τελεστών στο X λέγεται **ημιομάδα τελεστών** αν:

- $T_0 = I$, ο ταυτοτικός τελεστής
- $T_t \circ T_s = T_{s+t}$, για $t, s \geq 0$.

Μία ημιομάδα τελεστών στο X λέγεται **ισχυρά συνεχής** (strongly continuous ή c_0-semigroup) αν για κάθε $s \geq 0$ ισχύει

$$\lim_{t\to s} \|T_t(x) - T_s(x)\|_X = 0, \qquad \text{για κάθε} \quad x \in X.$$

Αν για κάθε $s \geq 0$ ισχύει η ισχυρότερη συνθήκη

$$\lim_{t\to s} \|T_t - T_s\| = 0$$

τότε λέμε ότι η $\{T_t\}$ είναι **ομοιόμορφα συνεχής** (uniformly continuous).

Ο **απειροστικός γεννήτορας** μίας ισχυρά συνεχούς ημιομάδας τελεστών $\{T_t\}$ είναι ο (εν γένει μη φραγμένος) τελεστής

$$A(x) = \lim_{t\to 0} \frac{T_t(x) - x}{t},$$

με πεδίο ορισμού

$$D(A) = \left\{ x \in X\colon \text{ το όριο } \lim_{t\to 0} \frac{T_t(x) - x}{t} \text{ υπάρχει στο } X \right\}.$$

Το σύνολο $D(A)$ είναι ένα γραμμικός υπόχωρος του X, πάντοτε πυκνός στο X, και ο A είναι κλειστός γραμμικός τελεστής στο $D(A)$.

Ο απειροστικός γεννήτορας A είναι φραγμένος αν και μόνον αν η $\{T_t\}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και στην περίπτωση αυτή έχομε την παράσταση

$$T_t = e^{tA}, \quad t \geq 0. \tag{1.8}$$

Στην περίπτωση μίας ισχυρά συνεχούς ημιομάδας η (1.8), με κατάλληλη ερμηνεία, συνεχίζει να ισχύει.

Όπως και στην περίπτωση των φραγμένων τελεστών η συλλογή των μιγαδικών αριθμών λ, για τους οποίους ο $(\lambda I - A)$ έχει φραγμένο αντίστροφο στο X, λέγεται επιλύον σύνολο του A και συμβολίζεται με $\rho(A)$. Για $\lambda \in \rho(A)$ ο επιλύων τελεστής είναι

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

Το φάσμα του A είναι το σύνολο

$$\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$$

και το σημειακό του φάσμα $\sigma_\pi(A)$ είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του. Το φάσμα είναι πάντοτε κλειστό σύνολο στο επίπεδο. Σε αντίθεση όμως με τους φραγμένους τελεστές, το $\sigma(A)$ ποικίλλει σε μέγεθος και μπορεί να είναι φραγμένο ή μη φραγμένο σύνολο, το κενό ή ακόμα και όλο το επίπεδο.

Το **φράγμα αυξητικότητας** μίας ισχυρά συνεχούς ημιομάδας $\{T_t\}$ είναι το όριο

$$\omega_0 = \lim_{t \to \infty} \frac{\log \|T_t\|}{t},$$

και ισχύει

$$-\infty \leq \omega_0 < \infty.$$

Αν $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathcal{R}e(\lambda) > \omega_0$, τότε $\lambda \in \rho(A)$ και ο επιλύων τελεστής στο σημείο αυτό μπορεί να γραφεί

$$R(\lambda, A)(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t(x)\, dt, \qquad x \in X. \tag{1.9}$$

Ολα τα παραπάνω, και ακόμα περισσότερες πληροφορίες για ημιομάδες τελεστών σε χώρους Banach περιέχονται στα [DS], [HP], [P].

1.5 Παρουσίαση των αποτελεσμάτων

Έχοντας αναφέρει τα παραπάνω μπορούμε να παρουσιάσουμε συνοπτικά το περιεχόμενο των επόμενων κεφαλαίων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάμε ημιομάδες τελεστών σύνθεσης στους χώρους $\mathcal{D}_\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Αποδεικνύουμε την ισχυρή συνέχεια τους και προσδιορίζουμε την μορφή του απειροστικού γεννήτορα. Παρουσιάζουμε επίσης παραδείγματα τέτοιων ημιομάδων.

Στο τρίτο κεφάλαιο μελετάμε τον τελεστή Cesàro

$$\mathcal{C}(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k \right) z^n, \tag{1.10}$$

όπου $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Με την βοήθεια των ημιομάδων τελεστών σύνθεσης δείχνουμε ότι ο $\mathcal{C}$ είναι φραγμένος στους χώρους $\mathcal{D}_\alpha$, για $0 < \alpha < 1$, συμπληρώνοντας έτσι το κενό στη μελέτη αυτού του τελεστή μεταξύ των χώρων $\mathcal{D}$ και H^2. Συμπληρωματικά, μελετάμε στους ίδιους χώρους τον τελεστή

$$\mathcal{A}(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \right) z^n,$$

ο οποίος εισάγεται από τον ανάστροφο πίνακα του $\mathcal{C}$.

Στο τέταρτο κεφάλαιο θεωρούμε μια κατηγορία πινάκων Hausdorff των οποίων η γεννήτρια ακολουθία $\{\mu_n\}$ είναι ακολουθία ροπών, δηλ.

$$\mu_n = \int_0^1 t^k d\mu(t), \qquad n = 0, 1, ...$$

όπου μ είναι πεπερασμένο μέτρο Borel στο διάστημα $(0, 1]$. Τους πίνακες αυτούς τους θεωρούμε ως μετασχηματισμούς επί αναλυτικών συναρτήσεων του δίσκου με πολλαπλασιασμό επί την ακολουθία των συντελεστών Taylor. Συγκεκριμένα, αν $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A(\mathbb{D})$, θεωρούμε τον μετασχηματισμό που δίνεται από τη δυναμοσειρά

$$\mathcal{H}_\mu(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} h_{n,k} a_k) z^n,$$

όπου $h_{n,k}$ τα στοιχεία του αντίστοιχου πίνακα Hausdorff. Δείχνουμε ότι κάθε τέτοιος μετασχηματισμός μπορεί να εκφρασθεί ως μέσος όρος κάποιων σταθμισμένων τελεστών σύνθεσης. Χρησιμοποιώντας αυτήν την μορφή, βρίσκομε συνθήκες επί του μέτρου ώστε οι πίνακες να εισάγουν φραγμένους τελεστές στους χώρους Hardy H^p, $1 \leq p < \infty$.

Κεφάλαιο 2

Ημιομάδες τελεστών σύνθεσης στους χώρους $\mathcal{D}_\alpha$.

2.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε μία ημιομάδα $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ αναλυτικών συναρτήσεων του δίσκου και ορίζουμε την οικογένεια μετασχηματισμών

$$T_t(f)(z) = f(\varphi_t(z)), \qquad f \in \mathcal{D}_\alpha.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η οικογένεια αυτή ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $T_0 = I$, ο ταυτοτικός τελεστής
- $T_t \circ T_s = T_{t+s}$.

Θα δούμε ότι για κάθε $t \geq 0$, ο T_t είναι φραγμένος τελεστής στους $\mathcal{D}_\alpha$, δηλαδή η οικογένεια $\{T_t\}_{t\geq 0}$ είναι ημιομάδα φραγμένων τελεστών στους χώρους αυτούς. Για την απόδειξη, χρειαζόμαστε την ακόλουθη εκτίμηση της αυξητικότητας μιας συνάρτησης που ανήκει στους $\mathcal{D}_\alpha$.

Λήμμα 2.1.1. *Έστω* $0<\alpha<1$. *Αν* $f\in\mathcal{D}_\alpha$ *τότε για κάθε* $z\in\mathbb{D}$ *ισχύει*

$$|f(z)|\le K\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-|z|)^{\frac{\alpha}{2}}}\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha}, \tag{2.1}$$

όπου K *θετική σταθερά ανεξάρτητη του* α.

Απόδειξη. Πρώτα θα δούμε ότι για $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in\mathcal{D}_\alpha$ η νόρμα έχει την ακόλουθη ισοδύναμη έκφραση

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}\sim\Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)^{1-\alpha}|a_n|^2,$$

όπου Γ η γνωστή συνάρτηση Γάμμα. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}&=|f(0)|^2+\int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha dm(z)\\&=|f(0)|^2+\int_0^1\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|^2d\theta\right)(1-r^2)^\alpha rdr\\&=|a_0|^2+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2|a_{n+1}|^2\int_0^1r^n(1-r)^\alpha dr.\end{aligned}$$

Επειδή [WW, σελ.254]

$$\int_0^1r^n(1-r)^\alpha dr=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+2)} \tag{2.2}$$

και

$$\Gamma(n+1)=n!$$

καταλήγουμε

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}&=|a_0|^2+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2|a_{n+1}|^2\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+2)}\\&=|a_0|^2+\Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|a_{n+1}|^2\frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+2)}\ .\end{aligned}$$

Όμως είναι γνωστό [Z, sel. 77] ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n+2)}{(n+1)!(n+1)^\alpha} = 1. \tag{2.3}$$

Άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|a_{n+1}|^2\frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+2)} \sim \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{1-\alpha}|a_n|^2$$

και έτσι εύκολα καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Για την αυξητικότητα μίας $f \in \mathcal{D}_\alpha$ θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Schwarz και την παραπάνω ισοδύναμη έκφρασης της νόρμας. Έτσι

$$\begin{aligned}
|f(z)|^2 &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n\right)^2 \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)^{\frac{1-\alpha}{2}}|a_n|\frac{|z|^n}{(1+n)^{\frac{1-\alpha}{2}}}\right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)^{1-\alpha}|a_n|^2\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)^{\alpha-1}|z|^{2n}\right) \\
&\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)^{\alpha-1}|z|^{2n}\right) \\
&= \frac{K\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+n)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|z|^{2n}\right)\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}
\end{aligned}$$

όπου K θετική σταθερά ανεξάρτητη του α. Τώρα, λόγω του αναπτύγματος

$$(1-|z|)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)n!}|z|^n, \quad |z|<1$$

και της (2.3), καταλήγουμε

$$|f(z)| \leq K \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-|z|^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha},$$

□

Τώρα είμαστε σε θέση να βρούμε μία εκτίμηση της νόρμας των τελεστών σύνθεσης $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$, για αμφιμονότιμες φ, στους χώρους $\mathcal{D}_\alpha$.

Πρόταση 2.1.1. *Έστω $0 < \alpha < 1$. Αν $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ αμφιμονότιμη και αναλυτική συνάρτηση, τότε*

$$\|f \circ \varphi\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq K \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha} \tag{2.4}$$

όπου $K > 0$ σταθερά ανεξάρτητη του α.

Απόδειξη. Από τον ορισμό έχουμε ότι

$$\|f \circ \varphi\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} = |(f \circ \varphi)(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |(f \circ \varphi)'(z)|^2 (1-|z|^2)^\alpha dm(z).$$

Από το λήμμα (2.1.1) παίρνουμε

$$|f(\varphi(0))|^2 \leq \frac{K}{\alpha} \frac{1}{(1-|\varphi(0)|)^\alpha} \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}. \tag{2.5}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} |(f \circ \varphi)'(z)|^2 (1-|z|^2)^\alpha dm(z) \\
&\quad = \int_{\mathbb{D}} |(f \circ \varphi)'(z)|^2 \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^\alpha (1-|\varphi(z)|^2)^\alpha dm(z) \\
&\quad \leq 2^\alpha \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^\alpha \int_{\mathbb{D}} |(f \circ \varphi)'(z)|^2 (1-|\varphi(z)|^2)^\alpha dm(z),
\end{aligned}$$

γιατί από το λήμμα του Schwarz έχουμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{D}$

$$\frac{1-|z|}{1-|\varphi(z)|} \leq \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|} \ .$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε μια αλλαγή μεταβλητής στο τελευταίο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |(f\circ\varphi)'(z)|^2(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha dm(z) &= \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha dm(z)\\ &\leq \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha dm(z),\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\int_{\mathbb{D}} |(f\circ\varphi)'(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha dm(z) \leq 2\left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^\alpha \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}. \tag{2.6}$$

Συνδιάζοντας τις (2.5) και (2.6) συμπεραίνουμε

$$\begin{aligned}&\|f\circ\varphi\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}\\ &\quad\leq \frac{K}{\alpha}\frac{1}{(1-|\varphi(0)|)^\alpha}\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} + 2\left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^\alpha \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}\\ &\quad\leq \frac{K}{\alpha}\left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^\alpha \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} + 2\left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^\alpha \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}\\ &\quad\leq \frac{K'}{\alpha}\left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^\alpha \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha},\end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο. □

Επιπλέον, αν $\varphi(0) = 0$, τότε από την παραπάνω διαδικασία καταλήγουμε στην

$$\|f\circ\varphi\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha}.$$

Άμεσα προκύπτει από τα παραπάνω ότι για κάθε ημιομάδα $\{\varphi_t\}$, η ημιομάδα $T_t(f)(z) = f\circ\varphi_t(z)$ αποτελείται από φραγμένους τελεστές στους χώρους $\mathcal{D}_\alpha$, για $0 < \alpha < 1$.

2.2 Ισχυρή συνέχεια

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την ισχυρή συνέχεια και τον απειροστικό γεννήτορα των ημιομάδων τελεστών σύνθεσης στους χώρους $\mathcal{D}_\alpha$. Πρώτα θα δείξουμε ότι

Πρόταση 2.2.1. *Για κάθε $0 < \alpha < 1$, τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον $\mathcal{D}_\alpha$.*

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $f \in \mathcal{D}_\alpha$, υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $\{P_n\}$, τέτοια ώστε

$$\|P_n - f\|_{\mathcal{D}_\alpha} \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$.

Για $0 < \rho < 1$, θεωρούμε την $f_\rho(z) = f(\rho z)$. Έστω $\{P_n\}$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς Taylor της f_ρ. Επειδή η f_ρ είναι αναλυτική στο δίσκο ακτίνας $\frac{1}{\rho}$, έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} P_n(z) = f_\rho(z)$$

ομοιόμορφα στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο. Το ίδιο ισχύει και για τις παραγώγους, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} P_n'(z) = f_\rho'(z)$$

ομοιόμορφα στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο. Από αυτή την ομοιόμορφη σύγκλιση έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{D}} |P_n'(z) - f_\rho'(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha dm(z) \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$, δηλαδή

$$\|P_n - f_\rho\|_{\mathcal{D}_\alpha} \to 0 \tag{2.7}$$

καθώς το $n \to \infty$.

Έστω $\epsilon > 0$ δοθέν. Διαλέγουμε $\delta \in (0,1)$ ώστε

$$\int_{\delta<|z|<1} |f'(z)|^2 (1-|z|^2)^\alpha dm(z) < \epsilon.$$

Τότε για κάθε $0 < \rho < 1$

$$\begin{aligned}
&\int_{\delta<|z|<1} |f_\rho'(z)|^2 (1-|z|^2)^\alpha dm(z) \\
&\qquad = \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} |f'(\rho s e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{\pi} (1-s^2)^\alpha \rho^2 s ds \\
&\qquad \leq \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} |f'(s e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{\pi} (1-s^2)^\alpha s ds \\
&\qquad = \int_{\delta<|z|<1} |f'(z)|^2 (1-|z|^2)^\alpha dm(z) < \epsilon, \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

επειδή η ποσότητα $\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 d\theta$ είναι αύξουσα συνάρτηση του r.

Για ρ κατάλληλα κοντά στο 1

$$|f_\rho'(z) - f'(z)| < \epsilon$$

για $|z| < \delta$. Τότε

$$\int_{|z|\leq\delta} |f_\rho'(z) - f'(z)|^2 (1-|z|^2)^\alpha dm(z) < C\epsilon^2$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\|f_\rho - f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} &= \int_{\mathbb{D}} |f'_\rho(z) - f'(z)|^2 (1-|z|^2)^\alpha dm(z) \\
&\leq \int_{|z|\leq\delta} |f'_\rho(z) - f'(z)|^2 (1-|z|^2)^\alpha dm(z) \\
&\quad + 2\int_{\delta<|z|<1} (|f'_\rho(z)|^2 + |f'(z)|^2)(1-|z|^2)^\alpha dm(z) \\
&< C\epsilon^2 + 4\epsilon. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Τότε από τις (2.7), (2.9) και την

$$\|P_n - f\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq \|P_n - f_\rho\|_{\mathcal{D}_\alpha} + \|f_\rho - f\|_{\mathcal{D}_\alpha},$$

προκύπτει το ζητούμενο.

