Κεφάλαιο 4

Ακολουθίες συναρτήσεων

4.1 Η έννοια της ακολουθίας συναρτήσεων

Ορισμός 4.1.1 *Ακολουθία συναρτήσεων είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και πεδίο τιμών το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων. Συμβολίζουμε μια ακολουθία συναρτήσεων με $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Θεωρούμε μια ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ που είναι όλες ορισμένες σ′ ένα σύνολο $E \subset \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in E$, προκύπτει μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Παράδειγμα 4.1.2 Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ με

$$f_n(x) = 1 + \left(\frac{x}{n}\right)^n, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Για σταθεροποιημένο $n \in \mathbb{N}$, η f_n είναι μια πραγματική συνάρτηση. Για παράδειγμα η f_1 είναι η συνάρτηση με τύπο $f_1(x) = 1+x,\ x \in \mathbb{R}$, ενώ η f_2 έχει τύπο $f_2(x) = 1+x^2/4$. Για σταθεροποιημένο $x \in \mathbb{R}$, η $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών· π.χ. $f_n(0) = \{1, 1, 1, \dots\}$, $f_n(1) = \{1 + \frac{1}{n^n}\}_{n=1}^{\infty}$.

Παράδειγμα 4.1.3 Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ με

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n}, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Οι πραγματικές συναρτήσεις f_1 και f_2 έχουν τύπους $f_1(x) = x+1$ και $f_2(x) = x+1/2$. Για $x = 5$ προκύπτει η πραγματική ακολουθία $f_n(5) = \{5+1/n\}_{n=1}^{\infty}$, ενώ για $x = -1$ προκύπτει η ακολουθία $f_n(-1) = \{-1+1/n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ορισμός 4.1.4 *Δίνεται μιά ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *που είναι ορισμένες στο σύνολο* $E \subset \mathbb{R}$. *Η* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ονομάζεται φραγμένη, αν για κάθε* $x \in E$, *η πραγματική ακολουθία* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *είναι φραγμένη. Η* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ονομάζεται ομοιόμορφα φραγμένη αν υπάρχει* $M > 0$ *τέτοιο ώστε*

$$|f_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in E, \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Παράδειγμα 4.1.5 Η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $f_n(x) = \cos nx, \; x \in \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη διότι $|\cos nx| \leq 1, \; \forall x \in \mathbb{R}, \; \forall n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $g_n(x) = \frac{1}{nx}, \; x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ είναι φραγμένη διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ η πραγματική ακολουθία $\{\frac{1}{nx}\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη (και μάλιστα συγκλίνει στο 0). Η $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Πράγματι ισχύει $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{nx} = +\infty$· άρα δεν μπορεί να υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|\frac{1}{nx}| \leq M, \; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 4.1.6 *Η ακολουθία συναρτήσεων* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ονομάζεται αύξουσα (φθίνουσα) στο σύνολο* E *αν για κάθε* $x \in E$, *η πραγματική ακολουθία* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *είναι αύξουσα (φθίνουσα). Η* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ονομάζεται γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα) στο σύνολο* E *αν για κάθε* $x \in E$, *η πραγματική ακολουθία* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα).*

Παράδειγμα 4.1.7 Η $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ του Παραδείγματος 3 είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$.

Ορισμός 4.1.8 *Αν* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *είναι μιά ακολουθία συναρτήσεων που είναι ορισμένες στο σύνολο* $E \subset \mathbb{R}$, *ορίζουμε στο* E *τις επεκτεταμένες πραγματικές συναρτήσεις* $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ *με τις παρακάτω ισότητες:*

$$\begin{aligned}
(\sup_n f_n)(x) &= \sup_n (f_n(x)), \\
(\inf_n f_n)(x) &= \inf_n (f_n(x)), \\
(\limsup_{n\to\infty} f_n)(x) &= \limsup_{n\to\infty} (f_n(x)), \\
(\liminf_{n\to\infty} f_n)(x) &= \liminf_{n\to\infty} (f_n(x)).
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.1.9 Για την ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $f_n(x) = x + \frac{(-1)^n}{n}, \; x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sup_n f_n(x) = x + \frac{1}{2}, \; \inf_n f_n(x) = x - 1, \; \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = x$, $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = x, \; x \in \mathbb{R}$.

4.2 Σημειακή σύγκλιση

Ορισμός 4.2.1 *Δίνεται μιά ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *που είναι ορισμένες στο σύνολο* $E \subset \mathbb{R}$. *Λέμε ότι η* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *συγκλίνει σημειακά στο* E *προς τη συνάρτηση* $f : E \to \mathbb{R}$ *και γράφουμε* $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ *στο* E, *αν για κάθε* $x \in E$ *ισχύει* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Από τον ορισμό του ορίου πραγματικής ακολουθίας προκύπτει ότι $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E αν και μόνο αν

$$\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_o \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geq n_o,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Παράδειγμα 4.2.2 Είναι γνωστό ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty}(1 + x/n)^n = e^x$. Άρα για την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $f_n(x) = (1+x/n)^n$, $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $\mathbb{R}$, όπου $f(x) = e^x$.

Παράδειγμα 4.2.3 Για την ακολουθία $f_n(x) = x + (-1)^n$ ισχύει $x + 1 = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \neq \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = x - 1,\ x \in \mathbb{R}$. Άρα η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει σημειακά.

Παράδειγμα 4.2.4 Έστω f μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $E \subset \mathbb{R}$. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}$, $x \in E$. Τότε για κάθε $x \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f(x) + \frac{1}{n} \right) = f(x).$$

Άρα $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E.

Παράδειγμα 4.2.5 Θεωρούμε την ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Τότε $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $[0, 1]$, όπου

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ x \in [0, 1), \\ 1,\ x = 1. \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας βασικές ιδιότητες του ορίου παραγματικών ακολουθιών αποδεικνύεται εύκολα το παρακάτω θεώρημα· η απόδειξή του αφήνεται για άσκηση.

Θεώρημα 4.2.6 *Αν* $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ *στο* E *και* $g_n \xrightarrow{\sigma} g$ *στο* E *και* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, *τότε* $c_1 f_n + c_2 g_n \xrightarrow{\sigma} c_1 f + c_2 g$ *στο* E *και* $f_n g_n \xrightarrow{\sigma} fg$ *στο* E.

4.3 Ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός 4.3.1 *Δίνονται δύο πραγματικές συναρτήσεις f και g, ορισμένες και οι δύο στο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$. Ορίζουμε ως απόσταση των f και g τον επεκτεταμένο πραγματικό αριθμό*

$$\mathrm{d}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in E\}.$$

Για την απόσταση των f και g θα χρησιμοποιούμε επίσης και τους συμβολισμούς $\mathrm{d}_E(f,g)$ και $\|f-g\|_E$.

Παράδειγμα 4.3.2 Αν $f(x) = x,\ g(x) = x^2,\ x \in [0,1]$, τότε

$$\mathrm{d}_{[0,1]}(f,g) = \sup\{x - x^2 : x \in [0,1]\} = \max_{x\in[0,1]}(x - x^2) = \frac{1}{4}.$$

Παράδειγμα 4.3.3 Αν $f(x) = \tan^{-1} x,\ g(x) = 2,\ x \in \mathbb{R}$, τότε

$$\mathrm{d}_{\mathbb{R}}(f,g) = \sup\{|\tan^{-1} x - 2| : x \in \mathbb{R}\} = \sup_{x\in\mathbb{R}}(2 - \tan^{-1} x) = 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Παράδειγμα 4.3.4 Αν $f(x) = x,\ g(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$, τότε

$$\mathrm{d}_{\mathbb{R}}(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x - \sin x| = +\infty.$$

Ορισμός 4.3.5 *Δίνεται μιά ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ που είναι ορισμένες στο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$. Λέμε ότι η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E προς τη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ και γράφουμε $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E, αν $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}_E(f_n, f) = 0$.*

Χρησιμοποιώντας τώρα τον ορισμό του ορίου πραγματικής ακολουθίας και τον ορισμό της απόστασης συναρτήσεων βλέπουμε ότι μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E προς τη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ (που εξαρτάται μόνο από το ε) τέτοιο ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \ \forall n \geq n_o,\ \forall x \in E.$$

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε τα γραφήματα των συναρτήσεων f_n από το n_o και πέρα βρίσκονται ολόκληρα μέσα στη ζώνη πλάτους 2ε γύρω από το γράφημα της f.

Θεώρημα 4.3.6 *Αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E, τότε $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E.*

Απόδειξη. Έστω $x \in E$. Επειδή $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E και $|f_n(x) - f(x)| \leq \mathrm{d}_E(f_n, f)$, ισχύει $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Άρα $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. $\square$

Θεώρημα 4.3.7 *(α) Αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E και $g_n \xrightarrow{o\mu} g$ στο E και $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, τότε $c_1 f_n + c_2 g_n \xrightarrow{o\mu} c_1 f + c_2 g$ στο E.*
(β) Αν επιπλέον οι $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες, τότε $f_n g_n \xrightarrow{o\mu} fg$ στο E.

Απόδειξη. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2|c_1|} \quad \text{και} \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2|c_2|}, \ \forall x \in E, \ \forall n \geq n_o.$$

Τότε $\forall x \in E$, $\forall n \geq n_o$, ισχύει

$$\begin{aligned} & |(c_1 f_n(x) + c_2 g_n(x)) - (c_1 f(x) + c_2 g(x))| \\ \leq \ & |c_1| \, |f_n(x) - f(x)| + |c_2| \, |g_n(x) - g(x)| < |c_1| \frac{\varepsilon}{|c_1|} + |c_2| \frac{\varepsilon}{|c_2|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα $c_1 f_n + c_2 g_n \xrightarrow{o\mu} c_1 f + c_2 g$ στο E.

(β) Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f_n(x)| \leq M \quad \text{και} \quad |g_n(x)| \leq M, \ \forall x \in E, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Λόγω του Θεωρήματος 4.3.6, ισχύει $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in E$. Άρα $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in E$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{και} \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}, \ \forall x \in E, \ \forall n \geq n_o.$$

Τότε $\forall x \in E$, $\forall n \geq n_o$, ισχύει

$$\begin{aligned} & |f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| \\ \leq \ & |f_n(x) g_n(x) - f(x) g_n(x)| + |f(x) g_n(x) - f(x) g(x)| \\ = \ & |f_n(x) - f(x)| \, |g_n(x)| + |f(x)| \, |g_n(x) - g(x)| \\ \leq \ & \frac{\varepsilon}{2M} M + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Το Θεώρημα 4.3.6 οδηγεί στη εξής μέθοδο για να βρίσκουμε το ομοιόμορφο όριο μιάς ακολουθίας συναρτήσεων $\{f_n\}$ (εφόσον βέβαια η ακολουθία συγκλίνει ομοιόμορφα): Πρώτα βρίσκουμε το σημειακό όριο που είναι μια συνάρτηση f. Λόγω του θεωρήματος, αν η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα, θα συγκλίνει ομοιόμορφα προς την f. Υπολογίζουμε (ή εκτιμούμε), λοιπόν, την πραγματική ακολουθία $\mathrm{d}(f_n, f)$ και εξετάζουμε αν συγκλίνει στο 0. Για το υπολογισμό (ή την εκτίμηση) τής $\mathrm{d}(f_n, f)$ συχνά είναι χρήσιμες διάφορες μέθοδοι του Διαφορικού Λογισμού.

Παράδειγμα 4.3.8 Έστω $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Άρα $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $\mathbb{R}$, όπου f η μηδενική συνάρτηση. Επομένως

$$\mathrm{d}(f_n, f) = \sup_{\mathbb{R}} |f_n| = \sup_{\mathbb{R}} \frac{x}{1 + nx^2}.$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο της f_n:

$$f_n'(x) = (1 - nx^2)/(1 + nx^2)^2.$$

Οι ρίζες της παραγώγου είναι τα σημεία $\pm 1/\sqrt{n}$ και ισχύει $f_n(\pm 1/\sqrt{n}) = \pm 1/(2\sqrt{n})$. Επίσης $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = 0$. Άρα η $|f_n|$ έχει μέγιστο ίσο με $1/(2\sqrt{n})$, δηλαδή $\mathrm{d}(f_n, f) = 1/(2\sqrt{n})$. Η ακολουθία αυτή τείνει στο 0 όταν $n \to \infty$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$.