□

Θεώρημα 2.2.1. *Άν $0 < \alpha < 1$ και $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ ημιομάδα αναλυτικών συναρτήσεων του δίσκου, τότε η ημιομάδα τελεστών*

$$T_t(f) = f \circ \varphi_t$$

είναι ισχυρά συνεχής στον $\mathcal{D}_\alpha$.

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $f \in \mathcal{D}_\alpha$ και για κάθε $s \geq 0$ ισχύει:

$$\lim_{t\to s} \|T_t(f) - T_s(f)\|_{\mathcal{D}_\alpha} = 0.$$

Για P πολυώνυμο έχουμε

$$\begin{aligned}
&\|T_t(f) - T_s(f)\|_{\mathcal{D}_\alpha} \\
&\quad \leq \|T_t(f) - T_t(P)\|_{\mathcal{D}_\alpha} + \|T_t(P) - T_s(P)\|_{\mathcal{D}_\alpha} + \|T_s(P) - T_s(f)\|_{\mathcal{D}_\alpha} \\
&\quad \leq (\|T_t\| + \|T_s\|)\|f - P\|_{\mathcal{D}_\alpha} + \|T_t(P) - T_s(P)\|_{\mathcal{D}_\alpha}.
\end{aligned}$$

Τα πολυώνυμα είναι πυκνά στους χώρους $\mathcal{D}_\alpha$ και όπως προκύπτει από την πρόταση (2.1.1) η $\|T_t\|$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, σαν συνάρτηση του t, στα συμπαγή υποσύνολα του $[0,\infty)$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\lim_{t\to s}\|T_t(P)-T_s(P)\|_{\mathcal{D}_\alpha}=0.$$

Αν $P(z)=\sum_{n=0}^{m}a_nz^n$ παρατηρούμε ότι

$$\|T_t(P)-T_s(P)\|_{\mathcal{D}_\alpha}\le|a_m|\|(\varphi_t)^m-(\varphi_s)^m\|_{\mathcal{D}_\alpha}+ \\ +....+|a_1|\|\varphi_t-\varphi_s\|_{\mathcal{D}_\alpha}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι για κάθε n ισχύει

$$\lim_{t\to s}\|\varphi_t^n-\varphi_s^n\|_{\mathcal{D}_\alpha}=0.$$

Όμως

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_t^n-\varphi_s^n\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2=\\
&\quad=|\varphi_t^n(0)-\varphi_s^n(0)|^2+\int_{\mathbb{D}}|(\varphi_t^n(z)-\varphi_s^n(z))'|^2(1-|z|^2)^\alpha dm(z)\\
&\quad\le|\varphi_t^n(0)-\varphi_s^n(0)|^2+\\
&\qquad+2n^2\int_{\mathbb{D}}|\varphi_t'(z)-\varphi_s'(z)|^2|\varphi_t^{n-1}(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha dm(z)\\
&\qquad+2n^2\int_{\mathbb{D}}|\varphi_t^{n-1}(z)-\varphi_s^{n-1}(z)|^2|\varphi_s'(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha dm(z)\\
&\quad\le|\varphi_t^n(0)-\varphi_s^n(0)|^2+\\
&\qquad+2n^2\int_{\mathbb{D}}|\varphi_t'(z)-\varphi_s'(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha dm(z)\\
&\qquad+2n^2\int_{\mathbb{D}}|\varphi_t^{n-1}(z)-\varphi_s^{n-1}(z)|^2|\varphi_s'(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha dm(z).
\end{aligned}$$

Δηλαδή αρκεί να δειχθεί ότι κάθε ένας από τους παραπάνω προσθεταίους συγκλίνει στο 0 καθώς το $t\to s$.

(i) Όπως είδαμε στην εισαγωγή, κάθε ημιομάδα $\{\varphi_t\}$ έχει συγκεκριμένη αναπαράσταση ανάλογα με το που βρίσκεται το DW σημείο της. Λόγω αυτής της αναπαράστασης, για κάθε περίπτωση, ισχύει

$$\lim_{t\to s}\varphi_t(z)=\varphi_s(z),$$

ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{D}$. Άρα

$$\lim_{t\to s}|\varphi_t^n(0)-\varphi_s^n(0)|=0. \tag{2.10}$$

(ii) Για τον δεύτερο προσθεταίο εργαζόμαστε ως εξής. Παρατηρούμε ότι

$$\int_{\mathbb{D}}|\varphi_t'(z)-\varphi_s'(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha dm(z)\leq\int_{\mathbb{D}}|\varphi_t'(z)-\varphi_s'(z)|^2dm(z).$$

Αρκεί να δείξουμε

$$\lim_{t\to s}\int_{\mathbb{D}}|\varphi_t'(z)-\varphi_s'(z)|^2dm(z)=0.$$

Προς τούτο παρατηρούμε ότι οι εικόνες $\varphi_t(\mathbb{D})$ αποτελούν μία φθίνουσα οικογένεια συνόλων. Λόγω της συνέχειας της

$$(t,z)\in[0,\infty)\times\mathbb{D}\to\varphi_t(z)\in\mathbb{D},$$

ισχύει

$$\varphi_s(\mathbb{D})=\cap_{t<s}\varphi_t(\mathbb{D})=\cup_{t>s}\varphi_t(\mathbb{D}).$$

Έτσι από κλασσικό θεώρημα της Θεωρίας Μέτρου

$$\lim_{t\to s}m(\varphi_t(\mathbb{D}))=m(\varphi_s(\mathbb{D})),$$

δηλαδή ισοδύναμα

$$\lim_{t\to s}\int_{\mathbb{D}}|\varphi_t'(z)|^2dm(z)=\int_{\mathbb{D}}|\varphi_s'(z)|^2dm(z). \tag{2.11}$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f_t(z) = 2(|\varphi_t'(z)|^2 + |\varphi_s'(z)|^2) - |\varphi_t'(z) - \varphi_s'(z)|^2 \geq 0$$

και εφαρμόσουμε το λήμμα του Fatou καταλήγουμε ότι

$$\int_{\mathbb{D}} \liminf_{t\to s} f_t(z)dm(z) \leq \liminf_{t\to s} \int_{\mathbb{D}} f_t(z)dm(z).$$

Ισοδύναμα

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} \liminf_{t\to s}&[2(|\varphi_t'(z)|^2 + |\varphi_s'(z)|^2)]dm(z) \\ &- \int_{\mathbb{D}} \limsup_{t\to s} |\varphi_t'(z) - \varphi_s'(z)|^2 dm(z) \\ \leq \liminf_{t\to s} &\int_{\mathbb{D}} 2(|\varphi_t'(z)|^2 + |\varphi_s'(z)|^2)dm(z)- \\ &- \limsup_{t\to s} \int_{\mathbb{D}} |\varphi_t'(z) - \varphi_s'(z)|^2 dm(z). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Επειδή όμως

$$\lim_{t\to s} \varphi_t'(z) = \varphi_s'(z)$$

ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του δίσκου, προκύπτει ότι

$$\liminf_{t\to s}(|\varphi_t'(z)|^2 + |\varphi_s'(z)|^2) = 2|\varphi_s'(z)|^2 \tag{2.13}$$

και

$$\limsup_{t\to s} |\varphi_t'(z) - \varphi_s'(z)|^2 = 0. \tag{2.14}$$

Έτσι με την βοήθεια των (2.11) , (2.13) και (2.14), η (2.12) γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned}4\int_{\mathbb{D}} |\varphi_s'(z)|^2 dm(z) \leq 4 &\int_{\mathbb{D}} |\varphi_s'(z)|^2 dm(z)- \\ &- \limsup_{t\to s} \int_{\mathbb{D}} |\varphi_t'(z) - \varphi_s'(z)|^2 dm(z)\end{aligned}$$

και άρα

$$\limsup_{t\to s}\int_{\mathbb{D}}|\varphi_t'(z)-\varphi_s'(z)|^2dm(z)\le 0.$$

Όμως η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι θετική. Άρα

$$\lim_{t\to s}\int_{\mathbb{D}}|\varphi_t'(z)-\varphi_s'(z)|^2dm(z)=0. \tag{2.15}$$

(iii) Τέλος, λόγω του ότι για κάθε $t\ge 0$ οι συναρτήσεις $\varphi_t(z)$ είναι αμφιμονότιμες και

$$\lim_{t\to s}\varphi_t(z)=\varphi_s(z),$$

ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{D}$, από το θεώρημα κυριαρχούμενης σύγκλισης προκύπτει ότι

$$\lim_{t\to s}\int_{\mathbb{D}}|\varphi_t^{n-1}(z)-\varphi_s^{n-1}(z)|^2|\varphi_s'(z)|^2(1-|z|^2)^{\alpha}dm(z)=0. \tag{2.16}$$

Συνδιάζοντας τις (2.10), (2.15) και (2.16) αποδεικνύεται το ζητούμενο.

$\square$

Το επόμενο θεώρημα προσδιορίζει τον απειροστικό γεννήτορα των ημιομάδων $\{T_t\}$.

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω $0<\alpha<1$ και $\{\varphi_t\}_{t\ge 0}$ ημιομάδα αναλυτικών συναρτήσεων του δίσκου με απειροστικό γεννήτορα $G(z)$. Αν Γ_α ο απειροστικός γεννήτορας της αντίστοιχης ημιομάδας τελεστών σύνθεσης $\{T_t\}_{t\ge 0}$ τότε*

$$\Gamma_\alpha(f)(z)=G(z)f'(z), \tag{2.17}$$

με πεδίο ορισμού

$$D(\Gamma_\alpha)=\{f\in\mathcal{D}_\alpha : G(z)f'(z)\in\mathcal{D}_\alpha\}.$$

Απόδειξη. Εξ ορισμού

$$\Gamma_\alpha(f) = \lim_{t\to 0} \frac{T_t(f) - f}{t} \ ,$$

με πεδίο ορισμού το σύνολο

$$D(\Gamma_\alpha) = \{f \in \mathcal{D}_\alpha : \text{το } \lim_{t\to 0} \frac{T_t(f) - f}{t} \text{ υπάρχει στον } \mathcal{D}_\alpha\}.$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$D_1 = \{f \in \mathcal{D}_\alpha : Gf' \in \mathcal{D}_\alpha\}.$$

Για σταθερό σημείο $z \in \mathbb{D}$ και για μία συνάρτηση $f \in \mathcal{D}_\alpha$ ισχύει ότι

$$\lim_{t\to 0} \frac{T_t(f)(z) - f(z)}{t} = \left.\frac{\partial f(\varphi_t(z))}{\partial t}\right|_{t=0} = G(z)f'(z).$$

Επειδή η σύγκλιση στους $\mathcal{D}_\alpha$, λόγω της πρότασης (2.1.1), συνεπάγεται ομοιόμορφη σύγκλιση στα συμπαγή υποσύνολα του δίσκου, προκύπτει ότι $D(\Gamma_\alpha) \subseteq D_1$. Άρα, αν θεωρήσουμε τον

$$\Gamma_1(f)(z) = G(z)f'(z), \quad f \in D_1$$

παρατηρούμε ότι αυτός επεκτείνει τον Γ_α στο σύνολο D_1. Θα δείξουμε ότι ο Γ_α ταυτίζεται με τον Γ_1.

Η περίπτωση που η $\{\varphi_t\}$ είναι τετριμμένη ημιομάδα είναι χωρίς δυσκολία. Έτσι υποθέτουμε ότι ο απειροστικός γεννήτορας $G(z)$ δεν είναι η μηδενική συνάρτηση. Επειδή οι σταθερές συναρτήσεις είναι σταθερά σημεία για κάθε τελεστή T_t, προκύπτει ότι $\|T_t\| \geq 1$ για κάθε $t \geq 0$. Έπεται ότι το φράγμα αυξητικότητας ω_0 ικανοποιεί

$$0 \leq \omega_0 < \infty.$$

Γνωρίζουμε [DS, Theorem VIII.1.11], ότι αν $r > \omega_0$ τότε ο $\Gamma_\alpha - r$ έχει φραγμένο αντίστροφο στον $\mathcal{D}_\alpha$. Ειδικότερα ο $\Gamma_\alpha - r$ είναι επί.

Υποθέτουμε πρώτα ότι η $\{\varphi_t\}$ έχει DW σημείο στο $\partial\mathbb{D}$. Έστω ένα $r > \omega_0$. Θα δείξουμε ότι ο $\Gamma_1 - r$ είναι ένα προς ένα. Ισχύει $\frac{\omega_0+r}{2} > \omega_0$. Αρα, [DS, Theorem VIII.1.5], υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε

$$\|T_t\| \leq M e^{\frac{\omega_0+r}{2}t}, \quad t \geq 0. \tag{2.18}$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μη μηδενική $f \in D_1$ τέτοια ώστε $\Gamma_1(f) = rf$. Από την (1.4)

$$G(z) = \frac{G(0)}{h'(z)} \ ,$$

όπου h η αντίστοιχη αμφιμονότιμη συνάρτηση της $\{\varphi_t\}$. Άρα

$$\frac{G(0)}{h'(z)} f'(z) = rf(z).$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει

$$f(z) = k \exp\left(\frac{r}{G(0)} h(z)\right)$$

όπου $k \in \mathbb{C}$. Άρα, λόγω της (1.5), για κάθε $t \geq 0$

$$f(\varphi_t(z)) = k \exp\left(\frac{r}{G(0)} h(\varphi_t(z))\right) = e^{rt} f(z).$$

Δηλαδή

$$e^{rt}\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq \|T_t\| \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha}.$$

Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα

$$e^{rt} \leq \|T_t\|, \quad t \geq 0,$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την (2.18). Άρα δεν υπάρχει μη μηδενική $f \in D_1$ ώστε να ισχύει $\Gamma_1(f) = rf$. Δηλαδή ο $(\Gamma_1 - r)$

είναι ένα προς ένα και επεκτείνει τον $(\Gamma_\alpha - r)$, ο οποίος είναι ένα προς ένα και επί στους $\mathcal{D}_\alpha$. Άρα $\Gamma_a = \Gamma_1$ και $D(\Gamma_a) = D_1$.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η $\{\varphi_t\}$ έχει DW σημείο $b \in \mathbb{D}$. Έστω ένας μιγαδικός λ και μία $f \in D_1$, όχι η μηδενική συνάρτηση, έτσι ώστε $\Gamma_1(f) = \lambda f$. Από την (1.6), ισχύει

$$G(z) = G'(b)\frac{h(z)}{h'(z)},$$

όπου h η αντίστοιχη αμφιμονότιμη συνάρτηση της $\{\varphi_t\}$. Άρα

$$G'(b)\frac{h(z)}{h'(z)}f'(z) = \lambda f(z). \tag{2.19}$$

Διαλέγουμε r τέτοιο ώστε

$$|b| < r < 1$$

και η f να μην έχει ρίζες στον $|z| = r$. Ολοκληρώνοντας την (2.19) προκύπτει

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{\lambda}{G'(b)}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{h'(z)}{h(z)}dz = \frac{\lambda}{G'(b)}.$$

Από την αρχή του ορίσματος καταλήγουμε ότι το σύνολο των ιδιοτιμών του Γ_1 είναι αριθμήσιμο. Ειδικότερα υπάρχει πραγματικός $r > \omega_0$ τέτοιος ώστε ο $(\Gamma_1 - r)$ να είναι ένα προς ένα. Άρα και στην περίπτωση αυτή $\Gamma_\alpha = \Gamma_1$ και $D(\Gamma_\alpha) = D_1$.

$\square$

Πρόταση 2.2.2. *Αν για κάποιο $0 < \alpha < 1$ η ημιομάδα τελεστών σύνθεσης $\{T_t\}_{t\geq 0}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στον $\mathcal{D}_\alpha$ τότε η $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ είναι η τετριμμένη ημιομάδα.*

Απόδειξη. Αν η $\{T_t\}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής τότε ο Γ_α είναι φραγμένος τελεστής και

$$\|\Gamma_\alpha(f)\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq \|\Gamma_\alpha\|\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha},$$

για κάθε $f \in \mathcal{D}_\alpha$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_k(z) = \frac{z^k}{(\beta_{\alpha,k})^{\frac{1}{2}}}\ , \quad k = 1, 2, ...$$

όπου

$$\beta_{\alpha,k} = \frac{k^2\Gamma(k)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\ .$$

Ισχύει $\|f_k\|_{\mathcal{D}_\alpha} = 1$, επομένως

$$\|\Gamma_\alpha(f_k)\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq \|\Gamma_\alpha\|, \quad k = 1, 2, ...$$

Έστω $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, το ανάπτυγμα Taylor του απειροστικού γεννήτορα της $\{\varphi_t\}$. Τότε

$$\begin{aligned}
\Gamma_\alpha(f_k)(z) &= G(z)f_k'(z) \\
&= \frac{k}{(\beta_{\alpha,k})^{\frac{1}{2}}} z^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\
&= \frac{k}{(\beta_{\alpha,k})^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+k-1} \\
&= \frac{k}{(\beta_{\alpha,k})^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=k-1}^{\infty} a_{n-k+1} z^n
\end{aligned} \tag{2.20}$$

και θα έχουμε

$$\|\Gamma_\alpha(f_k)\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \sim \frac{k^2}{\beta_{\alpha,k}} \sum_{n=k-1}^{\infty} |a_{n-k+1}|^2 (n+1)^{1-\alpha}.$$

Επιπλέον από την (2.3) προκύπτει $\beta_{\alpha,k} \sim k^{1-\alpha}$. Επομένως

$$\|\Gamma_\alpha(f_k)\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \sim \frac{k^2}{k^{1-\alpha}} \sum_{n=k-1}^{\infty} |a_{n-k+1}|^2 (n+1)^{1-\alpha}.$$

Δηλαδή

$$k^{1+\alpha}(|a_0|^2 k^{1-\alpha} + |a_1|^2 (k+1)^{1-\alpha} + |a_2|^2 (k+2)^{1-\alpha} + ...) \leq C\|\Gamma_\alpha\|^2$$

και αυτό ισχύει για $k = 1, 2, ...$. Προφανώς τότε $a_n = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$. Δηλαδή $G \equiv 0$ και η $\{\varphi_t\}$ είναι η τετριμμένη ημιομάδα.

□

Στη συνέχεια περιγράφουμε το σημειακό φάσμα του Γ_α.

Πρόταση 2.2.3. *Έστω $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ ημιομάδα αναλυτικών συναρτήσεων, $G(z)$ ο απειροστικός της γεννήτορας, $h(z)$ η αντίστοιχη αμφιμονότιμη αναλυτική συνάρτηση και $\{T_t\}_{t\geq 0}$ η αντίστοιχη ημιομάδα τελεστών σύνθεσης.*

(i) Αν η $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ έχει DW σημείο $b \in \mathbb{D}$ τότε οι ιδιοτιμές του Γ_α περιέχονται στο σύνολο

$$\{kG'(b) : k = 0, 1, ...\}.$$

Συγκεκριμένα

$$kG'(b) \in \sigma_\pi(\Gamma_\alpha) \Leftrightarrow h^k \in \mathcal{D}_\alpha. \tag{2.21}$$

(ii) Αν η $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ έχει DW σημείο $b \in \partial\mathbb{D}$ τότε

$$\lambda G(0) \in \sigma_\pi(\Gamma_\alpha) \Leftrightarrow e^{\lambda h} \in \mathcal{D}_\alpha. \tag{2.22}$$

Απόδειξη. (i) Έστω ότι το DW σημείο της $\{\varphi_t\}$ βρίσκεται μέσα στο δίσκο. Τότε, λόγω της (2.17) και της (1.6),

$$\Gamma_\alpha(f)(z) = G(z)f'(z) = G(b)\frac{h(z)}{h'(z)}f'(z).$$

Έστω $\mu \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του Γ_a. Εφαρμόζοντας την αρχή του ορίσματος, όπως στην απόδειξη του θεωρήματος (2.2.2), προκύπτει ότι $\mu = kG'(b)$, όπου $k = 0, 1, 2, ...$ Δηλαδή

$$\sigma_\pi(\Gamma_\alpha) \subseteq \{kG'(b) : k = 0, 1, ...\}.$$

Έστω τώρα $f \in \mathcal{D}_\alpha$, μη μηδενική συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$\Gamma_\alpha(f)(z) = kG'(b)f(z).$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$f(z) = ch^k(z),$$

με $c \neq 0$. Από τα παραπάνω προκύπτει η ζητούμενη ισοδυναμία.

(ii) Στην περίπτωση που το DW σημείο της ημιομάδας είναι στο σύνορο, ο απειροστικός γεννήτορας της $\{\varphi_t\}$, λόγω της (1.4), έχει τη μορφή

$$G(z) = \frac{G(0)}{h'(z)} .$$

Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$, η συνάρτηση

$$f(z) = e^{\lambda h(z)} \in \mathcal{D}_\alpha.$$

Τότε

$$\Gamma_\alpha(f)(z) = G(z)f'(z) = \lambda G(0)f.$$

Άρα

$$\lambda G(0) \in \sigma_\pi(\Gamma_a).$$

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι το $\lambda G(0) \in \sigma_\pi(\Gamma_\alpha)$. Έστω $f \in \mathcal{D}_\alpha$, μη μηδενική συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί την

$$\Gamma_\alpha(f)(z) = \lambda G(0) f(z).$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει

$$f'(z) = \lambda h'(z) f(z).$$

Άρα

$$f(z) = c e^{\lambda h(z)},$$

με $c \neq 0$. Έτσι αποδείχθηκε το ζητούμενο.

$\square$

2.3 Μερικά παραδείγματα

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε σε συγκεκριμένα παραδείγματα ημιομάδων $\{\varphi_t\}$ και θα μελετήσουμε τα βασικότερα χαρακτηριστικά των ημιομάδων τελεστών σύνθεσης που εισάγονται από αυτές.

Παράδειγμα 1. Έστω η ημιομάδα

$$\varphi_t(z) = 1 - (1-z)^{e^{-t}}.$$

Αυτή έχει αντίστοιχη αμφιμονότιμη αναλυτική συνάρηση

$$h(z) = \log \frac{1}{1-z} \ ,$$

απειροστικό γεννήτορα

$$G(z) = -(1-z) \log \frac{1}{1-z}$$

και DW σημείο $b = 0$.

Το σημειακό φάσμα του απειροστικού γεννήτορα Γ_α της αντίστοιχης ημιομάδας τελεστών σύνθεσης είναι

$$\sigma_\pi(\Gamma_\alpha) = \{0, -1, -2, ...\}$$

για κάθε $0 < \alpha < 1$. Προς τούτο αρκεί να δείξουμε ότι για την $h(z) = \log \frac{1}{1-z}$ ισχύει

$$h^k(z) \in \mathcal{D}_\alpha, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

για κάθε $0 < \alpha < 1$. Πράγματι, έστω $0 < \alpha < 1$. Από το [Z, Theorem 2.31] έχουμε ότι το ανάπτυγμα Taylor

$$(\log \frac{2}{1-z})^k = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\kappa z^n$$

έχει συντελεστές

$$A_n^\kappa \sim k \frac{\log^{k-1}(n+1)}{n+1}$$

καθώς το $n \to \infty$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \|(\log \frac{2}{1-z})^k\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 &\sim k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log^{2(k-1)}(n+1)}{(n+1)^2} (1+n)^{1-\alpha} \\ &= k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log^{2(k-1)}(n+1)}{(n+1)^{1+\alpha}} < \infty, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$(\log \frac{2}{1-z})^k \in \mathcal{D}_\alpha, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Τώρα επειδή

$$\log \frac{1}{1-z} = \log \frac{2}{1-z} + \log \frac{1}{2}$$

θα έχουμε

$$(\log \frac{1}{1-z})^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\log \frac{1}{2})^{k-j} (\log \frac{2}{1-z})^j,$$

και η γραμμικότητα του χώρου $\mathcal{D}_\alpha$ θα εξασφαλίζει ότι

$$(\log \frac{1}{1-z})^k \in \mathcal{D}_\alpha$$

για κάθε $k = 0, 1, 2, ...$

Μπορούμε επί πλέον να διαπιστώσουμε ότι το φάσμα του Γ_α ταυτίζεται με το σημειακό φάσμα. Προς τούτο θα χρησιμοποιήσουμε ένα αποτέλεσμα των MacCluer και Shapiro, το οποίο διατυπώνουμε προσαρμοσμένο στις δικές μας ανάγκες:

Θεώρημα ([MS]). *Υποθέτουμε ότι $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ είναι αναλυτική και δεν έχει πεπερασμένη γωνιακή παράγωγο σε κανένα σημείο του $\partial\mathbb{D}$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι ο τελεστής σύνθεσης C_φ είναι φραγμένος στο $\mathcal{D}_\gamma$, για κάποιο $\gamma > -1$. Τότε ο C_φ είναι συμπαγής τελεστής στον $\mathcal{D}_\alpha$ για κάθε $\alpha > \gamma$.*

Η γωνιακή παράγωγος μίας $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ στο σημείο $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ λέμε ότι υπάρχει, αν υπάρχει $\eta \in \partial\mathbb{D}$, έτσι ώστε το όριο

$$\lim_{z \to \zeta} \frac{\varphi(z) - \eta}{z - \zeta} ,$$

να υπάρχει σαν πεπερασμένος μιγαδικός αριθμός, καθώς το $z \to \zeta$ μέσα σε κάθε γωνιακό τομέα με κορυφή το ζ και άνοιγμα μικρότερο του π, [SH, σελ. 56].

Στην περίπτωση μας, για κάθε $0 < \beta < 1$, η συνάρτηση

$$\varphi(z) = 1 - (1-z)^\beta$$

είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι δεν έχει γωνιακή παράγωγο σε κανένα σημείο του $\partial\mathbb{D}$ και επιπλέον εισάγει φραγμένο τελεστή σύνθεσης C_φ στο κλασικό χώρο Dirichlet ($\gamma = 0$), καθώς είναι αμφιμονότιμη. Άρα ο C_φ είναι συμπαγής στους $\mathcal{D}_\alpha, 0 < \alpha < 1$.

Επομένως για κάθε $t \geq 0$ ο τελεστής σύνθεσης T_t, που εισάγεται από τη $\varphi_t(z) = 1 - (1 - z)^\beta$, είναι συμπαγής στους $\mathcal{D}_\alpha$. Από τη γενική θεωρία των ημιομάδων έπεται ότι το φάσμα $\sigma(\Gamma_\alpha)$ αποτελείται αποκλειστικά από ιδιοτιμές [P, Corollary 3.7].

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε την ημιομάδα

$$\varphi_t(z) = \frac{e^{-t}z}{1-(1-e^{-t})z}\ ,$$

η οποία έχει αντίστοιχη αμφιμονότιμη συνάρτηση την

$$h(z) = \frac{z}{(1-z)}\ ,$$

απειροστικό γεννήτορα την συνάρτηση

$$G(z) = -z(1-z)$$

και DW σημείο $b = 0$.

Έστω $0 < \alpha < 1$. Αν Γ_α ο απειροστικός γεννήτορας της αντίστοιχης ημιομάδας τελεστών σύνθεσης στον $\mathcal{D}_\alpha$, τότε

$$\Gamma_\alpha(f)(z) = -z(1-z)f'(z).$$

Είναι φανερό από το ανάπτυγμα Taylor της $h(z)^k = \frac{z^k}{(1-z)^k}$ ότι

$$h(z)^k \in \mathcal{D}_\alpha \Leftrightarrow k = 0.$$

Επομένως το σημειακό φάσμα του Γ_α είναι

$$\sigma_\pi(\Gamma_\alpha) = \{0\}.$$

Για τον προσδιορισμό του φάσματος του Γ_α χρειαζόμαστε το παρακάτω

Λήμμα 2.3.1. *Έστω* $0 < \alpha < 1$ *και* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Τότε* $(1-z)^\lambda \in \mathcal{D}_\alpha$ *αν και μόνο αν* $\Re e(\lambda) > -\frac{\alpha}{2}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο λ είναι παραγματικός αριθμός. Αν $\lambda \geq 0$, έπεται άμεσα ότι η $(1-z)^\lambda \in \mathcal{D}_\alpha$. Αν $\lambda < 0$, λόγω του αναπτύγματος

$$\frac{1}{(1-z)^{-\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

όπου $c_n \sim n^{-\lambda-1}$, [;, sel. 53], προκύπτει ότι $\frac{1}{(1-z)^{-\lambda}} \in \mathcal{D}_\alpha$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 (1+n)^{1-\alpha} \sim \sum_{n=0}^{\infty} n^{-(2\lambda+1+\alpha)} < \infty, \tag{2.23}$$

δηλαδή αν και μόνο αν $\lambda > -\frac{\alpha}{2}$.

Στην περίπτωση που ο $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} |((1-z)^\lambda)'|^2 (1-|z|^2)^\alpha dm(z) = \\
&\quad = |\lambda|^2 \int_{\mathbb{D}} |(1-z)^{\lambda-1}|^2 (1-|z|^2)^\alpha dm(z) \\
&\quad = |\lambda|^2 \int_{\mathbb{D}} e^{2\Re e\{(\lambda-1)\log(1-z)\}} (1-|z|^2)^\alpha dm(z) \\
&\quad = |\lambda|^2 \int_{\mathbb{D}} e^{2(\lambda_1-1)\log|1-z|} e^{-2\lambda_2 Arg(1-z)} (1-|z|^2)^\alpha dm(z) \\
&\quad \sim \int_{\mathbb{D}} |(1-z)^{\lambda_1-1}|^2 (1-|z|^2)^\alpha dm(z)
\end{aligned}$$

γιατί για κάθε πραγματικό αριθμό λ_2 υπάρχουν θετικές σταθερές C_1, C_2, ανεξάρτητες του z, έτσι ώστε

$$C_1 < e^{-2\lambda_2 Arg(1-z)} < C_2$$

για κάθε $z \in \mathbb{D}$. Άρα η $(1-z)^\lambda \in \mathcal{D}_\alpha$ αν και μόνο αν η $(1-z)^{\lambda_1} \in \mathcal{D}_\alpha$, δηλαδή αν και μόνο αν $\lambda_1 > -\frac{\alpha}{2}$.

$\square$

Χρησιμοποιώντας μέθοδο όμοια με αυτή του [Si2], είμαστε σε θέση να βρούμε περισσότερες πληροφορίες για το $\sigma(\Gamma_\alpha)$. Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathcal{R}e(\lambda) \leq -\frac{\alpha}{2}$. Θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$P_n(z) = 1 + \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} \frac{\lambda(-1)^m}{m} z^m$$

και τις συναρτήσεις

$$f_{n,\lambda}(z) = (1-z)^\lambda e^{P_n(z)}. \tag{2.24}$$

Παραγωγίζοντας προκύπτει

$$f'_{n,\lambda}(z) = (1-z)^{\lambda-1} e^{P_n(z)} (P'_n(z)(1-z) - \lambda).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
&(\lambda - \Gamma_\alpha)(f_{n,\lambda})(z) \\
&\quad = \lambda f_{n,\lambda}(z) + z(1-z) f'_{n,\lambda}(z) \\
&\quad = (1-z)^\lambda \left[\lambda e^{P_n(z)} + z e^{P_n(z)} P'_n(z)(1-z) - \lambda z e^{P_n(z)}\right] \\
&\quad = (1-z)^{\lambda+1} e^{P_n(z)} (\lambda + z P'_n(z)).
\end{aligned}$$

Επίσης ελέγχουμε ότι

$$(\lambda + z P'_n(z)) = \lambda + z \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} \lambda \frac{(-1)^m}{m} m z^{m-1} = \lambda(1-z)^n.$$

Άρα

$$(\lambda - \Gamma_\alpha)(f_{n,\lambda}) = \lambda f_{n,n+\lambda+1},$$

δηλαδή η διαφορική εξίσωση

$$(\lambda - \Gamma_\alpha)(y) = \lambda f_{n,n+\lambda+1}$$

έχει λύση στο δίσκο την $f_{n,\lambda}$, η οποία είναι μοναδική. Αν διαλέξουμε φυσικό n τέτοιο ώστε

$$\mathcal{R}e(n+\lambda+1) > -\frac{\alpha}{2}$$

τότε

$$f_{n,n+\lambda+1} \in \mathcal{D}_\alpha.$$

Αν υποθέσουμε ότι το $\lambda \in \rho(\Gamma_\alpha)$, τότε ο αντίστροφος $(\lambda - \Gamma_\alpha)^{-1}$ υπάρχει. Άρα

$$f_{n,\lambda} = (\lambda - \Gamma_\alpha)^{-1}(f_{n,n+\lambda+1}) \in \mathcal{D}_\alpha$$

γιατί έχουμε υποθέσει ότι $\mathcal{R}e(\lambda) \leq -\frac{\alpha}{2}$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι, όταν $0 < \alpha < 1$, έχουμε

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(\lambda) \leq -\frac{\alpha}{2}\} \subseteq \sigma(\Gamma_\alpha). \tag{2.25}$$

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ποιό ακριβώς είναι το φάσμα του Γ_α.