Παράδειγμα 4.3.9 Έστω $f_n(x) = \frac{1}{nx}$, $x \in (0, \infty)$. Η $\{f_n\}$ συγκλίνει σημειακά πρός τη μηδενική συνάρτηση f. Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη διότι $\mathrm{d}(f_n, f) = \sup |1/(nx)| = +\infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 4.3.10 Έστω

$$f_n(x) = \frac{2n}{nx+3},\ x \in (0, \infty).$$

Τότε $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $(0, \infty)$, όπου $f(x) = 2/x$. Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $(0, \infty)$ διότι

$$\mathrm{d}_{(0,\infty)}(f_n, f) = \sup_{x\in(0,\infty)} \frac{6}{nx^2 + 3x} = +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Όμως $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[a, +\infty)$ για οποιοδήποτε $a > 0$, διότι

$$\mathrm{d}_{[a,\infty)}(f_n, f) = \sup_{x\in[a,\infty)} \frac{6}{nx^2 + 3x} \le \frac{6}{na^2 + 3a} \to 0,\ \text{όταν}\ \ n \to \infty.$$

Το ακόλουθο θεώρημα μας βοηθά να αποφασίσουμε (συνήθως σε αποδείξεις θεωρημάτων) αν μια ακολουθία συγκλίνει ομοιόμορφα χωρίς να γνωρίζουμε τη συνάρτηση όριο.

Θεώρημα 4.3.11 (Κριτήριο Cauchy για ομοιόμορφη σύγκλιση) *Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ που είναι ορισμένες στο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$. Η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα προς κάποια συνάρτηση στο E αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,\ \ \forall n, m \ge n_o,\ \forall x \in E. \tag{4.2}$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υποθέτουμε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E. Έστω f η συνάρτηση-όριο. Τότε υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},\ \ \forall x \in E,\ \forall n \ge n_o.$$

Επομένως, αν $x \in E$, $n \ge n_o$, $m \ge n_o$, τότε

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Αντιστρόφως: Αν $x \in E$, η πραγματική ακολουθία $\{f_n(x)\}$ είναι Cauchy· άρα συγκλίνουσα. Έστω $f(x)$ το όριό της. Έτσι ορίζεται μιά συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ και ισχύει $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E. Θα δείξουμε ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E.

Έστω $\varepsilon > 0$. Διαλέγουμε n_o τέτοιο ώστε να ισχύει η (4.2) με $\frac{\varepsilon}{2}$ στη θέση ε, δηλαδή

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ \forall n, m \geq n_o, \ \forall x \in E.$$

Για σταθεροποιημένο n παίρνουμε όριο $m \to \infty$ και προκύπτει

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \ \ \forall x \in E, \ \forall n \geq n_o,$$

δηλαδή $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E. □

Μιά σημαντική έννοια στην Ανάλυση είναι η έννοια της *ομοιόμορφης προσέγγισης*. Έστω $\mathcal{F}$ ένα σύνολο πραγματικών συναρτήσεων. Λέμε ότι η συνάρτηση f προσεγγίζεται ομοιόμορφα στο σύνολό E από συναρτήσεις τού συνόλου $\mathcal{F}$ αν γιά κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $g \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $\mathrm{d}_E(f, g) < \varepsilon$.

Θεώρημα 4.3.12 *Η συνάρτηση f προσεγγίζεται ομοιόμορφα στο E από συναρτήσεις τού συνόλου $\mathcal{F}$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $g_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει ακολουθία $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $g_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοι ώστε

$$\mathrm{d}_E(g_n, f) < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_o.$$

Θέτουμε $g = g_{n_o}$ και τελειώσαμε.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι γιά κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $g \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $\mathrm{d}_E(f, g) < \varepsilon$. Εφαρμόζοντας την πρόταση αυτή διαδοχικά για $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, βρίσκουμε μιά ακολουθία $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ με $\mathrm{d}_E(f, g_n) < \frac{1}{n}$. Προφανώς ισχύει $g_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E. □

4.4 Ομοιόμορφη σύγκλιση και συνέχεια

Στην παράγραφο αυτή θα αντιμετωπίσουμε το ερώτημα: Αν $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ ή $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ και όλες οι f_n είναι συνεχείς, είναι και η f συνεχής; Θα δούμε ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση, σε αντίθεση με τη σημειακή, εγγυάται τη συνέχεια της f.

Ας ξανακοιτάξουμε το Παράδειγμα 4.2.5: Έχουμε $f_n(x) = x^n, \ x \in [0, 1]$ και $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $[0, 1]$, όπου

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \in [0, 1), \\ 1, \ x = 1. \end{cases}$$

Όλες οι f_n είναι συνεχείς στο $[0, 1]$ ενώ η f δεν είναι συνεχής $[0, 1]$.

Θεώρημα 4.4.1 *Αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E, $x_o \in E$ και όλες οι f_n είναι συνεχείς στο x_o, τότε και η f είναι συνεχής στο x_o.*

Απόδειξη. Αν το x_o είναι απομονωμένο σημείο τού E, τότε η f είναι συνεχής στο x_o. Έστω, λοιπόν, ότι το x_o είναι σημείο συσσώρευσης τού E. Έστω $\varepsilon > 0$· από την υπόθεση, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall x \in E, \ \forall n \geq n_o.$$

Επειδή η συνάρτηση f_{n_o} είναι συνεχής στο x_o, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f_{n_o}(x) - f_{n_o}(x_o)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall x \in (x_o - \delta, x_o + \delta).$$

Άρα, για $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$,

$$|f(x) - f(x_o)| \leq |f(x) - f_{n_o}(x)| + |f_{n_o}(x) - f_{n_o}(x_o)| + |f_{n_o}(x_o) - f(x_o)| < \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο x_o. □

Το ακόλουθο είναι ένα μερικό αντίστροφο του Θεωρήματος 4.4.1.