Παράδειγμα 3. Θεωρούμε την ημιομάδα αυτομορφισμών

$$\varphi_t(z) = \frac{(e^t+1)z + e^t - 1}{(e^t-1)z + e^t + 1}, \quad t \geq 0 \ ,$$

με αντίστοιχη αμφιμονότιμη συνάρτηση

$$h(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z} \ ,$$

απειροστικό γεννήτορα

$$G(z) = \frac{1}{2}(1-z^2) \ ,$$

και DW σημείο $b = 1$. Η αντίστοιχη ημιομάδα τελεστών σύνθεσης

$$T_t(f) = f \circ \varphi_t,$$

λόγω της (2.4) ικανοποιεί

$$\|T_t\|_{\mathcal{D}_\alpha \to \mathcal{D}_\alpha} \leq K\alpha^{-1/2} e^{\frac{\alpha}{2}t},$$

επομένως έχει φραγμα αυξητικότητας

$$\omega_0 \leq \frac{\alpha}{2} \ .$$

Εξ άλλου, είναι εύκολο να δούμε, όπως στο Παράδειγμα 2, ότι

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\lambda \in \mathcal{D}_\alpha \Leftrightarrow -\frac{\alpha}{2} < \mathcal{R}e(\lambda) < \frac{\alpha}{2}$$

συνεπώς το σημειακό φάσμα του απειροστικού γεννήτορα Γ_α ευρίσκεται

$$\begin{aligned}
\sigma_\pi(\Gamma_\alpha) &= \{\lambda G(0) : e^{\lambda h(z)} \in \mathcal{D}_\alpha\} \\
&= \left\{\frac{\lambda}{2} : \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \in \mathcal{D}_\alpha\right\} \\
&= \{\lambda : -\frac{\alpha}{2} < \mathcal{R}e(\lambda) < \frac{\alpha}{2}\}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\omega_0 = \frac{\alpha}{2}$ και

$$\sigma(\Gamma_\alpha) \subseteq \{z : \mathcal{R}e(z) \leq \frac{\alpha}{2}\}.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι ο $-\Gamma_\alpha$ είναι ο απειροστικός γεννήτορας της

$$S_t(f) = f \circ \psi_t$$

όπου

$$\psi_t(z) = \varphi_t^{-1}(z) = \varphi_{-t}(z),$$

και έχομε την περίπτωση ομάδας τελεστών. Η $\{\psi_t\}$ έχει DW σημείο $b = -1$, αντίστοιχη αμφιμονότιμη συνάρτηση

$$h_\psi(z) = -\frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z},$$

και απειροστικό γεννήτορα

$$G_\psi(z) = -\frac{1}{2}(1-z^2).$$

Το φράγμα αυξητικότητας της $\{S_t\}$ υπολογίζεται όπως προηγουμένως και είναι $\omega_0^\psi = \frac{\alpha}{2}$ επομένως

$$\sigma(-\Gamma_\alpha) \subseteq \{z : \mathcal{R}e(z) \leq \frac{\alpha}{2}\}$$

Συγκρίνοντας με την αντίστοιχη σχέση για τον Γ_α βρίσκουμε

$$\sigma(\Gamma_\alpha) = \overline{\sigma_\pi(\Gamma_\alpha)} = \{z : -\frac{\alpha}{2} \leq \mathcal{R}e(z) \leq \frac{\alpha}{2}\}.$$

Κεφάλαιο 3

Ο τελεστής Cesàro στους χώρους Dirichlet

3.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, ο μετασχηματισμός Cesàro ορίζεται για αναλυτικές συναρτήσεις $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(f)(z) &= \frac{1}{z}\int_0^z f(\zeta)\frac{1}{1-\zeta}d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k\right)z^n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Είναι γνωστό ότι ο περιορισμός του $\mathcal{C}$ στους χώρους H^p, $0 < p < \infty$, είναι φραγμένος τελεστής [Si2], [M], καθώς επίσης και στους χώρους Bergman A^p [Si4]. Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε ότι ο $\mathcal{C}$ είναι φραγμένος τελεστής στους σταθμισμένους χώρους Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ο $\mathcal{C}$ είναι φραγμένος στον $\mathcal{D}_1 = H^2$ και είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι δεν είναι φραγμένος στον $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$, διότι για την σταθερή συνάρτηση $f(z) \equiv 1 \in \mathcal{D}$,

$$\mathcal{C}(f)(z) = \frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z} \notin \mathcal{D}.$$

Είναι γνωστό ότι ο $\mathcal{C}$ συνδέεται με την σταθμισμένη ημιομάδα τελεστών σύνθεσης

$$S_t(f)(z) = \frac{\varphi_t(z)}{z} f(\varphi_t(z)) \tag{3.2}$$

όπου

$$\varphi_t(z) = \frac{e^{-t}z}{1-(1-e^{-t})z} \ ,$$

είναι η ημιομάδα αναλυτικών συναρτήσεων του δίσκου, του παραδείγματος 2, του προηγούμενου κεφαλαίου. Η ημιομάδα $\{S_t\}$ χρησιμοποιήθηκε για την μελέτη του $\mathcal{C}$ στους χώρους Hardy [Si2] και στους χώρους Bergman [Si4]. Η χρήση της $\{S_t\}$ στην μελέτη του $\mathcal{C}$ βασίζεται στο γεγονός ότι ο $-\mathcal{C}$ είναι ο αντίστροφος του απειροστικού γεννήτορα της $\{S_t\}$. Χρησιμοποιούμε εδώ την ίδια μέθοδο της [Si2] για την απόδειξη ότι ο $\mathcal{C}$ είναι φραγμένος στους $\mathcal{D}_\alpha$.

3.2 Ο $\mathcal{C}$ είναι φραγμένος στους $\mathcal{D}_\alpha$.

Πρώτα θα δείξουμε ότι

Λήμμα 3.2.1. *Έστω $0 < \alpha < 1$. Για κάθε $t \geq 0$*

$$\|S_t\|_{\mathcal{D}_\alpha \to \mathcal{D}_\alpha} \leq K \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2}t}(t+1)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3}$$

όπου K θετική σταθερά ανεξάρτητη του α.

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{D}_\alpha$. Γράφουμε

$$w_t(z) = \frac{\varphi_t(z)}{z}.$$

Έτσι

$$\|S_t(f)\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} = |S_t(f)(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |(w_t(z)f(\varphi_t(z)))'|^2(1-|z|^2)^\alpha dm(z).$$

Για την εκτίμηση του ολοκληρώματος έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} &|(w_t(z)f(\varphi_t(z)))'|^2(1-|z|^2)^\alpha dm(z)\\ &\leq 2\int_{\mathbb{D}} |w_t'(z)f(\varphi_t(z))|^2(1-|z|^2)^\alpha dm(z)\\ &\quad + 2\int_{\mathbb{D}} |w_t(z)(f(\varphi_t(z))'|^2(1-|z|^2)^\alpha dm(z)\\ &= 2\mathbb{I}_1 + 2\mathbb{I}_2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Τώρα λόγω της (2.1)

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_1 &= \int_{\mathbb{D}} \left|\frac{e^{-t}(1-e^{-t})}{(1-(1-e^{-t})z)^2}\right|^2 |f(\varphi_t(z))|^2(1-|z|^2)^\alpha dm(z)\\ &\leq \frac{K}{\alpha}\int_{\mathbb{D}} \frac{e^{-2t}(1-e^{-t})^2}{|1-(1-e^{-t})z|^4}\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_t(z)|}\right)^\alpha dm(z)\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}\\ &\leq \frac{K2^\alpha}{\alpha}\int_{\mathbb{D}} \frac{e^{-2t}(1-e^{-t})^2}{|1-(1-e^{-t})z|^4}\left(\frac{1-|z|}{1-|\varphi_t(z)|}\right)^\alpha dm(z)\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}\end{aligned}$$

Αλλά για κάθε $z \in \mathbb{D}$ και $t \geq 0$ ισχύει

$$\left(\frac{1-|z|}{1-|\varphi_t(z)|}\right)^\alpha \leq |1-(1-e^{-t})z|^\alpha \tag{3.5}$$

οπότε το ολοκλήρωμα της τελευταίας ανισότητας γίνεται

$$\begin{aligned}&\leq \int_{\mathbb{D}} \frac{e^{-2t}(1-e^{-t})^2}{|1-(1-e^{-t})z|^4}|1-(1-e^{-t})z|^\alpha dm(z)\\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{e^{-2t}(1-e^{-t})^2}{|1-(1-e^{-t})z|^{2-\alpha}}\frac{1}{|1-(1-e^{-t})z|^2}dm(z)\end{aligned}$$

Όμως
$$|1-(1-e^{-t})z| \geq e^{-t}$$
συνεπώς
$$\begin{aligned}\frac{e^{-2t}(1-e^{-t})^2}{|1-(1-e^{-t})z|^{2-\alpha}} &\leq e^{-2t}(1-e^{-t})^2 e^{(2-\alpha)t} \\ &= e^{-\alpha t}(1-e^{-t})^2 \qquad (3.6)\end{aligned}$$
και θα έχουμε
$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}} \frac{e^{-2t}(1-e^{-t})^2}{|1-(1-e^{-t})z|^{2-\alpha}} \frac{1}{|1-(1-e^{-t})z|^2}\, dm(z) \\ &\qquad \leq e^{-\alpha t}(1-e^{-t})^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-(1-e^{-t})z|^2}\, dm(z).\end{aligned}$$
Αναπτύσσοντας σε σειρά
$$\frac{1}{1-(1-e^{-t})z} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-e^{-t})^n z^n$$
βρίσκουμε
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-(1-e^{-t})z|^2}\, dm(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^{2n}}{n+1} \\ &= \frac{1}{(1-e^{-t})^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^{2(n+1)}}{n+1} \\ &= \frac{1}{(1-e^{-t})^2} \log \frac{1}{1-(1-e^{-t})^2} \\ &= \frac{1}{(1-e^{-t})^2} \log \frac{1}{e^{-t}(1-e^{-t})} \\ &\leq \frac{1}{(1-e^{-t})^2} \log e^{t} \\ &= \frac{t}{(1-e^{-t})^2}\end{aligned}$$

Άρα για το $\mathbb{I}_1$ έχουμε συνολικά

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_1 &\leq \frac{K2^\alpha}{\alpha} e^{-\alpha t}(1-e^{-t})^2 \frac{t}{(1-e^{-t})^2} \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \\ &= \frac{K'}{\alpha} t e^{-\alpha t} \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Για την εκτίμηση του ολοκληρώματος $\mathbb{I}_2$ χρειαζόμαστε την ακόλουθη ανισότητα, που προκύπτει από την (3.5),

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)^\alpha &= \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_t(z)|^2}\right)^\alpha (1-|\varphi_t(z)|^2)^\alpha \\ &= \left(\frac{1+|z|}{1+|\varphi_t(z)|}\right)^\alpha \left(\frac{1-|z|}{1-|\varphi_t(z)|}\right)^\alpha (1-|\varphi_t(z)|^2)^\alpha \\ &\leq 2^\alpha \left(\frac{1-|z|}{1-|\varphi_t(z)|}\right)^\alpha (1-|\varphi_t(z)|^2)^\alpha \\ &\leq 2^\alpha |1-(1-e^{-t})z|^\alpha (1-|\varphi_t(z)|^2)^\alpha.\end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα $\mathbb{I}_2$ γίνεται

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_2 &\leq 2^\alpha \int_{\mathbb{D}} |w_t(z)|^2 |(f(\varphi_t(z)))'|^2 |1-(1-e^{-t})z|^\alpha (1-|\varphi_t(z)|^2)^\alpha dm(z) \\ &= 2^\alpha \int_{\mathbb{D}} \frac{e^{-2t}}{|1-(1-e^{-t})z|^{2-\alpha}} |f'(\varphi_t(z))|^2 |\varphi_t'(z)|^2 (1-|\varphi_t(z)|^2)^\alpha dm(z) \\ &\leq 2^\alpha e^{-\alpha t} \int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi_t(z))|^2 |\varphi_t'(z)|^2 (1-|\varphi_t(z)|^2)^\alpha dm(z)\end{aligned}$$

(με αλλαγή μεταβλητής)

$$\begin{aligned}&\leq 2^\alpha e^{-\alpha t} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1-|z|^2)^\alpha dm(z) \\ &\leq 2e^{-\alpha t} \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}. \qquad (3.8)\end{aligned}$$

Επιπλέον, αφού $0 < \alpha < 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} |S_t(f)(0)|^2 &\leq e^{-2t}|f(0)|^2 \\ &\leq e^{-2\alpha t}\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Συνδιάζοντας τις (3.4),(3.7),(3.8),(3.9), καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned} \|S_t(f)\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} &\leq e^{-2\alpha t}\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} + 2\frac{K'}{\alpha}e^{-\alpha t}t\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} + 4e^{-\alpha t}\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \\ &\leq \frac{K''}{\alpha}e^{-\alpha t}(t+1)\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}, \end{aligned}$$

όπου K'' θετική σταθερά ανεξάρτητη του α.

□

Πρόταση 3.2.1. *Έστω $0 < \alpha < 1$. Η σταθμισμένη ημιομάδα τελεστών $\{S_t\}_{t\geq 0}$ είναι ισχυρά συνεχής στον $\mathcal{D}_\alpha$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ισοδύναμη έκφραση για την νόρμα του $\mathcal{D}_\alpha$, και λόγω του θωρήματος του κλειστού γραφήματος, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ο τελεστής πολλαπλασιασμού

$$M_z : f(z) \to zf(z)$$

είναι φραγμένος στον $\mathcal{D}_\alpha$. Με ανάλογο επιχείρημα διαπιστώνεται ότι αν $f \in \mathcal{D}_\alpha$ και $f(0) = 0$ τότε $\frac{f(z)}{z} \in \mathcal{D}_\alpha$ και υπάρχει σταθερά C_α ώστε

$$\|\frac{f(z)}{z}\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq C_\alpha\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha}$$

Για $t, s \geq 0$ και $f \in \mathcal{D}_\alpha$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|S_t(f) - S_s(f)\|_{\mathcal{D}_\alpha} &= \|\frac{\varphi_t f(\varphi_t) - \varphi_s f(\varphi_s)}{z}\|_{\mathcal{D}_\alpha} \\ &\leq C_\alpha\|\varphi_t f(\varphi_t) - \varphi_s f(\varphi_s)\|_{\mathcal{D}_\alpha} \\ &= C_\alpha\|T_t(M_z(f)) - T_s(M_z(f))\|_{\mathcal{D}_\alpha} \end{aligned}$$

όπου T_t, T_s οι αντίστοιχοι μη σταθμισμένοι τελεστές σύνθεσης. Από την ισχυρή συνέχεια της ημιομάδας $\{T_t\}$ έπεται το ζητούμενο.

$\square$

Ο απειροστικός γεννήτορας της σταθμισμένης ημιομάδας $\{S_t\}$ προκύπτει, με μέθοδο ανάλογη για τις μη σταθμισμένες ημιομάδες (θεώρημα 2.2.2), ότι είναι ο τελεστής

$$\Delta_\alpha(f)(z) = -(1-z)(zf(z))',$$

με πεδίο ορισμού

$$D(\Delta_\alpha) = \{f \in \mathcal{D}_\alpha : \ (1-z)(zf(z))' \in \mathcal{D}_\alpha\}.$$

Από τη μορφή του απειροστικού γεννήτορα συμπεραίνουμε ότι η $\{S_t\}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στον $\mathcal{D}_\alpha$. Πράγματι ο Δ_α μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned}\Delta_\alpha(f)(z) &= -z(1-z)f'(z) - (1-z)f(z)\\ &= \Gamma_\alpha(f)(z) - M_{1-z}(f)(z)\end{aligned}$$

όπου Γ_α ο απειροστικός γεννήτορας της αντίστοιχης μη σταθμισμένης ημιομάδας

$$T_t : f \to f \circ \varphi_t$$

και M_{1-z} ο τελεστής πολλαπλασιασμού $f(z) \to (1-z)f(z)$. Επειδή ο Γ_α είναι μη φραγμένος τελεστής (Πρόταση 2.2.2), ενώ ο M_{1-z} είναι φραγμένος στον $\mathcal{D}_\alpha$, έπεται ότι ο Δ_α είναι μη φραγμένος. Συνεπώς η $\{S_t\}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπενθυμίζουμε ότι αν Γ_α όπως παραπάνω, τότε από το Παράδειγμα 2 του προηγούμενου κεφαλαίου έχουμε

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(\lambda) \leq -\frac{\alpha}{2}\} \cup \{0\} \subseteq \sigma(\Gamma_\alpha). \tag{3.10}$$

Η επόμενη πρόταση προσδιορίζει επακριβώς τα φάσματα των Γ_α και Δ_α.

Πρόταση 3.2.2. *Έστω* $0 < \alpha < 1$. *Έστω επίσης* Δ_α *ο απειροστικός γεννήτορας της σταθμισμένης ημιομάδας τελεστών σύνθεσης* $\{S_t\}_{t\geq 0}$ *και* Γ_α *ο απειροστικός γεννήτορας της αντίστοιχης μη σταθμισμένης ημιομάδας. Τότε*

$$\sigma(\Delta_\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(\lambda) \leq -\frac{\alpha}{2}\}. \tag{3.11}$$

και

$$\sigma(\Gamma_\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(\lambda) \leq -\frac{\alpha}{2}\} \cup \{0\}.$$

Απόδειξη. Από την (3.3), για το φράγμα αυξητικότητας της $\{S_t\}$, προκύπτει

$$\omega_0 \leq -\frac{\alpha}{2} \ .$$

Άρα

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(\lambda) > -\frac{\alpha}{2}\} \subset \rho(\Delta_\alpha).$$

Σαν συνέπεια αυτού και της (3.10) έπεται

$$\sigma(\Delta_\alpha) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(\lambda) \leq -\frac{\alpha}{2}\} \subseteq \sigma(\Gamma_\alpha). \tag{3.12}$$

Επίσης, για κάθε $g \in \mathcal{D}_\alpha$ ισχύει $\frac{g(z)-g(0)}{z} \in \mathcal{D}_\alpha$. Αν διαλέξουμε ένα $\lambda \in \rho(\Delta_\alpha)$, όχι το μηδέν, υπάρχει μοναδική συνάρτηση $l_1(z) \in D(\Delta_\alpha)$, τέτοια ώστε

$$(\lambda - \Delta_\alpha)(l_1(z)) = \frac{g(z) - g(0)}{z} \ .$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$l(z) = zl_1(z) + \frac{g(0)}{\lambda} \in \mathcal{D}_\alpha.$$

Λόγω της ισότητας

$$z\Delta_\alpha(f)(z) = \Gamma_\alpha(zf)$$

ισχύει

$$\begin{aligned}(\lambda-\Gamma_\alpha)(l(z)) &= (\lambda-\Gamma_\alpha)(zl_1(z))+g(0)\\ &= z(\lambda-\Delta_\alpha)(l_1(z))+g(0)\\ &= g(z).\end{aligned}$$

Δηλαδή το $\lambda \in \rho(\Gamma_\alpha)$. Άρα

$$\sigma(\Gamma_\alpha)-\{0\} \subseteq \sigma(\Delta_\alpha).$$

Από τη τελευταία σχέση και τις (3.10), (3.12), καταλήγουμε ότι

$$\sigma(\Delta_\alpha)=\{\lambda\in\mathbb{C} : \mathcal{R}e(\lambda)\leq -\frac{\alpha}{2}\},$$

και

$$\sigma(\Gamma_\alpha)=\{\lambda\in\mathbb{C} : \mathcal{R}e(\lambda)\leq -\frac{\alpha}{2}\}\cup\{0\}.$$

□

Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι

$$0\in\rho(\Delta_\alpha)$$

και επομένως ο επιλύων τελεστής

$$R(0,\Delta_\alpha):\mathcal{D}_\alpha\to\mathcal{D}_\alpha$$

είναι φραγμένος. Για $f\in\mathcal{D}_\alpha$, η συνάρτηση

$$g=R(0,\Delta_\alpha)(f)=(-\Delta_\alpha)^{-1}(f)$$

λαμβάνεται ως η αναλυτική στο $\mathbb{D}$ λύση της

$$\Delta_\alpha(g)=-f.$$

Ισοδύναμα

$$(1-z)(zg(z))'=f(z),$$

και έτσι βρίσκουμε

$$g(z) = \frac{1}{z}\int_0^z f(\zeta)\frac{1}{1-\zeta}\,d\zeta.$$

Δηλαδή ο επιλύων τελεστής του απειροστικού γεννήτορα της $\{S_t\}$ στο $\lambda = 0$ είναι ο τελεστής Cesàro. Έπεται άμεσα ότι ο $\mathcal{C}$ είναι φραγμένος στον $\mathcal{D}_\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Η επόμενη πρόταση δίνει επιπλέον μία εκτίμηση της νόρμας και επίσης το φάσμα του $\mathcal{C}$. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathcal{C}_\alpha$ για τον $\mathcal{C}$ στον χώρο $\mathcal{D}_\alpha$.

Πρόταση 3.2.3. *Έστω $0 < \alpha < 1$. Τότε*

$$\frac{2}{\alpha} \leq \|\mathcal{C}_\alpha\| \leq \frac{B}{\alpha^2} \tag{3.13}$$

όπου $B > 0$ σταθερά ανεξάρτητη του α. Επίσης

$$\sigma(\mathcal{C}_\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \frac{1}{\alpha}| \leq \frac{1}{\alpha}\}. \tag{3.14}$$

Απόδειξη. Συμφωνα με το φασματικό θεώρημα [DS] και την (3.11)

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{C}_\alpha) &= \{-\frac{1}{z} : z \in \sigma(\Delta_\alpha)\}\\ &= \{-\frac{1}{z} : \mathcal{R}e(z) \leq -\frac{\alpha}{2}\}\\ &= \{\lambda : |\lambda - \frac{1}{\alpha}| \leq \frac{1}{\alpha}\}\end{aligned}$$

και αποδείχθηκε ο ισχυρισμός για το φάσμα.

Για την εκτίμηση της νόρμας, έπεται άμεσα ότι

$$\|\mathcal{C}_\alpha\| \geq \sup_{\lambda\in\sigma(\mathcal{C}_\alpha)}|\lambda| = \frac{2}{\alpha}, \tag{3.15}$$

δηλαδή η αριστερή ανισότητα. Για την άλλη ανισότητα χρησμοποιούμε την αναπαράσταση του $\mathcal{C}_\alpha = R(0, \Delta_\alpha)$ ως μετασχηματισμού Laplace της αντίστοιχης ημιομάδας

$$\mathcal{C}_\alpha(f)(z) = \int_0^\infty S_t(f)(z)dt.$$

Επειδή $\mathcal{C}_\alpha(f)(0) = f(0)$,

$$\|\mathcal{C}_\alpha(f)\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{C}_\alpha(f)'(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha dm(z).$$

Για το ολοκλήρωμα, από την γενικευμένη ανισότητα Minkowski [WZ, σελ.143], έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} \left| \int_0^\infty S_t(f)'(z)\, dt \right|^2 (1-|z|^2)^\alpha dm(z) \\
&\quad \le \left[\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{D}} |S_t(f)'(z)|^2 (1-|z|^2)^\alpha dm(z) \right)^{\frac{1}{2}} dt \right]^2 \\
&\quad \le \left(\int_0^\infty \|S_t(f)\|_{\mathcal{D}_\alpha} dt \right)^2 \\
&\quad \le K^2 \left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{2}t}(t+1)^{\frac{1}{2}} dt \right)^2 \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \\
&\quad \le K' \left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{2}u} u^{\frac{1}{2}} du \right)^2 \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \\
&\quad = K' \left(\frac{1}{\alpha}\right) \left[\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{1}{2}} ds \right]^2 \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \\
&\quad \le K' \left(\frac{2}{\alpha}\right)^4 \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2 \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}.
\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει

$$\begin{aligned}\|\mathcal{C}_\alpha(f)\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} &\le |f(0)|^2 + K'(\frac{2}{\alpha})^4\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \\ &\le \frac{B}{\alpha^4}\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Συνδιάζοντας τις (3.15) και (3.16) προκύπτει η (3.13).

□

3.3 Ο συγγενής τελεστής $\mathcal{A}$.

Θα προχωρήσουμε τώρα στη μελέτη του μετασχηματισμού $\mathcal{A}$, που ορίζεται ως

$$\mathcal{A}(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}\right)z^n \tag{3.17}$$

όπου $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Ο μετασχηματισμός αυτός σχετίζεται άμεσα με τον τελεστή Cesàro $\mathcal{C}$, διότι ο πίνακας που αντιστοιχεί στον $\mathcal{A}$ στον χώρο Hardy H^2 είναι ο ανάστροφος του αντίστοιχου πίνακα για τον $\mathcal{C}$. Στην περίπτωση μάλιστα του H^2 ο $\mathcal{A}$ είναι ο συζυγής τελεστής (με την έννοια της συζυγίας σε χώρους Hilbert) του $\mathcal{C}$.

Στην γενική περίπτωση μιας αναλυτικής συνάρτησης f, η σειρά στην (3.17) δεν είναι καλώς ορισμένη διότι η εσωτερική σειρά που δίνει τους συντελεστές Taylor ενδέχεται να μη συγκλίνει. Αν όμως υποθέσουμε ότι $f \in \mathcal{D}_\alpha$ για κάποιο $0 < \alpha < 1$, τότε με τη βοήθεια της ανισότητας Hardy([DU, σελ. 48])

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|}{n+1} \le \pi\|f\|_{H^1}, \tag{3.18}$$

η οποία ισχύει για συναρτήσεις $f \in H^1$, και από την παρατήρηση ότι $0 < \alpha < 1$ έχουμε

$$\mathcal{D}_\alpha \subset H^2 \subset H^1,$$

συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία των συντελεστών που εμφανίζονται στη σειρά (3.17) είναι φραγμένη, επομένως η (3.17) ορίζει αναλυτική συνάρτηση στο δίσκο.

Ο μετασχηματισμός $\mathcal{A}$ μπορεί να γραφεί ως ολοκλήρωμα

$$\mathcal{A}(f)(z) = \frac{1}{z-1}\int_1^z f(\zeta)d\zeta \tag{3.19}$$

υπό την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση f είναι "αρκετά καλή" ώστε να είναι ολοκληρώσιμη πάνω σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα $[1, z]$, $z \in \mathbb{D}$. Τέτοιες συναρτήσεις είναι όλες οι συναρτήσεις του χώρου Hardy H^1, λόγω της ανισότητας Fejer-Riesz [DU, Theorem 3.13]. Για τέτοιες συναρτήσεις, επιλέγοντας σαν καμπύλη ολοκλήρωσης την

$$\gamma(t) = tz + (1-t), \quad 0 \le t \le 1,$$

και χρησιμοποιόντας το θεώρημα κυριαρχούμενης σύγκλισης για σειρές, για την δικαιολόγηση της εναλλαγής του αθροίσματος με το ολοκλήρωμα, έχομε την (3.19).

Ο τελεστής $\mathcal{A}$ είναι φραγμένος στους χώρους H^p, $1 < p < \infty$ [Si2], και Bergman A^p, $2 < p < \infty$ [Si3], και η μελέτη του στις παραπάνω εργασίες βασίστηκε στη σχέση του $\mathcal{A}$ με μία ημιομάδα τελεστών σύνθεσης. Θα χρησιμοποιήσουμε εδώ την ίδια μέθοδο για να μελετήσουμε τον $\mathcal{A}$ στους $\mathcal{D}_\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Θεωρούμε την ημιομάδα

$$\psi_t(z) = e^{-t}z + 1 - e^{-t},$$

η οποία έχει αντίστοιχη αμφιμονότιμη συνάρτηση

$$h(z) = \log\frac{1}{1-z} ,$$

απειροστικό γεννήτορα

$$G(z) = 1 - z$$

και DW σημείο $b = 1$. Θεωρούμε επίσης την ημιομάδα τελεστών σύνθεσης

$$T_t(f) = f \circ \psi_t.$$

Από την (2.4) έπεται ότι, για κάθε $t \geq 0$

$$\|T_t\|_{\mathcal{D}_\alpha \to \mathcal{D}_\alpha} \leq K\alpha^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2}t}, \tag{3.20}$$

όπου $K > 0$ σταθερά. Επίσης από το θεώρημα (2.2.1) η $\{T_t\}$ είναι ισχυρά συνεχής στον $\mathcal{D}_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, και έχει απειροστικό γεννήτορα

$$\Gamma_\alpha(f)(z) = (1 - z)f'(z).$$

Από την (3.20) έπεται ότι η $\{T_t\}$ έχει φράγμα αυξητικότητας

$$\omega_0 \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Επομένως

$$\{\lambda : \mathcal{R}e(\lambda) > \frac{\alpha}{2}\} \subset \rho(\Gamma_\alpha). \tag{3.21}$$

Εξ άλλου για το σημειακό φάσμα του Γ_α, σύμφωνα με την (2.22), ισχύει

$$\begin{aligned} \sigma_\pi(\Gamma_a) &= \{\lambda G(0) \in \mathbb{C} : e^{\lambda h(z)} \in \mathcal{D}_\alpha\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (1 - z)^{-\lambda} \in \mathcal{D}_\alpha\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(\lambda) < \frac{\alpha}{2}\}. \end{aligned}$$

Σε συνδιασμό με την (3.21) συμπεραίνουμε

$$\sigma(\Gamma_\alpha) = \overline{\sigma_\pi(\Gamma_\alpha)} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(\lambda) \leq \frac{\alpha}{2}\}. \tag{3.22}$$

Θεωρούμε τώρα τη σταθμισμένη ημιομάδα

$$S_t(f)(z) = e^{-t} f(\psi_t(z)), \quad f \in \mathcal{D}_\alpha.$$

Άμεσα προκύπτει ότι, για κάθε $t \geq 0$,

$$\|S_t\|_{\mathcal{D}_\alpha \to \mathcal{D}_\alpha} \leq K\alpha^{-\frac{1}{2}} e^{(\frac{\alpha}{2}-1)t}. \tag{3.23}$$

και ότι η $\{S_t\}$ είναι ισχυρά συνεχής στον $\mathcal{D}_\alpha$. Ο απειροστικός γεννήτοράς είναι

$$\Delta_\alpha(f)(z) = (1-z)f'(z) - f(z).$$

Παρατηρούμε ότι γιά $\lambda \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$\lambda - \Delta_\alpha = (\lambda + 1) - \Gamma_\alpha.$$

Άρα από την (3.22) βρίσκουμε

$$\sigma(\Delta_\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(\lambda) \leq \frac{\alpha}{2} - 1\}. \tag{3.24}$$

Έπεται ότι $0 \in \rho(\Delta_\alpha)$ και με ένα απλό υπολογισμό βρίσκουμε

$$R(0, \Delta_\alpha) = \mathcal{A}.$$

Επομένως ο $\mathcal{A}$ είναι φραγμένος τελεστής στον $\mathcal{D}_\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Η επόμενη πρόταση δίνει εκτίμηση της νόρμας και επίσης το φάσμα του $\mathcal{A}$.