Θεώρημα 4.4.2 (Κριτήριο Dini για ομοιόμορφη σύγκλιση) *Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ που είναι ορισμένες στο σύνολο $K \subset \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι*
(α) *$f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο K.*
(β) *Όλες οι f_n είναι συνεχείς στο K.*
(γ) *Η f είναι συνεχής στο K.*
(δ) *Το K είναι συμπαγές.*
(ε) *Η ακολουθία $\{f_n\}$ είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα.*
Τότε $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο K.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η $\{f_n\}$ είναι φθίνουσα· αν είναι αύξουσα, η απόδειξη είναι παρόμοια. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $g_n = f_n - f$ που είναι φθίνουσα και συγκλίνει σημειακά στο K προς τη μηδενική συνάρτηση. Αρκεί να δείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αν $x \in K$, τότε $0 \leq g_n(x) \searrow 0$. Άρα υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$0 \leq g_{n_x}(x) < \varepsilon.$$

Επειδή η g_{n_x} είναι συνεχής στο x, υπάρχει περιοχή $\Pi(x)$ του x έτσι ώστε

$$0 \leq g_{n_x}(t) < \varepsilon, \forall t \in \Pi(x) \cap K. \tag{4.4}$$

Η ακολουθία συναρτήσεων $\{g_n\}$ είναι φθίνουσα· άρα, λόγω της (4.4),

$$0 \leq g_n(t) < \varepsilon, \ \forall t \in \Pi(x) \cap K, \ \forall n \geq n_x. \tag{4.5}$$

Οι περιοχές $\Pi(x)$ αποτελούν ανοικτή κάλυψη του συμπαγούς συνόλου K. Επομένως υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_N$ τού K τέτοια ώστε

$$K \subset \Pi(x_1) \cup \Pi(x_2) \cup \cdots \cup \Pi(x_N).$$

Θέτουμε $n_o = \max\{n_{x_1}, n_{x_2}, \ldots, n_{x_N}\}$. Τότε, λόγω της (4.5),

$$0 \le g_n(t) < \varepsilon, \ \ \forall t \in K, \ \forall n \ge n_o, \tag{4.6}$$

που σημαίνει ότι η $\{g_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K προς τη μηδενική συνάρτηση. □

4.5 Ομοιόμορφη σύγκλιση και ολοκλήρωση

Ένα βασικό και συχνά εμφανιζόμενο ερώτημα στην Ανάλυση είναι πότε μπορούμε να βάλουμε το όριο μέσα στο ολοκλήρωμα. Πιό συγκεκριμένα: πότε ισχύει η ισότητα

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx. \tag{4.7}$$

Παράδειγμα 4.5.1 Έστω $f_n(x) = n\chi_{(0,1/n]}(x)$. Ισχύει $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $\mathbb{R}$, όπου f η μηδενική συνάρτηση. Όμως για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f_n = 1 \ne 0 = \int_0^1 f$.

Το ακόλουθο θεώρημα λέει ότι η ισότητα (4.7) ισχύει όταν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$.

Θεώρημα 4.5.2 *Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ που είναι όλες συνεχείς στο διάστημα $[a,b]$. Αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[a,b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f. \tag{4.8}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.4.1 η f είναι συνεχής, άρα και ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Επίσης ισχύει

$$0 \le \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f_n - f| \le (b-a)\,\mathrm{d}(f_n, f).$$

Λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(f_n, f) = 0$ και το θεώρημα αποδείχτηκε. □

Το θεώρημα αυτό μπορεί να αποδειχθεί με την υπόθεση ότι οι f_n είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ (και όχι κατ' ανάγκη συνεχείς)· βλ. τα βιβλία [;], [;], [;] ή την Άσκηση 4.11.24.

Παράδειγμα 4.5.3 Το σύνολο $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ είναι αριθμήσιμο. Έστω $q_1, q_2, q_3 \ldots$ μια αρίθμησή του. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x = q_1, q_2, \ldots, q_n, \\ 0, & \text{αν} \quad x \in [0,1] \setminus \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}. \end{cases}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση f_n έχει πεπερασμένου πλήθους σημεία ασυνέχειας. Άρα είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$· επίσης προφανώς ισχύει $\int_0^1 f_n = 0$.

Εξετάζουμε τώρα τη σύγκλιση της ακολουθίας $\{f_n\}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $[0,1]$, όπου

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x = \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & \text{αν} \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Υπολογίζοντας τα πάνω και κάτω αθροίσματα Riemann, βρίσκουμε ότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Η $\{f_n\}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

4.6 Ομοιόμορφη σύγκλιση και παραγώγιση

Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε το ερώτημα: Πότε μπορούμε να εναλλάξουμε τις πράξεις της παραγώγισης και του ορίου· πότε, δηλαδή, ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = [\lim_{n\to\infty} f_n]'; \tag{4.11}$$

Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση της $\{f_n\}$ δεν εγγυάται την ισχύ της (4.11).

Παράδειγμα 4.6.1 Έστω $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $x \in (0, 2\pi)$. Τότε $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$. Άρα η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(0,2\pi)$ προς τη μηδενική συνάρτηση. Όμως $f_n'(x) = \cos nx$. Η ακολουθία $\{f_n'\}$ δεν συγκλίνει (σημειακά) στο $(0,2\pi)$ διότι $f_n'(\pi) = (-1)^n$.

Κάτω από κάποιες άλλες προϋποθέσεις, η (4.11) ισχύει:

Θεώρημα 4.6.2 *Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ που είναι ορισμένες στο διάστημα $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι:*
(α) *Όλες οι f_n έχουν συνεχή παράγωγο στο $[a,b]$.*
(β) *Η πραγματική ακολουθία $\{f_n(x_o)\}$ συγκλίνει για ένα τουλάχιστο $x_o \in [a,b]$.*
(γ) *Η ακολουθία των παραγώγων $\{f_n'\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$.*
Τότε:
(i) *η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$ πρός μιά συνάρτηση f.*
(ii) *Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$.*
(iii) $f_n' \xrightarrow{o\mu} f'$.

Απόδειξη.