Πρόταση 3.3.1. *Έστω $0 < \alpha < 1$ και $\mathcal{A}_\alpha$ ο τελεστής $\mathcal{A}$ στον $\mathcal{D}_\alpha$. Τότε*

$$\frac{2}{2-\alpha} \leq \|\mathcal{A}_\alpha\| \leq \frac{\Lambda}{\alpha^{\frac{1}{2}}(2-\alpha)}$$

όπου $\Lambda > 0$ σταθερά ανεξάρτητη του α. Επίσης

$$\sigma(\mathcal{A}_\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \frac{1}{2-\alpha}| \leq \frac{1}{2-\alpha}\}.$$

Απόδειξη. Από την (3.24) και το φασματικό θεώρημα [DS]

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{A}_\alpha) &= \{-\frac{1}{z} : z \in \sigma(\Delta_\alpha)\} \\ &= \{-\frac{1}{z} : \Re e(z) \leq \frac{\alpha}{2} - 1\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \frac{1}{2-\alpha}| \leq \frac{1}{2-\alpha}\}.\end{aligned}$$

Έπεται άμεσα ότι

$$\|\mathcal{A}_\alpha\| \geq \frac{2}{2-\alpha}.$$

Για την εύρεση του άνω φράγματος της νόρμας γράφουμε

$$\mathcal{A}(f)(z) = \int_0^\infty S_t(f)(z)dt = \int_0^\infty e^{-t} f(\varphi_t(z))dt.$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_\alpha(f)\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} &= |\mathcal{A}_\alpha(f)(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{A}_\alpha(f)'(z)|^2 (1-|z|^2)^\alpha dm(z) \\ &= \left| \int_0^\infty e^{-t} f(1-e^{-t})dt \right|^2 \\ &\quad + \int_{\mathbb{D}} \left| \int_0^\infty S_t(f)'(z)\, dt \right|^2 (1-|z|^2)^\alpha dm(z).\end{aligned}$$

Όμως, λόγω της (2.4),

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty e^{-t} f(1-e^{-t})dt\right|^2 &\leq \left(\int_0^\infty e^{-t}|f(1-e^{-t})|dt\right)^2 \\ &\leq \frac{K^2}{\alpha}\left(\int_0^\infty e^{-t}e^{\frac{\alpha}{2}t}\,dt\right)^2 \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \\ &= \frac{K^2}{\alpha}\left(\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \\ &= \frac{K'}{\alpha(2-\alpha)^2}\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}.\end{aligned}$$

Εξ άλλου, λόγω της γενικευμένης ανισότητας Minkowski και της (3.20)

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}}\left|\int_0^\infty S_t(f)'(z)\,dt\right|^2 (1-|z|^2)^\alpha dm(z) \\ &\qquad\leq \left[\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{D}} |S_t(f)'(z)|^2\,(1-|z|^2)^\alpha dm(z)\right)^{\frac{1}{2}} dt\right]^2 \\ &\qquad\leq \left(\int_0^\infty \|S_t(f)\|_{\mathcal{D}_\alpha} dt\right)^2 \\ &\qquad\leq \frac{K}{\alpha}\left(\int_0^\infty e^{(\frac{\alpha}{2}-1)t}dt\right)^2 \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \\ &\qquad\leq \frac{K''}{\alpha(2-\alpha)^2}\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}.\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει

$$\|\mathcal{A}_\alpha(f)\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \leq \left[\frac{K'}{\alpha(2-\alpha)^2} + \frac{K''}{\alpha(2-\alpha)^2}\right]\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} = \frac{\Lambda}{\alpha(2-\alpha)^2}\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Κεφάλαιο 4

Πίνακες Hausdorff και τελεστές σύνθεσης

4.1 Εισαγωγή

Έστω $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών και Δ ο τελεστής διαφορών

$$\Delta\mu_n = \mu_n - \mu_{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Για $k = 0, 1, 2, ...$ ορίζουμε τις

$$\Delta^0\mu_n = \mu_n \text{ και } \Delta^k\mu_n = \Delta(\Delta^{k-1}\mu_n).$$

Ένας πίνακας Hausdorff $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mu_n)$, με γεννήτρια ακολουθία $\{\mu_n\}$, είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας

$$\begin{pmatrix} h_{0,0} & 0 & 0 & . & . \\ h_{1,0} & h_{1,1} & 0 & . & . \\ h_{2,0} & h_{2,1} & h_{2,2} & 0 & . \\ . & . & . & . & \end{pmatrix}$$

με στοιχεία

$$h_{n,k} = \binom{n}{k}\Delta^{n-k}\mu_k, \quad \text{για } k \leq n$$

και
$$h_{n,k} = 0, \quad \text{για } k > n.$$
Αρχικά αυτοί οι πίνακες μελετήθηκαν στην θεωρία αθροισιμότητας [H1]. Μελετήθηκαν επίσης ως τελεστές σε χώρους ακολουθιών [Rh],[De], [Le], και τα συνεχή αναλογά τους σε χώρους ολοκληρώσιμων συναρτήσεων [BM].

Μία σημαντική κατηγορία πινάκων Hausdorff προκύπτει αν η $\{\mu_n\}$ είναι ακολουθία ροπών, δηλ.
$$\mu_n = \int_0^1 t^n d\mu(t),$$
όπου μ ένα πεπερασμένο θετικό μέτρο Borel στο $(0,1]$. Συμβολίζουμε τους πίνακες αυτούς με $\mathcal{H}_\mu$. Όπως προκύπτει από ένα σύντομο υπολογισμό, τα στοιχεία τους είναι της μορφής
$$h_{n,k} = \binom{n}{k} \int_0^1 t^k (1-t)^{n-k} d\mu(t), \quad k \leq n.$$
Συμβολίζουμε επίσης με $\mathcal{A}_\mu$ τον ανάστροφο του $\mathcal{H}_\mu$.

Έστω $1 \leq p < \infty$. Έχει δειχθεί [H2], ότι όταν το μέτρο ικανοποιεί
$$\int_0^1 t^{-\frac{1}{p}} d\mu(t) < \infty,$$
τότε ο αντίστοιχος πίνακας Hausdorff ορίζει, στο χώρο των ακολουθιών l^p, ένα φραγμένο τελεστή $\mathcal{H}_\mu : l^p \to l^p$
$$\mathcal{H}_\mu(a_n) = \{\sum_{k=0}^{n} h_{n,k} a_k\}_{n=0}^{\infty}, \quad \{a_n\} \in l^p.$$
Όταν μάλιστα το μ είναι μέτρο πιθανότητας, τότε η νόρμα του εισαγόμενου τελεστή είναι [Rh]
$$\|\mathcal{H}_\mu\| = \int_0^1 t^{-\frac{1}{p}} d\mu(t).$$

Παρακάτω αναφέρουμε μερικά γνωστά παραδείγματα πινάκων Hausdorff, οι οποίοι ορίζουν φραγμένους τελεστές στους χώρους l^p.

Παράδειγμα 1. Για $a > 0$, οι πίνακες a-**Cesàro** προκύπτουν από το μέτρο

$$d\mu(t) = a(1-t)^{a-1}dt$$

και έχουν γεννήτρια ακολουθία

$$\mu_n = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+a+1)} \quad .$$

Όταν $a = 1$ παίρνουμε τον πίνακα του τελεστή Cesàro.

Παράδειγμα 2. Για $a > 0$, $q > \frac{1}{p}$, όπου $p, q > 0$, οι **γενικευμένοι Cesàro** προκύπτουν από το μέτρο

$$d\mu(t) = \frac{\Gamma(q+a)}{\Gamma(q)\Gamma(a)} t^{q-1}(1-t)^{a-1}dt, \quad a > 0, q > \frac{1}{p} \ ,$$

με γεννήτρια ακολουθία

$$\mu_n = \frac{\Gamma(a+q)\Gamma(n+q)}{\Gamma(n+a+q)\Gamma(q)} \quad .$$

Παράδειγμα 3. Για $a > 0$, οι πίνακες **Hölder** (H^a), προκύπτουν για

$$d\mu(t) = \frac{1}{\Gamma(a)}(\log\frac{1}{t})^{a-1}dt, \quad a > 0,$$

με γεννήτρια ακολουθία

$$\mu_n = \frac{1}{(n+1)^a} \quad .$$

Παράδειγμα 4. Για $a > 0$, $c > 0$, οι πίνακες **Gamma** (Γ_c^a), προκύπτουν με

$$d\mu(t) = \frac{c^a}{\Gamma(a)} t^{c-1} (\log \frac{1}{t})^{a-1} dt, \quad a > 0,$$

με γεννήτρια ακολουθία

$$\mu_n = \left(\frac{c}{n+c} \right)^a .$$

Οι πίνακες Hausdorff μπορούν να θεωρηθούν σαν μετασχηματισμοί επί αναλυτικών συναρτήσεων του δίσκου, οι οποίοι προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του πίνακα με την ακολουθία των συντελεστών Taylor. Συγκεκριμένα, αν μ ένα μέτρο Borel στο $(0,1]$, $\mathcal{H}_\mu = (h_{n,k})$ ο αντίστοιχος πίνακας Hausdorff, $\mathcal{A}_\mu$ ο ανάστροφός του και $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbf{A}(\mathbb{D})$, ορίζουμε τη δυναμοσειρά

$$\mathcal{H}_\mu(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} h_{n,k} a_k) z^n, \tag{4.1}$$

καθώς και την ακόλουθη δυναμοσειρά (όταν αυτή είναι δυνατό να ορισθεί)

$$\mathcal{A}_\mu(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=n}^{\infty} h_{k,n} a_k) z^n. \tag{4.2}$$

Παρατηρούμε ότι αν μ είναι το μέτρο Lebesque τότε από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε τον τελεστή Cesàro και τον τελεστή $\mathcal{A}$ αντίστοιχα, στους οποίους αναφερθήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στην περίπτωση που $d\mu(t) = a(1-t)^{a-1}, \mathcal{R}e(a) > -1$, είναι γνωστό ότι προκύπτουν φραγμένοι τελεστές στους χώρους Hardy, καθώς και σε άλλους χώρους αναλυτικών συναρτήσεων

Στις επόμενες ενότητες θα μελετήσουμε τους πίνακες Hausdorff, ως τελεστές στους χώρους Hardy , για την περίπτωση που το μ είναι ένα τυχαίο πεπερασμένο μέτρο Borel στο διάστημα $(0, 1]$. Συγκεκριμένα θα δούμε ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί το μ ώστε οι σχέσεις (4.1) και (4.2) να ορίζουν φραγμένους τελεστές στους $H^p, p \in [1, \infty)$.

Συνθήκες επί του μ ώστε οι $\mathcal{H}_\mu$ και οι ανάστροφοί τους να είναι φραγμένοι τελεστές στους χώρους Hardy H^p μελετήθηκαν επίσης από τον Oliver Rudolf [RO]. Τα αποτελέσματα της [RO] δεν είναι πλήρη διότι οι συνθήκες που δίδονται δεν είναι οι φυσιολογικές για κάποιες τιμές του p. Συγκεκριμένα για την περίπτωση των $\mathcal{H}_\mu$ στους χώρους H^p, η συνθήκη που δίδεται στην [RO] είναι αυτή της παρούσης εργασίας, ενώ για $1 \leq p < 2$ δίδεται μιας διαφορετικής φύσεως συνθήκη η οποία δεν είναι βέλτιστη. Επι πλεόν οι μέθοδοι της παρούσης εργασίας είναι αμεσότερες. Πρέπει όμως να αναφέρουμε ότι στην [RO] μελετώνται επι πλέον σε έκταση τα φάσματα των τελεστών.

4.2 Πίνακες Hausdorff σε χώρους Hardy

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τους πίνακες Hausdorff στους χώρους H^p. Θα δείξουμε πρώτα ότι για $f \in H^1$, η δυναμοσειρά (4.1) ορίζει μία αναλυτική συνάρτηση στον $\mathbb{D}$. Πράγματι αν $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^1$, τότε η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι μηδενική, γιατί η συνοριακή συνάρτηση της f είναι ολοκληρώσιμη επί της περιφέρειας του δίσκου.

Αν $M = \sup_n |a_n|$, τότε

$$
\begin{aligned}
|\sum_{k=0}^{n} h_{n,k} a_k| \le \sum_{k=0}^{n} |h_{n,k}||a_k| &\le \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 t^k (1-t)^{n-k} d\mu(t) |a_k| \\
&\le M \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 t^k (1-t)^{n-k} d\mu(t) \\
&= M \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \right) d\mu(t) \\
&= M \int_0^1 (t + (1-t))^n d\mu(t) = M\mu((0,1])
\end{aligned}
$$

Επομένως οι συντελεστές της δυναμοσειράς (4.1) αποτελούν φραγμένη ακολουθία, άρα η ακτίνα σύγκλισης της είναι ≥ 1.

Στη συνέχεια, όπως και στην περίπτωση του τελεστή Cesàro, δείχνουμε ότι η $\mathcal{H}_\mu(f)$ μπορεί να γραφεί ως μέσος όρος ορισμένων σταθμισμένων τελεστών σύνθεσης. Σημειώνουμε ότι η αναπαράσταση αυτή των πινάκων Hausdorff εμφανίζεται για πρώτη φορά, στην παρούσα μελέτη, καθώς επίσης και στην [RO].

Έστω $1 \le p < \infty$. Για $t \in (0,1]$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi_t(z) = \frac{tz}{1-(1-t)z}\ , \quad z \in \mathbb{D}$$

η οποία απεικονίζει τον $\mathbb{D}$ στον εαυτό του. Άρα, από την παράγραφο (1.2), ο τελεστής σύνθεσης $f \to f \circ \varphi_t$ είναι φραγμένος στον H^p. Επίσης για κάθε $t \in (0,1]$, η

$$w_t(z) = \frac{1}{1-(1-t)z}$$

είναι φραγμένη συνάρτηση των $z \in \mathbb{D}$. Έτσι ο τελεστής

$$T_t(f)(z) = w_t(z) f(\varphi_t(z)) \tag{4.3}$$

είναι φραγμένος στον H^p. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$F(z) = \int_0^1 w_t(z) f(\varphi_t(z)) d\mu(t), \tag{4.4}$$

το οποίο ορίζεται για κάθε αναλυτική συνάρτηση f. Πράγματι αυτό είναι φανερό γιατί, για σταθερό $z \in \mathbb{D}$,

$$\sup_{t\in(0,1]} |w_t(z)| \le \frac{1}{1-|z|}$$

και

$$\sup_{t\in(0,1]} |f(\varphi_t(z))| \le \sup_{|\zeta|\le|z|} |f(\zeta)| < \infty,$$

γιατί από το λήμμα του Schwarz έχουμε $|\varphi_t(z)| \le |z|$.

Τώρα για $f \in H^p$, $z \in \mathbb{D}$, η δυναμοσειρά (4.1) συγκλίνει απόλυτα, λόγω του ότι οι συντελεστές της αποτελούν φραγμένη ακολουθία. Έτσι η αλλαγή στη σειρά άθροισης είναι δυνατή και άρα

$$\mathcal{H}_\mu(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{\lambda=0}^{n} h_{n,\lambda} a_\lambda) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda=n}^{\infty} h_{\lambda,n} a_n z^\lambda.$$

Εξ' άλλου θεωρούμε την αναλυτική συνάρτηση

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^1 \frac{1}{1-(1-t)z} f(\frac{tz}{1-(1-t)z}) d\mu(t) \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n z^n}{(1-(1-t)z)^{n+1}} d\mu(t). \end{aligned}$$

Επειδή η σειρά μέσα στο ολοκλήρωμα συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς $t \in (0,1]$, έχουμε

$$\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 \frac{t^n}{(1-(1-t)z)^{n+1}} d\mu(t) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 t^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!k!} (1-t)^k z^k \right) d\mu(t) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} t^n (1-t)^k z^{n+k} d\mu(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 \sum_{\lambda=n}^{\infty} \binom{\lambda}{n} t^n (1-t)^{\lambda-n} z^{\lambda} d\mu(t).
\end{aligned}$$

Πάλι λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης ως προς t, της υπό ολοκλήρωσης σειράς, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{\lambda=n}^{\infty} \int_0^1 \binom{\lambda}{n} t^n (1-t)^{\lambda-n} d\mu(t) z^{\lambda} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda=n}^{\infty} h_{\lambda,n} a_n z^{\lambda}.
\end{aligned}$$

Άρα καταλήγουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mu}(f)(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{\lambda=0}^{n} h_{n,\lambda} a_{\lambda}) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda=n}^{\infty} h_{\lambda,n} a_n z^{\lambda} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-(1-t)z} f(\frac{tz}{1-(1-t)z}) d\mu(t).
\end{aligned}$$

Συνοψίζουμε τα παραπάνω στο ακόλουθο λήμμα :

Λήμμα 4.2.1. *Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο Borel στο $(0,1]$ και $\mathcal{H}_{\mu} = (h_{n,k})$ ο αντίστοιχος πίνακας Hausdorff. Έστω επίσης $1 \le p < \infty$ και $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^p$. Τότε :*

(i) *η δυναμοσειρά $\mathcal{H}_\mu(f)(z)$ της σχέσης (4.1) ορίζει μία αναλυτική συνάρτηση στον $\mathbb{D}$.*

(ii) *Για κάθε $z \in \mathbb{D}$, η $\mathcal{H}_\mu(f)$ μπορεί να γραφεί με την ακόλουθη ολοκληρωτική μορφή*

$$\mathcal{H}_\mu(f)(z) = \int_0^1 w_t(z) f(\varphi_t(z)) d\mu(t). \tag{4.5}$$

Ας επιστρέψουμε τώρα στη δυναμοσειρά (4.2). Αν η f είναι πολυώνυμο, τότε τα αθροίσματα

$$B_n = \sum_{k=n}^{\infty} h_{k,n} a_k$$

είναι πεπερασμένα και $B_n = 0, n \geq n_0$ για κάποιο n_0. Στην περίπτωση αυτή η (4.2) είναι αναλυτική συνάρτηση στον $\mathbb{D}$, ως πολυωνυμική. Θα δούμε ότι και αυτή γράφεται με ανάλογη ολοκληρωτική μορφή.

Έστω $1 \leq p < \infty$. Για κάθε $t \in (0, 1]$ θεωρούμε την αναλυτική συνάρτηση

$$\psi_t(z) = tz + 1 - t, \ \ z \in \mathbb{D}$$

η οποία απεικονίζει τον $\mathbb{D}$ στον εαυτό του. Αυτή, σύμφωνα με την με την παράγραφο (1.2) εισάγει φραγμένο τελεστή σύνθεσης

$$Q_t(f)(z) = f(\psi_t(z)) \tag{4.6}$$

στον H^p.

Τώρα αν η $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ είναι πολυώνυμο (άρα $a_n = 0$ τελικά), θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} G(f)(z) &= \int_0^1 Q_t(f)(z) d\mu(t) = \int_0^1 f(tz + 1 - t) d\mu(t) \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (tz + 1 - t)^n d\mu(t). \end{aligned}$$

Προφανώς, για κάθε $z \in \mathbb{D}$, το παραπάνω ολοκλήρωμα υπάρχει και επειδή τα αθροίσματα είναι πεπερασμένα

$$\begin{aligned} G(f)(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 (tz+1-t)^n d\mu(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k z^k (1-t)^{n-k} d\mu(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \int_0^1 t^k (1-t)^{n-k} d\mu(t) \right) z^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sum_{k=0}^{n} h_{n,k} z^k) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=n}^{\infty} h_{k,n} a_k) z^n \\ &= \mathcal{A}_\mu(f)(z). \end{aligned}$$

Εν γένει, για μία $f \in H^p$, μη πολυωνυμική, το παραπάνω επιχείρημα δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Είναι όμως γνωστό ότι στην περίπτωση αυτή

$$|f(z)| \le c_p \frac{\|f\|_{H^p}}{(1-|z|)^{\frac{1}{p}}} \ , \quad z \in \mathbb{D},$$

όπου c_p σταθερά που εξαρτάται μόνο από το p [DU, σελ. 36]. Άρα για κάθε $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} |G(f)(z)| &\le \int_0^1 |f(tz+1-t)| d\mu(t) \\ &\le c_p \|f\|_{H^p} \int_0^1 \frac{1}{(1-|tz+1-t|)^{\frac{1}{p}}} d\mu(t) \\ &\le \frac{c_p \|f\|_{H^p}}{(1-|z|)^{\frac{1}{p}}} \int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{p}}} d\mu(t). \end{aligned}$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι το μέτρο μ ικανοποιεί την

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{p}}} d\mu(t) < \infty$$

τότε, γιά κάθε $z \in \mathbb{D}$, το ολοκλήρωμα $G(f)(z) = \int_0^1 Q_t(f)(z)d\mu(t)$ είναι πεπερασμένο για κάθε $f \in H^p$. Συνοψίζουμε τα παραπάνω με το ακόλουθο

Λήμμα 4.2.2. *Αν μ ένα πεπερασμένο μέτρο Borel στο $(0,1]$ και $\mathcal{A}_\mu$ ο ανάστροφος του πίνακα $\mathcal{H}_\mu$ τότε:*

(i) αν f είναι πολυώνυμο τότε η δυναμοσειρά (4.2) είναι επίσης πολυώνυμο και γράφεται με την ακόλουθη ολοκληρωτική μορφή

$$\mathcal{A}_\mu(f)(z) = \int_0^1 f(tz + 1 - t)d\mu(t), \;\; z \in \mathbb{D} \tag{4.7}$$

(ii) αν $1 \le p < \infty$ και το μέτρο μ ικανοποιεί

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{p}}} d\mu(t) < \infty, \tag{4.8}$$

τότε για κάθε $f \in H^p$ το ολοκλήρωμα στην (4.7) είναι πεπερασμένο και ορίζει μία αναλυτική συνάρτηση στον $\mathbb{D}$.

Χρησιμοποιώντας το (ii) του προηγούμενου λήμματος ορίζουμε τον τελεστή $\mathcal{A}_\mu$ στον H^p, όταν το μ ικανοποιεί την (4.8), από την ολοκληρωτική μορφή (4.7).

Παρατηρήσεις. (1) Το παραπάνω λήμμα δεν εξασφαλίζει την σύγκλιση της δυναμοσειράς (4.2). Παρατηρούμε όμως ότι αν το μέτρο μ ικανοποιεί

$$\int_0^1 \frac{1}{t} d\mu(t) < \infty. \tag{4.9}$$

τότε η δυναμοσειρά (4.2) συγκλίνει σε μία αναλυτική συνάρτηση στον δίσκο, για κάθε $f \in H^1$. Πραγμάτι αν $M = \sup_n |a_n| < \infty$, όπου a_n οι συντελεστές της f, έχουμε

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=n}^{\infty} h_{k,n} a_k| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} h_{k,n}|a_k| \leq M \sum_{k=n}^{\infty} h_{k,n} \\
&\leq M \sum_{k=n}^{\infty} \int_0^1 \binom{k}{n} t^n (1-t)^{k-n} d\mu(t) \\
&= M \int_0^1 t^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} (1-t)^{k-n} d\mu(t) \\
&= M \int_0^1 t^n \frac{1}{(1-(1-t))^{n+1}} d\mu(t) \\
&= M \int_0^1 \frac{1}{t} d\mu(t) < \infty.
\end{aligned}$$

άρα οι συντελεστές της δυναμοσειράς αποτελούν φραγμένη ακολουθία. Παρατηρούμε επίσης ότι όταν ικανοποιείται η (4.9) τότε η αναλυτική συνάρτηση που ορίζει η δυναμοσειρά (4.2) συμπίπτει με το ολοκλήρωμα (4.7) που χρησιμοποιήσαμε για να ορίσουμε τον $\mathcal{A}_\mu$ στον H^p. Πράγματι

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(tz + 1 - t) d\mu(t) &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (tz + 1 - t)^n d\mu(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 (tz + 1 - t)^n d\mu(t),
\end{aligned}$$

αν εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχούμενης σύγκλισης στην ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της υπό ολοκλήρωσης σειράς. Άρα

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(tz+1-t)d\mu(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 (tz+1-t)^n d\mu(t)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k z^k (1-t)^{n-k} d\mu(t)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 t^k (1-t)^{n-k} d\mu(t) z^k\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sum_{k=0}^{n} h_{n,k} z^k)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=n}^{\infty} h_{k,n} a_k) z^n\\ &= \mathcal{A}_\mu(f)(z).\end{aligned}$$

Η αλλαγή σειράς άθροισης είναι δυνατή επειδή η $\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=n}^{\infty} h_{k,n}a_k)z^n$ συγκλίνει απόλυτα, όπως φαίνεται παραπάνω.

(2) Όταν $d\mu(t) = dt$, το μέτρο Lebesque, η (4.9) δεν ικανοποιείται. Ωστόσο στην περίπτωση αυτή η σειρά (4.2) συγκλίνει και ορίζει για κάθε $f \in H^1$ μία αναλυτική συνάρτηση στον δίσκο. Πράγματι οι συντελεστές $h_{n,k}$ στην περίπτωση αυτή είναι

$$h_{n,k} = \frac{1}{n+1}, \quad k = 0, 1, ...$$

και η δυναμοσειρά (4.2) είναι η εικόνα της f μέσω του ανάστροφου του πίνακα Cesàro, που όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3 ορίζει αναλυτική συνάρτηση στον δίσκο.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε πότε οι $\mathcal{H}_\mu$ και $\mathcal{A}_\mu$ ορίζουν φραγμένους τελεστές στους H^p. Θα χρειαστούμε εκτιμήσεις της νόρμας των τελεστών σύνθεσης T_t και Q_t στους χώρους αυτούς. Η νόρμα του Q_t δίνεται από την

Πρόταση 4.2.1. *Αν $1 \leq p < \infty$ τότε*

$$\|Q_t\|_{H^p \to H^p} = t^{-\frac{1}{p}}.$$

Απόδειξη. Αν θεωρήσουμε την $f(z) = \frac{1}{(1-z)^\lambda}$ με $\mathcal{R}e(\lambda) < \frac{1}{p}$, παρατηρούμε ότι αυτή ανήκει στον H^p και ότι

$$f_\lambda(\psi_t(z)) = \frac{1}{t^\lambda} f_\lambda(z).$$

Δηλαδή η $\frac{1}{t^\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του Q_t. Άρα

$$\|Q_t\|_{H^p \to H^p} \geq t^{-\frac{1}{p}} \ .$$

Για την αντίστροφη ανισότητα εργαζόμαστε ως εξής. Όταν το $p = 2$, από το [CMc, Theorem 9.4], προκύπτει

$$\|Q_t\|_{H^2 \to H^2} = t^{-\frac{1}{2}} \ .$$

Για τυχόν $p \neq 2$ και $f \in H^p$, η f γράφεται

$$f(z) = B(z)F(z),$$

όπου $B(z)$ είναι το γινόμενο Blaschke των ριζών της f, η F δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{D}$ και $\|F\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$ [DU, Theorem 2.5]. Τότε

$$\begin{aligned}
\|Q_t(f)(z)\|_{H^p}^p &= \sup_{r\in[0,1)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B(\psi_t(re^{i\theta}))|^p |F(\psi_t(re^{i\theta}))|^p d\theta \\
&\leq \sup_{r\in[0,1)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F^{\frac{p}{2}}(\psi_t(re^{i\theta}))|^2 d\theta \\
&= \|Q_t(F^{\frac{p}{2}})\|_{H^2}^2 \\
&\leq \ \|Q_t\|_{H^2 \to H^2}^2 \|F^{\frac{p}{2}}\|_{H^2}^2 \\
&= \frac{1}{t} \|F\|_{H^p}^p \\
&= \frac{1}{t} \|f\|_{H^p}^p \ ,
\end{aligned}$$

από όπου προκύπτει η αντίστροφη ανισότητα.

□

Για τον υπολογισμό της νόρμας του T_t, χρειαζόμαστε τη δυϊκότητα $(H^p)^* \simeq H^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, η οποία πραγματοποιείται μέσω της σύζευξης

$$\Lambda_g(f) = \langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta, \quad g \in H^q \tag{4.10}$$

όπου Λ_g είναι φραγμένο συναρτησοειδές στον H^p και $g \in H^q$, για $1 < p < \infty$. Η δυϊκότητα αυτή είναι μόνο ισομορφισμός και όχι ισομετρία εκτός αν $p = 2$ [DU, Theorem 7.3].

Θα δείξουμε ότι

Λήμμα 4.2.3. *Αν $1 < p < \infty$, $f \in H^p$ και $h \in H^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, τότε*

$$\langle w_t f o \varphi_t, h\rangle = \langle f, h o \psi_t\rangle. \tag{4.11}$$

Απόδειξη. Γράφουμε την f ως ολοκλήρωμα Cauchy των συνοριακών τιμών της [DU, Theorem 3.6],

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1-e^{-i\theta}z}d\theta.$$

Τότε, θέτοντας $g(z) = T_t(f)(z)$ έχουμε

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{1-(1-t)z} f\left(\frac{tz}{1-(1-t)z}\right) \\ &= \frac{1}{1-(1-t)z}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1-e^{-i\theta}\frac{tz}{1-(1-t)z}}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{1-(e^{-i\theta}t+1-t)z}d\theta \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{-i\theta}t+1-t)^n f(e^{i\theta})d\theta\right) z^n. \end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $n = 0, 1, 2...,$ ισχύει

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}g(e^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{-i\theta}t + 1 - t)^n f(e^{i\theta})d\theta,$$

ισοδύναμα

$$\langle g, e^{in\theta}\rangle = \langle f, (e^{i\theta}t + 1 - t)^n\rangle.$$

Το σύνολο $\{e^{in\theta} : n = 0, 1, 2....\}$ παράγει τον H^q. Το ίδιο προφανώς ισχύει και για το $\{(e^{i\theta}t + 1 - t)^n : n = 0, 1, 2....\}$. Θεωρώντας γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων των δύο αυτών συνόλων και τα όριά τους ως προς την νόρμα του H^q, καταλήγουμε ότι για κάθε $h \in H^q$ ισχύει

$$\langle g, h\rangle = \langle f, h \circ \psi_t\rangle,$$

η οποία είναι η αποδεικτέα.

□

Πρόταση 4.2.2. *Γιά τους σταθμισμένους τελεστές σύνθεσης*

$$T_t(f)(z) = w_t(z)f(\varphi_t(z))$$

που δίδονται από την (4.3)

(i) αν $2 \leq p < \infty$ τότε

$$\|T_t\|_{H^p\to H^p} \leq t^{-1+\frac{1}{p}}, \quad t \in (0, 1]$$

(ii) αν $1 < p < 2$ τότε

$$\|T_t\|_{H^p\to H^p} \leq C(p)t^{-1+\frac{1}{p}}, \quad t \in (0, 1]$$

για κάποια σταθερά $C(p)$.

(iii) αν $p = 1$ τότε υπάρχει σταθερά $C' > 0$ τέτοια ώστε

$$\|T_t\|_{H^1\to H^1} \leq C'(1 + log\frac{1}{t}), \quad t \in (0, 1]$$

Απόδειξη. Για κάθε $1 \leq p < \infty$ θεωρούμε το χώρο Hardy $H^p(\mathbb{P})$, που αποτελείται από τις αναλυτικές συναρτήσεις f επί του

$$\mathbb{P} = \{z : \mathcal{R}e(z) > 0\},$$

για τις οποίες ισχύει

$$\|f\|^p_{H^p(\mathbb{P})} = \sup_{0<x<\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dy < \infty.$$

Αυτός είναι χώρος Banach, ισομετρικός με τον αντίστοιχο χώρο Hardy του δίσκου μέσω της γραμμικής απεικόνισης

$$V_p : H^p(\mathbb{P}) \to H^p$$

που δίνεται από την

$$V_p(f)(z) = \frac{(4\pi)^{\frac{1}{p}}}{(1-z)^{\frac{2}{p}}} f(\nu(z)), \quad f \in H^p(\mathbb{P}),$$

όπου η $\nu(z) = \frac{1+z}{1-z}$ απεικονίζει τον δίσκο σύμμορφα στο ημιεπίπεδο $\mathbb{P}$. Η αντίστροφη απεικόνιση είναι η $V_p^{-1} : H^p \to H^p(\mathbb{P})$,

$$V_p^{-1}(g)(z) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{p}}(1+z)^{\frac{2}{p}}} g(\nu^{-1}(z)), \quad g \in H^p.$$

Θεωρούμε τώρα τους τελεστές $\widetilde{T}_t : H^p(\mathbb{P}) \to H^p(\mathbb{P})$

$$\widetilde{T}_t = V_p^{-1} \circ T_t \circ V_p \ ,$$

για τους οποίους βεβαίως ισχύει

$$\|\widetilde{T}_t\|_{H^p(\mathbb{P}) \to H^p(\mathbb{P})} = \|T_t\|_{H^p \to H^p},$$

αφού οι V_p, V_p^{-1} είναι ισομετρίες.

Έστω $f \in H^p(\mathbb{P})$. Μετά από πράξεις λαμβάνουμε

$$\widetilde{T}_t(f)(z) = \left(\frac{z+1}{tz+2-t}\right)^{1-\frac{2}{p}} f(tz+1-t) \ .$$

Επίσης για κάθε $z \in \mathbb{P}$ και $t \in (0,1]$ ισχύει

$$\left|\frac{z+1}{tz+2-t}\right| \leq \frac{1}{t} \ .$$

(i) Υποθέτουμε $2 \leq p < \infty$. Χρησιμοποιώντας την τελευταία ανισότητα βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{T}_t(f)\|_{H^p(\mathbb{P})} = \\
&= \sup_{0<x<\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{x+iy+1}{t(x+iy)+2-t}\right|^{p-2} |f(t(x+iy)+1-t)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq t^{-1+\frac{2}{p}} \sup_{0<x<\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} |f(t(x+iy)+1-t)|^p dy)^{\frac{1}{p}} \ ,
\end{aligned}$$

όπου $z = x+iy$. Με αλλαγή μεταβλητής $u = tx+1-t$ και $v = ty$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{T}_t(f)\|_{H^p(\mathbb{P})} &\leq t^{-1+\frac{2}{p}} \sup_{1-t<u<\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(u+iv)|^p \frac{dv}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq t^{-1+\frac{2}{p}} \sup_{0<u<\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(u+iv)|^p \frac{dv}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= t^{-1+\frac{1}{p}} \|f\|_{H^p(\mathbb{P})},
\end{aligned}$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

(ii) Έστω τώρα $1 < p < 2$. Αν $f \in H^p$ και q ο δυϊκός δείκτης, από την (4.10) έχουμε

$$\begin{aligned}
\|T_t(f)\|_{H^p} &= \sup\{|\Lambda(T_t(f))| : \Lambda \in (H^p)^* \text{ με } \|\Lambda\| \leq 1\} \\
&= \sup\{|\langle T_t(f), g\rangle| : g \in H^q \text{ με } \|\Lambda\| \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (4.11) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}|\langle T_t(f), g\rangle| &= |\langle f, Q_t(g)\rangle| \leq \|f\|_{H^p}\|Q_t(g)\|_{H^q}\\ &\leq t^{-\frac{1}{q}}\|f\|_{H^p}\|g\|_{H^q} = t^{-1+\frac{1}{p}}\|f\|_{H^p}\|g\|_{H^q}.\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\|T_t(f)\|_{H^p} &\leq t^{-1+\frac{1}{p}} \sup\{\|g\|_{H^q} :\text{με } \|\Lambda_g\| \leq 1\}\|f\|_{H^p}\\ &= C(p)t^{-1+\frac{1}{p}}\|f\|_{H^p}\ ,\end{aligned}$$

από όπου προκύπτει η αποδεικτέα.