Πρώτα θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει σημειακά στο $[a,b]$ πρός μια συνάρτηση f. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα τού Λογισμού προκύπτει ότι

$$f_n(x) = f_n(x_o) + \int_{x_o}^{x} f_n', \quad x \in [a,b]. \tag{4.12}$$

Έστω $C = \lim_{n\to\infty} f_n(x_o)$ και έστω $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x),\ x \in [a,b]$. Από υπόθεση του θεωρήματος, $f_n' \xrightarrow{o\mu} g$ στο $[a,b]$. Παίρνουμε όρια στην (4.12) για $n \to \infty$ και, λόγω τού Θεωρήματος 4.5.2, προκύπτει

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = C + \int_{x_o}^{x} g, \quad x \in [a,b]. \tag{4.13}$$

Ορίζουμε $f(x) = C + \int_{x_o}^{x} g, \quad x \in [a,b]$. Η (4.13) σημαίνει ότι $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $[a,b]$. Επίσης από το Θεμελιώδες Θεώρημα τού Λογισμού προκύπτει ότι $f' = g$ και επόμένως $f_n' \xrightarrow{o\mu} f'$ στο $[a,b]$.

Μένει να δείξουμε ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[a,b]$: Γιά $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x_o) - f(x_o) + \int_{x_o}^{x} (f_n' - f') \right| \\
&\leq |f_n(x_o) - f(x_o)| + \int_{x_o}^{x} |f_n' - f'| \\
&\leq |f_n(x_o) - f(x_o)| + (b-a)\,\mathrm{d}(f_n', f').
\end{aligned}$$

Άρα $\mathrm{d}(f_n, f) \leq |f_n(x_o) - f(x_o)| + (b-a)\ \mathrm{d}(f_n', f')$. Παίρνοντας όρια για $n \to \infty$ προκύπτει ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[a,b]$. □

Το θεώρημα αυτό μπορεί να αποδειχθεί και χωρίς την υπόθεση ότι οι f_n' είναι συνεχείς αλλά η απόδειξη είναι πιό δύσκολη· βλ. τα βιβλία [;] ή [;].

4.7 Σειρές συναρτήσεων

Ορισμός 4.7.1 *Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ που είναι όλες ορισμένες στο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ που ορίζονται από την ισότητα*

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \quad x \in E.$$

Αν η $\{s_n\}$ συγκλίνει σημειακά στο E προς μιά συνάρτηση s, τότε λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει σημειακά στο E προς τη συνάρτηση s και γράφουμε

$$s \overset{\sigma}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Αν $s_n \xrightarrow{o\mu} s$ στο E, τότε λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E προς τη συνάρτηση s και γράφουμε

$$s \overset{o\mu}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Η ακολουθία $\{s_n\}$ ονομάζεται ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Παράδειγμα 4.7.2 Έστω $f_n(x) = x^{n-1}$, $x \in (-1,1)$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Άρα $s_n \xrightarrow{\sigma} s$ στο $(-1,1)$, όπου $s(x) = \frac{1}{1-x}$, δηλαδή

$$\frac{1}{1-x} \overset{\sigma}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}.$$

Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη διότι

$$\mathrm{d}(s_n, s) = \sup_{x \in (-1,1)} \frac{|x|^n}{|1-x|} = +\infty.$$

Εφαρμόζοντας στην ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\{s_n\}$ τα διάφορα θεωρήματα που αποδείξαμε στις προηγούμενες παραγράφους παίρνουμε ανάλογα θεωρήματα για τις σειρές συναρτήσεων. Έτσι προκύπτουν τα ακόλουθα:

Θεώρημα 4.7.3 *Αν* $s \overset{o\mu}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *στο* E, *τότε* $s \overset{\sigma}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Θεώρημα 4.7.4 (Κριτήριο Cauchy για ομοιόμορφη σύγκλιση) *Η σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *συγκλίνει ομοιόμορφα προς κάποια συνάρτηση στο* E *αν και μόνο αν για κάθε* $\varepsilon > 0$, *υπάρχει* $n_o \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε*

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \Big| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_o,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in E. \tag{4.14}$$

Θεώρημα 4.7.5 *Αν οι συναρτήσεις* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *είναι συνεχείς στο* $x_o \in E$ *και* $s \overset{o\mu}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *στο* E, *τότε η* s *είναι συνεχής στο* x_o.

Θεώρημα 4.7.6 *Αν οι συναρτήσεις* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *είναι συνεχείς στο διάστημα* $[a,b]$ *και* $s \overset{o\mu}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *στο* $[a,b]$, *τότε*

$$\int_a^b s = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

Θεώρημα 4.7.7 *Υποθέτουμε ότι:*
(α) *Όλες οι* f_n *έχουν συνεχή παράγωγο στο* $[a,b]$.
(β) *Η σειρά (αριθμών)* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_o)$ *συγκλίνει για ένα τουλάχιστο* $x_o \in [a,b]$.
(γ) *Η σειρά των παραγώγων* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* $[a,b]$.
Τότε:
(i) *η σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* $[a,b]$ *πρός μιά συνάρτηση* s.
(ii) *Η* s *είναι παραγωγίσιμη στο* $[a,b]$.
(iii) $s' \overset{o\mu}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$.

Θα αποδείξουμε τώρα το κριτήριο τού Weierstrass πού είναι το σημαντικότερο κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης για σειρές συναρτήσεων. Γιά άλλα κριτήρια παραπέμπουμε στα βιβλία [;] και [;].