(iii) Έστω τώρα $p = 1$. Θα δείξουμε πρώτα ότι για μία $f \in H^1$ με $f(0) = 0$ έχουμε

$$\|T_t(f)\|_{H^1} \leq \|f\|_{H^1}.$$

Πράγματι επειδή η f μπορεί να γραφεί $f(z) = zg(z)$, όπου $g \in H^1$ με $\|g\|_{H^1} = \|f\|_{H^1}$. Τότε:

$$T_t(f)(z) = \frac{tz}{(1-(1-t)z)^2} g(\frac{tz}{1-(1-t)z}) = tzS_t(g)(z),$$

όπου οι σταθμισμένοι τελεστές σύνθεσης

$$S_t(g)(z) = \frac{1}{(1-(1-t)z)^2} g(\frac{tz}{1-(1-t)z})$$

είναι φραγμένοι στον H^1, για τους ίδιους λόγους που οι T_t είναι φραγμένοι.Έτσι

$$\begin{aligned}\|T_t(f)\|_{H^1} &= t\|S_t(g)\|_{H^1} \leq t\|S_t\|_{H^1\to H^1}\|g\|_{H^1}\\ &= t\|S_t\|_{H^1\to H^1}\|f\|_{H^1}.\end{aligned}$$

Τώρα για να προσδιορίσουμε τη νόρμα $\|S_t\|_{H^1\to H^1}$ θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο της περίπτωσης $p \geq 2$. Άν

$$\widetilde{S_t} = V_1^{-1} \circ S_t \circ V_1,$$

τότε

$$\|S_t\|_{H^1\to H^1} = \|\widetilde{S}_t\|_{H^1(\mathbb{P})\to H^1(\mathbb{P})}.$$

Για μία συνάρτηση $h \in H^1(\mathbb{P})$, κάνοντας πράξεις βρίσκουμε

$$\widetilde{S}_t(h)(z) = h(tz+1-t).$$

Άρα αν $z = x+iy$, θέτοντας πάλι $u = tx+1-t$ και $v = ty$

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{S}_t(h)(z)\|_{H^1(\mathbb{P})} &= \sup_{0<x<\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|h(t(x+iy)+1-t)|dy\\
&\le \sup_{0<u<\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|h(u+iv)|\frac{dv}{t} = \frac{1}{t}\|h\|_{H^1(\mathbb{P})}
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\|S_t\|_{H^1} \le \frac{1}{t} \Rightarrow \|T_t\|_{H^1} \le 1.$$

Έστω τώρα μία τυχαία $F \in H^1$. Γράφουμε $f(z) = F(z) - F(0)$, οπότε $f(0) = 0$ και

$$\|f\|_{H^1} = \|F(z) - F(0)\|_{H^1} \le \|F\|_{H^1} + |F(0)| \le 2\|F\|_{H^1}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$T_t(F)(z) = T_t(F(0)+f(z)) = F(0)\frac{1}{1-(1-t)z} + T_t(f)(z).$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\|T_t(F)\|_{H^1} &\le |F(0)|\|\frac{1}{1-(1-t)z}\|_{H^1} + \|T_t(f)\|_{H^1}\\
&\le \|F\|_{H^1}\|\frac{1}{1-(1-t)z}\|_{H^1} + \|f\|_{H^1}\\
&\le \|F\|_{H^1}\left(\left\|\frac{1}{1-(1-t)\,z}\right\|_{H^1} + 2\right).
\end{aligned}$$

Όμως λόγω της γνωστής ανισότητας [Po]

$$\int_0^{2\pi} |\frac{1}{1-re^{i\theta}}|d\theta \leq C \log \frac{1}{1-r}, \quad 0<r<1.$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \|\frac{1}{1-(1-t)z}\|_{H^1} &= \sup_{r\in[0,1)} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\frac{1}{1-(1-t)re^{i\theta}}|d\theta \\ &\leq C\log\frac{1}{1-(1-t)r} \leq C\log\frac{1}{t} \end{aligned}$$

με $C>0$ σταθερά. Έτσι

$$\|T_t(F)\|_{H^1} \leq (C\log\frac{1}{t}+2)\|F\|_{H^1} \leq C'(\log\frac{1}{t}+1)\|F\|_{H^1}$$

με $C' = \max(C,2)$.

□

Είμαστε τώρα σε θέση να δείξουμε το κύριο θεώρημα αυτής της ενότητας.

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο Borel στο $(0,1]$ και $\mathcal{H}_\mu$ ο αντίστοιχος πίνακας Hausdorff.*

(i) Έστω $1<p<\infty$ και

$$\int_0^1 t^{-1+\frac{1}{p}}d\mu(t) < \infty,$$

τότε ο $\mathcal{H}_\mu$ είναι φραγμένος τελεστής στον H^p και

$$\|\mathcal{H}_\mu\|_{H^p\to H^p} \leq C\int_0^1 t^{-1+\frac{1}{p}}d\mu(t).$$

Όταν μάλιστα $p\geq 2$ μπορούμε να διαλέξουμε $C=1$.

(ii) Έστω $p = 1$. Τότε ο $\mathcal{H}_\mu : H^1 \to H^1$ είναι φραγμένος αν και μόνο αν

$$\int_0^1 \log \frac{1}{t} d\mu(t) < \infty.$$

Στην περίπτωση αυτή

$$\|\mathcal{H}_\mu\|_{H^1 \to H^1} \leq C' \left(\mu((0,1]) + \int_0^1 \log \frac{1}{t} d\mu(t) \right)$$

για κάποια σταθερά C'.

Απόδειξη. (i) Έστω $f \in H^p$. Με τη βοήθεια της ολοκληρωτικής μορφής (4.5), της πρότασης (4.2.1) και της γενικευμένης ανισότητας Minkowski έχουμε ότι για κάθε $r \in [0,1)$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{H}_\mu(f)(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} = \\
&\qquad = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \int_0^1 T_t(f)(re^{i\theta}) d\mu(t) \right|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |T_t(f)(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} d\mu(t) \\
&\qquad \leq \int_0^1 \left(\sup_{r \in [0,1)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |T_t(f)(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} d\mu(t).
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}_\mu(f)\|_{H^p} &\leq \int_0^1 \|T_t(f)\|_{H^p} d\mu(t) \\
&\leq C \int_0^1 t^{-1+\frac{1}{p}} d\mu(t) \|f\|_{H^p},
\end{aligned}$$

με $C = 1$ όταν $p \geq 2$ και $C = C(p)$ όταν $p \in (1, 2)$, και η απόδειξη της (i) είναι πλήρης.

(ii) Αν $f \in H^1$, πάλι μέσω της ολοκληρωτικής μορφής (4.5) και της πρότασης (4.2.1), έχουμε για κάθε $r \in [0, 1)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathcal{H}_\mu(f)(re^{i\theta})| \, d\theta \leq$$
$$\leq \int_0^1 \left(\sup_{r\in[0,1)} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |T_t(f)(re^{i\theta})| d\theta \right) d\mu(t),$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}_\mu(f)\|_{H^1} &\leq \int_0^1 \|T_t(f)\|_{H^1} d\mu(t) \\
&\leq C' \int_0^1 (1 + \log \frac{1}{t}) d\mu(t) \|f\|_{H^1} \\
&= C' \left(\mu((0,1]) + \int_0^1 \log \frac{1}{t} d\mu(t) \right) \|f\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή αν $\int_0^1 \log \frac{1}{t} d\mu(t) < \infty$, τότε ο $\mathcal{H}_\mu : H^1 \to H^1$ είναι φραγμένος και έχουμε τη μία κατεύθυνση του ισχυρισμού.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο $\mathcal{H}_\mu$ είναι φραγμένος στον H^1. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\mu(1)(z) &= \int_0^1 \frac{1}{1-(1-t)z} d\mu(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 (1-t)^n d\mu(t) \right) z^n,
\end{aligned}$$

οπότε με τη βοήθεια της ανισότητας Hardy υπό τη μορφή

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \leq 2\pi \|f\|_{H^1}, \quad f \in H^1,$$

παίρνουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\int_0^1(1-t)^n d\mu(t)\right)\leq 2\pi\|\mathcal{H}_\mu(1)\|_{H^1}$$
$$\leq 2\pi\|\mathcal{H}_\mu\|_{H^1\to H^1}\ .$$

Εναλλάσσοντας το άθροισμα με το ολοκλήρωμα παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1\log\frac{1}{t}d\mu(t) &= \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}(1-t)^n\right)d\mu(t)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\int_0^1(1-t)^n d\mu(t)\right)\\ &\leq 2\pi\|\mathcal{H}_\mu\|_{H^1\to H^1}\end{aligned}$$

και έχουμε πλήρη την απόδειξη.

□

Το ακόλουθο θεώρημα δίδει συνθήκες επί του μ ώστε ο τελεστής $\mathcal{A}_\mu$, που είναι ο ανάστροφος ενός πίνακα Hausdorff $\mathcal{H}_\mu$, να είναι φραγμένος στο χώρο Hardy.

Θεώρημα 4.2.2. *Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο Borel στο $(0,1]$ και $\mathcal{A}_\mu$ ο τελεστής που ορίζεται από την ολοκληρωτική μορφή (4.7). Αν $1\leq p<\infty$ και ισχύει*

$$\int_0^1 t^{-\frac{1}{p}}d\mu(t)<\infty \tag{4.12}$$

τότε ο $\mathcal{A}_\mu$ είναι φραγμένος στον H^p και

$$\|\mathcal{A}_\mu\|_{H^p\to H^p}=\int_0^1 t^{-\frac{1}{p}}d\mu(t).$$

Απόδειξη. Αν $1 \le p < \infty$ και $f \in H^p$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathcal{A}_\mu(f)(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\int_0^1 f(tre^{i\theta} + (1-t))d\mu(t)\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad \le \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(tre^{i\theta} + (1-t))|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} d\mu(t) \\
&\qquad \le \int_0^1 \left(\sup_{r\in[0,1)} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(tre^{i\theta} + (1-t))|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} d\mu(t).
\end{aligned}$$

Άρα

$$\|\mathcal{A}_\mu(f)\|_{H^p} \le \int_0^1 \|Q_t(f)\|_{H^p} d\mu(t) = \int_0^1 t^{-\frac{1}{p}} d\mu(t) \|f\|_{H^p},$$

δηλαδή αν ικανοποιείται η (4.12), τότε ο $\mathcal{A}_\mu$ είναι φραγμένος στον H^p και

$$\|\mathcal{A}_\mu\|_{H^p} \le \int_0^1 t^{-\frac{1}{p}} d\mu(t).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα θεωρούμε $\lambda \in \mathbb{C}$, με $\mathfrak{Re}(\lambda) < \frac{1}{p}$. Τότε η

$$f_\lambda(z) = \frac{1}{(1-z)^\lambda}$$

ανήκει στον H^p, και

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\mu(f_\lambda)(z) &= \int_0^1 f_\lambda(tz + 1 - t) d\mu(t) \\
&= \left(\int_0^1 \frac{1}{t^\lambda} d\mu(t)\right) f_\lambda(z).
\end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις f_λ είναι συνεπώς ιδιοσυναρτήσεις του $\mathcal{A}_\mu$ και το σύνολο

$$\left\{\int_0^1 \frac{1}{t^\lambda} d\mu(t) : \mathcal{R}e(\lambda) < \frac{1}{p}\right\}$$

περιέχεται στο σημειακό φάσμα του. Άρα:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_\mu\|_{H^p \to H^p} &= \sup\left\{\left|\int_0^1 \frac{1}{t^\lambda} d\mu(t)\right| : \mathcal{R}e(\lambda) < \frac{1}{p}\right\} \\ &\geq \int_0^1 t^{-\frac{1}{p}} d\mu(t)\end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

Βιβλιογραφία

[A] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, Mc Graw - Hill

[An] K. F. Andersen, *Cesàro averaging operators on Hardy spaces*, Proc. Royal Soc. Endinburgh **126 A** (1996), 617–624.

[AT] I. Antoniou and S. Tasaki *Generalized Spectral Decompositions of Mixing Dynamical Systems*, International Journal of Quantum Chemistry, Vol. **46**, (1993), 425–474.

[ASS] I. Antoniou, V. A. Sandovnichii and S. A. Shkarin *New extended spectral decompositions of the Renyi map*, Physics Letters A, **258**, (1999), 237–243.

[BP] E. Berkson and H. Porta, *Semigroups of analytic functions and composition operators*, Michigan Math. J. **25** (1978), 101–115.

[BM] G. Brown and F. Mòricz, *The Hausdorff and the quasi Hausdorff operators on the spaces L^p, $1 \leq p < \infty$*, Math. Inequal. Appl.**3** (2000), 105–115.

[CMc] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, *Composition operators on spaces of Analytic functions*, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[De] J.A. Deddens, *On spectra of Hausdorff operators on l^2_+*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 74-76.

[DS] N. Dunford and J. Schwartz, *Linear Operators*, Part 1, Wiley, New York, 1988.

[DU] P. L. Duren, *Theory of H^p spaces*, volume 38, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 1970.

[G] P. Galanopoulos, *The Cesàro operator on Dirichlet s-paces* , Acta Sci. Math. (Szeged) **67** (2001), 411–420.

[GS] P. Galanopoulos and A. G. Siskakis, *Hausdorff matrices and composition operators*, Illinois J. Math., to appear.

[H1] G. H. Hardy, *An inequality for Hausdorff means*, J. London Math. Soc. **18** (1943), 46–50.

[H2] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Claderon Press, Oxford, 1956.

[HP] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, Vol 31 (1957).

[K] B. Koopman, *Hamiltonian systems and transformations in Hillbert spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **17**, (1931), 315–318.

[Le] G. Leibowitz, *Discrete Hausdorff transformations*, Proc. Amer. Math. Soc. **38** (1973), 541–546.

[LM] E. Liflyand and F. Mòricz, *The Hausdorff operator is bounded on the real Hardy space $H^1(\mathbb{R})$*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1391–1396

[MS] B. D. MacCluer and J. H. Shapiro, *Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces*, Can. J. Math. Vol XXXVIII, No 4, (1986), 878–906.

[M] J. Miao, *The Cesàro operator is bounded on H^p, $p \in (0,1)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 1077–1079.

[P] A. Pazy, *Semigroups of linear Operators and Applications to Partial Differential Equation*, Springer- Verlang (1983).

[Po] Ch. Pommerenke, *On the coefficients of close to convex functions*, Michigan Math. J.**9** (1962), 259–269.

[Rh] B. E. Rhoades, *Spectra of some Hausdorff operators*, Acta. Si. Math. (Szeged) **32** (1971), 91–100.

[Ru] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw - Hill International Editions, (1987)

[RO] O. Rudolf, *Hausdorff-Operatoren auf BK-Raumen und Halbgruppen linearer Operatoren*, Mitt. Math. Sem. Giessen No. **241** (2000) iv+100 pp.

[SH] J. H. Shapiro, *Composition Operators and Classical Function Theory*, Springer-Verlag, New York. 1993.

[Si1] A. G. Siskakis, *Semigroups of composition operators and the Cesàro operator on $H^p(\mathbb{D})$*, Thesis, University of Illinois, 1985

[Si2] A. G. Siskakis, *Composition semigroups and the Cesàro operator on H^p*, J. London Math. Soc. (2) **36**, (1987), 122–129

[Si3] A. G. Siskakis, *Semigroups of composition operators in Bergman spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. **35**, (1987), 397–406

[Si4] A. G. Siskakis, *On the Bergman space norm of the Cesàro operator*, Arch. Math. Soc. **67**, (1996), 312–318

[SM] R. K. Singh and J. S. Manhas, *Composition operators on function spaces*, North-Holland Mathematics Studies 179, (1993).

[St] K. Stempak, *Cesàro Averaging operators*, Proc. Royal Soc. Endinburgh **124 A** (1994), 121–126.

[X] J. Xiao, *Cesàro-type operators on Hardy, BMOA and Bloch spaces*, Arch. Math.**68** (1997), 398–406.

[WZ] R. Wheeden and A. Zygmund, *Measure and Integral: an introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, New York, (1977).

[WW] E.T. Whittaker and G.N.Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, (1978)

[Zh] K. Zhu, *Operator theory in Fynction spaces*, Marcel Dekker, New York, (1990).

[Z] A. Zygmund, *Trigonometric Series* , Cambridge (1968).