Θεώρημα 4.7.8 *(Κριτήριο τού Weierstrass) Υποθέτουμε ότι υπάρχει μιά ακολουθία πραγματικών αριθμών* $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ *τέτοια ώστε*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \ \ \forall x \in E, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αν η σειρά (αριθμών) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *συγκλίνει, τότε η σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* E.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω της υπόθεσης, ισχύει

$$\Big|\sum_{n+1}^{n+p} f_k(x)\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k, \ \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}. \tag{4.15}$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon, \ \forall n \geq n_o, \forall p \in \mathbb{N}. \tag{4.16}$$

Από τις (4.15) και (4.16) προκύπτει ότι

$$\Big|\sum_{n+1}^{n+p} f_k(x)\Big| < \varepsilon, \ \forall x \in E, \forall n \geq n_o, \forall p \in \mathbb{N}. \tag{4.17}$$

Λόγω του κριτηρίου Cauchy (Θεώρημα 4.7.4), η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E. □

4.8 Η ομοιόμορφη σύγκλιση σε μετρικούς χώρους

Οι έννοιες της σημειακής και της ομοιόμορφης σύγκλισης μπορούν να οριστούν και για ακολουθίες πραγματικών ή μιγαδικών συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ). Λέμε ότι μιά ακολουθία συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{C}$ συγκλίνει σημειακά στο X προς τη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ αν

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \ \ \forall x \in X.$$

Γιά να ορίσουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση ορίζουμε πρώτα την απόσταση συναρτήσεων. Αν f, g είναι δύο μιγαδικές συναρτήσεις ορισμένες στο X, τότε

$$\mathrm{d}(f, g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

Λέμε ότι η $f_n : X \to \mathbb{C}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο X προς τη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ αν

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(f_n, f) = 0.$$

Τα θεωρήματα 4.3.6, 4.3.11, 4.3.12, 4.4.1, 4.4.2, 4.7.8 (με τις προφανείς τροποιήσεις στίς διατυπώσεις και στις αποδείξεις τους) συνεχίζουν να ισχύουν και στο γενικότερο πλαίσιο των μετρικών χώρων που περιγράψαμε παραπάνω.

4.9 Δυναμοσειρές

Οι δυναμοσειρές είναι μιά σημαντική κατηγορία σειρών συναρτήσεων.

Ορισμός 4.9.1 *Αν $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ είναι μιά ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x_o \in \mathbb{R}$, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_o)^k$ ονομάζεται δυναμοσειρά με συντελεστές a_k.*

Θεώρημα 4.9.2 *Δίνεται μιά ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ και ένα $x_o \in \mathbb{R}$. Θέτουμε*

$$R = \left(\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right)^{-1}.$$

(α) Η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_o)^k$ συγκλίνει σημειακά και απολύτως στο $(x_o - R, x_o + R)$.
(β) Αν $x \notin [x_o - R, x_o + R]$, η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_o)^k$ δεν συγκλίνει στο x.
(γ) Η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_o)^k$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$ με $[a,b] \subset (x_o - R, x_o + R)$.

Απόδειξη. (α) Εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας: Αν $|x - x_o| < R$, τότε

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k(x-x_o)^k|} = |x-x_o| \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|x-x_o|}{R} < 1.$$

(β) Αν $|x - x_o| > R$, τότε όπως στο (α),

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k(x-x_o)^k|} = \frac{|x-x_o|}{R} > 1.$$

(γ) Αν $x \in [a,b]$, τότε $|x - x_o| \leq \max\{|a|,|b|\} < R$. Διαλέγουμε r με $\max\{|a|,|b|\} < r < R$. Τότε

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Άρα υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{r}, \quad \forall k \geq n_o.$$

Επομένως

$$|a_k(x-x_o|^k| \leq \frac{|x-x_o|^k}{r^k} \leq \left(\frac{\max\{|a|,|b|\}}{r} \right)^k, \ \ \forall k \geq n_o.$$

Επειδή $\max\{|a|,|b|\} < r$, η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\max\{|a|,|b|\}}{r}\right)^k$ συγκλίνει. Άρα από το κριτήριο τού Weierstrass η δυναμοσειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-x_o)^k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$. $\square$

Ορισμός 4.9.3 *Ο αριθμός*

$$R = \left(\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right)^{-1}.$$

ονομάζεται ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_o)^k$ *και το διάστημα* $(-R,R)$ *ονομάζεται διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.*

Λόγω του Θεωρήματος 4.9.2, κάθε δυναμοσειρά ορίζει μιά συνάρτηση στο διάστημα σύγκλισής της.

4.10 Μιά συνεχής, πουθενά παραγωγίσιμη συνάρτηση

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο τού $\mathbb{R}$. Ο πρώτος που κατασκεύασε τέτοια συνάρτηση ήταν ο Weierstrass.

Θεώρημα 4.10.1 *Υπάρχει συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *που είναι συνεχής στο* $\mathbb{R}$ *αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο τού* $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\phi(x) = |x|, \quad x \in [-1,1]. \tag{4.18}$$

Επεκτείνουμε τη ϕ στο $\mathbb{R}$ θέτοντας

$$\phi(x+2) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.19}$$

Έτσι έχουμε ορίσει μιά συνεχή περιοδική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με περίοδο 2. Για τη ϕ ισχύει

$$|\phi(x) - \phi(y)| \le |x-y|, \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{4.20}$$

Ορίζουμε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.21}$$

Λόγω τού Θεωρήματος 4.7.8, η παραπάνω σειρά συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και επόμένως η f είναι καλά ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε τώρα ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x. Αρκεί να βρόυμε μιά ακολουθία $\delta_m \to 0$ τέτοια ώστε η ακολουθία

$$\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}$$

να μή συγκλίνει, όταν $m \to \infty$.

Θεωρούμε την ακολουθία

$$\delta_m = \pm\frac{1}{2}\,\frac{1}{4^m}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{4.22}$$

όπου το πρόσημο επιλέγεται έτσι ώστε κανένας ακέραιος να μην είναι ανάμεσα στο $4^m x$ και στο $4^m(x+\delta_m)$. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε διότι $4^m|\delta_m| = \frac{1}{2}$.

Ορίζουμε

$$s_n = \frac{\phi(4^n(x+\delta_m)) - \phi(4^n x)}{\delta_m} \tag{4.23}$$

και παρατηρούμε ότι
(α) $s_n = 0$ όταν $n > m$ (ο $4^m\delta_m$ είναι άρτιος ακέραιος σε αυτή την περίπτωση),
(β) $|s_n| \leq 4^n$ όταν $0 \leq n \leq m$ (λόγω της (4.20)).
(γ) $|s_m| = 4^m$.

Τελικά λοιπόν έχουμε

$$\left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| = \left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n s_n\right| \geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \frac{1}{2}(3^m+1).$$

□

4.11 Ασκήσεις

4.11.1 Αποδείξτε το Θεώρημα 4.2.6.

4.11.2 Για μιά πραγματική ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την ακολουθία των σταθερών συναρτήσεων $f_n(x) = a_n,\ x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $\mathbb{R}$, όπου f είναι η σταθερή συνάρτηση $f(x) = a,\ x \in \mathbb{R}$.

4.11.3 Έστω f μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $E \subset \mathbb{R}$. Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n = f$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E.

4.11.4 Εξετάστε τη σύγκλιση (σημειακή και ομοιόμορφη) της ακολουθίας συναρτήσεων $f_n(x) = x^{2n}/(1+x^{2n}),\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.

4.11.5 Δείξτε ότι στο Παράδειγμα 4.2.2 η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$ αλλά δεν είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$. Εξετάστε επίσης τη σύγκλιση της ακολουθίας των παραγώγων.

4.11.6 Σωστό ή Λάθος;
(α) Αν $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E και καθεμία από τις συναρτήσεις f_n είναι φθίνουσα στο E τότε και η f είναι φθίνουσα στο E.

(β) Αν $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E και καθεμία από τις συναρτήσεις f_n είναι γνησίως φθίνουσα στο E τότε και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο E.
(γ) Αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E και καθεμία από τις συναρτήσεις f_n είναι φραγμένη στο E τότε η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο E.
(δ) Αν οι συναρτήσεις f_n είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ σε κάθε κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
(ε) Αν οι συναρτήσεις f_n είναι συνεχείς στο $[0, 1]$ και $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[0, 1]$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-1/n} f_n = \int_0^1 f.$$

(στ) Αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ σε κάθε διάστημα $[a, b]$, τότε $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $\mathbb{R}$.

4.11.7 Βρείτε μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : E \to \mathbb{R}$ που να συγκλίνει σημειακά αλλά όχι ομοιόμορφα στο E και η οριακή συνάρτηση είναι συνεχής στο E.

4.11.8 Βρείτε μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ που να συγκλίνει σημειακά στο $[0, 1]$ πρός τη μηδενική συνάρτηση αλλά ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \neq 0.$$

4.11.9 Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και $f_n(x) := f(x + \frac{1}{n})$, δείξτε ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $\mathbb{R}$.

4.11.10 Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, \ x \in [0, \frac{1}{n}), \\ \frac{1}{(n+1)x-1}, \ x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

4.11.11 Έστω $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n, \ x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$, όπου p μια πραγματική παράμετρος. Δείξτε ότι για κάθε τιμή τού p, η $\{f_n\}$ συγκλίνει σημειακά στο $[0, 1]$ προς κάποια συνάρτηση f. Για ποιές τιμές τού p η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη; Για ποιές τιμές τού p ισχύει $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f$;

4.11.12 Έστω $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}, \ x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει σημειακά αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ προς μιά συνάρτηση f. Εξετάστε αν ισχύει η ισότητα $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f$;

4.11.13 Έστω $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}, \ x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.
(α) Δείξτε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ προς μια συνάρτηση f.
(β) Δείξτε ότι η $\{f_n'\}$ συγκλίνει σημειακά στο $\mathbb{R}$ προς μια συνάρτηση g.
(γ) Δείξτε ότι $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \neq 0$ αλλά $f'(0) \neq g(0)$.
(δ) Για ποιά διάστηματα $[a, b]$ ισχύει $f_n' \xrightarrow{o\mu} g$ στο $[a, b]$;

4.11.14 Έστω $f_n(x) = \frac{1}{ne^{n^2x^2}}, \ x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.
(α) Δείξτε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ προς μια συνάρτηση f.
(β) Δείξτε ότι η $\{f_n'\}$ συγκλίνει σημειακά στο $\mathbb{R}$ προς τη συνάρτηση f'.
(γ) Δείξτε ότι η σύγκλιση της $\{f_n'\}$ δεν είναι ομοιόμορφη σε κάθε διάστημα που περιέχει το 0.
(δ) Δείξτε ότι η σύγκλιση της $\{f_n'\}$ είναι ομοιόμορφη σε κάθε κέιστό διάστημα που δεν περιέχει το 0.

4.11.15 Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = (1 + x/n)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα προς την e^x σε κάθε κλειστό διάστημα. Δείξτε επίσης ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$.

4.11.16 Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων, βρείτε το σημειακό τους όριο και τα διαστήματα στα οποία η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. Επίσης εξετάστε τη σύγκλιση των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων.
(α) $f_n(x) = xe^{-nx},\ x \in [0, \infty)$.
(β) $f_n(x) = nxe^{-nx},\ x \in [0, \infty)$.

4.11.17* Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = x^n,\ x \in [0, 1],\ n \in \mathbb{N}$ και η συνεχής συνάρτηση $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $g(1) = 0$. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $\{gf_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

4.11.18 Μελετήστε σε σχέση με το κριτήριο τού Dini (Θεώρημα 4.4.2) τις παρακάτω ακολουθίες συανρτήσεων:
(α) $f_n(x) = 1 - x^n,\ x \in [0, 1]$.
(β) $f_n(x) = -x^2/n,\ x \in \mathbb{R}$.
(γ)
$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν} \quad x \in (0, 1/n), \\ 1, & \text{αν} \quad x \in \{0\} \cup [1/n, 1]. \end{cases}$$
(δ)
$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{αν} \quad x \in (2/n, 2], \\ n^2x^2 - 2nx, \quad \text{αν} \quad x \in [0, 2/n]. \end{cases}$$

4.11.19 Αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E και καθεμιά από τις συναρτήσεις f_n είναι φραγμένη στο E, δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο E.

4.11.20 Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων $f_n : E \to [a, b]$. Αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[a, b]$, δείξτε ότι
$g \circ f_n \xrightarrow{o\mu} g \circ f$ στο E.

4.11.21* Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι στο Θεώρημα 4.4.2 (του Dini) η υπόθεση της συμπάγειας τού K δεν μπορεί να παραληφθεί.

4.11.22 Υποθέτουμε ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E και ότι καθεμιά από τις f_n είναι συνεχής στο E. Αν $x \in E$ και $\{x_n\}$ είναι μια ακολουθία στο E τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.
(Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία συναρτήσεων *δεν* συγκλίνει ομοιόμορφα).

4.11.23* Έστω ότι η $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την ανισότητα $|f_n(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in [a, b]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ τέτοια ώστε το όριο $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(q)$ να υπάρχει για κάθε $q \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$.

4.11.24* Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ που είναι όλες ολοκληρώσιμες (κατά Riemann) στο διάστημα $[a, b]$. Αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[a, b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

4.11.25 Δίνονται συναρτήσεις $\{f_n\}$ και f που είναι ολοκληρώσιμες (κατά Riemann) στο διάστημα $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι υπάρχρι $M>0$ τέτοιο ώστε $|f_n(x)|\leq M$ και $|f(x)|\leq M$, γιά κάθε $x\in[a,b]$. Αν για κάθε $\eta>0$, $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[a+\eta,b-\eta]$, τότε ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n=\int_a^b f.$$

4.11.26* Βρείτε δύο ακολουθίες συναρτήσεων $\{f_n\}$ και $\{g_n\}$ που να συγκλίνουν ομοιόμορφα σε ένα σύνολο E αλλά η $\{f_n g_n\}$ να μην συγκλίνει ομοιόμορφα στο E.

4.11.27* Βρείτε μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε: (α) Για κάθε $x\in[0,1]$, η πραγματική ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει, και (β) ισχύει $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n=0$.

4.11.28* Αποδείξτε το ακόλουθο θεώρημα εναλλαγής των ορίων: Δίνονται μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ που είναι ορισμένες στο σύνολο $E\subset\mathbb{R}$ και ένα σημείο συσσώρευσης x_o τού E. Υποθέτουμε ότι:
(α) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, υπάρχει το όριο $a_n:=\lim_{x\to x_o}f_n(x)$.
(β) $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E.
Τότε τα όρια $\lim_{n\to\infty}a_n$ και $\lim_{x\to x_o}f(x)$ υπάρχουν και είναι ίσα, δηλαδή

$$\lim_{x\to x_o}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_o}f_n(x).$$

4.11.29* Δίνονται μιά ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n:E\to\mathbb{R}$ και ένα πυκνό υποσύνολο D του E. Αν $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E και $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο D, δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο E.

4.11.30* (Όριο διπλής ακολουθίας) Δίνεται μια διπλή ακολουθία, δηλαδή μια συνάρτηση $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, ορίζουμε τη συνάρτηση $g_n:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ με την ισότητα

$$g_n(m)=f(m,n),\ \ m\in\mathbb{N}.$$

Υποθέτουμε ότι $g_n \xrightarrow{o\mu} g$ στο $\mathbb{N}$, όπου $g(m)=\lim_{n\to\infty}f(m,n)$. Αν το επαναλαμβανόμενο όριο

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}f(m,n)$$

υπάρχει, δείξτε ότι το διπλό όριο $\lim_{m,n\to\infty}f(m,n)$ επίσης υπάρχει, και ισχύει

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}f(m,n)=\lim_{m,n\to\infty}f(m,n).$$

Ασκήσεις στις σειρές συναρτήσεων

4.11.31 Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάλογο του κριτηρίου του Dini (Θεώρημα 4.4.2) για σειρές συναρτήσεων.

4.11.32 Δίνεται η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x}.$$

Βρείτε τα σύνολα στα οποία συγκλίνει σημειακά και ομοιόμορφα. Εξετάστε αν η συνάρτηση-όριο είναι συνεχής και φραγμένη.

4.11.33 Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ \frac{x^2+n}{n^2}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα.

4.11.34 Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν απολύτως, δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

4.11.35 Εξετάστε τη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{1+n^3x^2}.$$

4.11.36 Αποδείξτε ότι αν $\alpha > \frac{1}{2}$, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a,b]$. Είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$;

4.11.37 (α) Για ποιά x η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ συγκλίνει; Σε ποιά διαστήματα είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη;
(β) Δείξτε ότι

$$\int_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\,dx = \frac{e}{e^2-1}.$$

4.11.38 Δίνεται μιά δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_o)^k$ με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_o)^k, \quad x\in(x_o-R, x_o+R).$$

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο (x_o-R, x_o+R).
(β) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_o-R, x_o+R) και μάλιστα η παράγωγός της υπολογίζεται με παραγώγιση της δυναμοσειράς όρο προς όρο, δηλαδή

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_o)^{k-1}, \quad x\in(x_o-R, x_o+R).$$

(γ) Αν $[a,b]\subset(x_o-R, x_o+R)$, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατα Riemann στο $[a,b]$ και μάλιστα το ολοκλήρωμά της υπολογίζεται με ολοκλήρωση της δυναμοσειράς όρο προς όρο, δηλαδή

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}\left((b-x_o)^{k+1}-(a-x_o)^{k+1}\right).$$

4.11.39 Δίνεται μιά δυναμοσειρά $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_o)^k$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Δείξτε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ισχύει $f^{(k)}(x_o) = k!a_k$.

4.11.40* Ορίζουμε τη συνεχή συνάρτηση $f_1 : [0,1] \to [0,1]$ ως εξής: Θέτουμε $f_1(0) = 0$, $f_1(1/3) = 1/2 = f(2/3)$, $f_1(1) = 1$ και στη συνέχεια επεκτείνουμε γραμμικά στα διαστήματα $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$.
Ορίζουμε τη συνεχή συνάρτηση $f_2 : [0,1] \to [0,1]$ ως εξής: Θέτουμε $f_2(x) = f_1(x)$ για $x = 0, 1/3, 2/3, 1$ και $f_2(1/9) = 1/4 = f_2(2/9)$, $f_2(7/9) = 3/4 = f(8/9)$ και στη συνέχεια επεκτείνουμε γραμμικά στα διαστήματα $[0,1/9]$, $[1/9,2/9]$, $[2/9,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,7/9]$, $[7/9,8/9]$, $[8/9,1]$.
Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία κατασκευάζουμε μία ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$.
(α) Δείξτε ότι

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

(β) Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$f_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1} - f_n)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ προς τη συνάρτηση τού Cantor.