Κεφάλαιο 1

Αριθμοί και Ακολουθίες

Μερικοί συμβολισμοί που θα χρησιμοποιούμε πολύ συχνά:
$\mathbb{R}$ Το σύνολο των πραγματικών αριθμών.
$\mathbb{Q}$ Το σύνολο των ρητών αριθμών.
$\mathbb{Z}$ Το σύνολο των ακεραίων αριθμών.
$\mathbb{N}$ Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\{1, 2, \dots\}$.

1.1 Πραγματικοί αριθμοί

Έστω $E \subset \mathbb{R}$. Το E ονομάζεται *άνω φραγμένο* αν υπάρχει αριθμός $b \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$\forall x \in E, \;\; x \leq b.$$

Κάθε τέτοιος αριθμός b ονομάζεται *άνω φράγμα* τού E. Ο αριθμός $M \in \mathbb{R}$ ονομάζεται μέγιστο τού E αν είναι άνω φράγμα τού E και $M \in E$. Το μέγιστο τού E συμβολίζεται με $\max E$.

Το E ονομάζεται *κάτω φραγμένο* αν υπάρχει αριθμός $a \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$\forall x \in E, \;\; x \geq a.$$

Κάθε τέτοιος αριθμός a ονομάζεται *κάτω φράγμα* τού E. Ο αριθμός $m \in \mathbb{R}$ ονομάζεται ελάχιστο τού E αν είναι κάτω φράγμα τού E και $m \in E$. Το ελάχιστο τού E συμβολίζεται με $\min E$.

Το E ονομάζεται *φραγμένο* αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Γιά παράδειγμα το διάστημα $E = (0, 1]$ είναι φραγμένο σύνολο και ισχύει $\sup E = \max E = 1$ και $\inf E = 0$· το E δεν έχει ελάχιστο.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών ικανοποιεί το παρακάτω αξίωμα:

Αξίωμα της πληρότητας: Έστω E ένα μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Το σύνολο των άνω φραγμάτων τού E έχει ελάχιστο.

Ορισμός 1.1.1 *Αν E είναι ένα μη κενο, άνω φραγμένο σύνολο, το ελάχιστο άνω φράγμα του (που υπάρχει λόγω τού αξιώματος της πληρότητας) ονομάζεται*

supremum ή άνω πέρας *τού* E *και συμβολίζεται με* $\sup E$. *Αν το* E *είναι μη κενό αλλά δεν είναι άνω φραγμένο, ορίζουμε* $\sup E = +\infty$. *Τέλος ορίζουμε* $\sup \varnothing = -\infty$.

Πρόταση 1.1.2 *Έστω* E *ένα μη κενό, κάτω φραγμένο υποσύνολο τού* $\mathbb{R}$. *Το σύνολο των κάτω φραγμάτων τού* E *έχει μέγιστο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $-E = \{-x : x \in E\}$. Το $-E$ είναι άνω φραγμένο· έστω $S = \sup(-E)$. Θα δείξουμε ότι το $-S$ είναι κάτω φράγμα τού E. Έστω $x \in E$. Τότε $-x \in -E$. Επειδή $S = \sup(-E)$, ισχύει $-x \leq S$. Άρα $x \geq -S$, δηλαδή το $-S$ είναι κάτω φράγμα τού E. Τέλος αποδεικνύουμε ότι το $-S$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα τού E. Έστω a ένα κάτω φράγμα του E. Τότε το $-a$ είναι άνω φράγμα τού $-E$. Επειδή $S = \sup(-E)$, ισχύει $S \leq -a$, δηλαδή $a \leq -S$. □

Ορισμός 1.1.3 *Αν* E *είναι ένα μη κενό, κάτω φραγμένο σύνολο, το μέγιστο κάτω φράγμα του (που υπάρχει λόγω τού Θεωρήματος* 1.1.2*) ονομάζεται* infimum ή κάτω πέρας *τού* E *και συμβολίζεται με* $\inf E$. *Αν το* E *είναι μη κενό αλλά δεν είναι κάτω φραγμένο, ορίζουμε* $\inf E = -\infty$. *Επίσης ορίζουμε* $\inf \varnothing = +\infty$.

Παρατήρηση 1.1.4 *Ένα υποσύνολο τού* $\mathbb{R}$ *μπορεί να μην έχει μέγιστο ή ελάχιστο· όμως κάθε υποσύνολο τού* $\mathbb{R}$ *έχει supremum και infimum. Αν ένα σύνολο* E *έχει μέγιστο τότε* $\max E = \sup E$· *αν το* E *έχει ελάχιστο, τότε* $\min E = \inf E$.

Πρόταση 1.1.5 *(*Αρχιμήδεια ιδιότητα τού $\mathbb{R}$*) Αν* x, y *είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει* $n \in \mathbb{N}$, *τέτοιο ώστε* $nx > y$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση είναι ψευδής. Τότε το y είναι άνω φράγμα τού συνόλου $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$. Έστω $S := \sup A \in \mathbb{R}$. Επειδή $S - x < S$, το $S - x$ δεν είναι άνω φράγμα τού A. Άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $S - x < mx$, δηλαδή $S < (m+1)x \in A$. Άτοπο. □

Παράδειγμα 1.1.6 Έστω $E = \mathbb{N} \cup \{-1 + n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$. Το E δεν είναι άνω φραγμένο· άρα $\sup E = +\infty$. Επίσης $\inf E = -1$. Το E δεν έχει ούτε ελάχιστο, ούτε μέγιστο.

Παράδειγμα 1.1.7 Αν $E = (0,1) \cup \{2^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$, τότε $\sup E = \max E = 2$ και $\inf E = 0$. Το E δεν έχει ελάχιστο.

Πρόταση 1.1.8 (α) *Αν* E *είναι ένα μη κενό, άνω φραγμένο σύνολο και* $S \in \mathbb{R}$, *τότε*

$$S = \sup E \iff \begin{cases} \forall x \in E, \;\; x \leq S, \\ \forall \varepsilon > 0, \; \exists a \in E \quad \text{τέτοιο ώστε} \quad a > S - \varepsilon. \end{cases} \tag{1.1}$$

(β) *Αν E είναι ένα μη κενό, κάτω φραγμένο σύνολο και $s \in \mathbb{R}$, τότε*

$$s = \inf E \iff \begin{cases} \forall x \in E, \;\; x \geq s, \\ \forall \varepsilon > 0, \; \exists b \in E \quad \textit{τέτοιο ώστε} \quad b < s + \varepsilon. \end{cases} \tag{1.2}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο το (α). Η απόδειξη τού (β) είναι παρόμοια. Έστω ότι $S = \sup E$. Τότε το S είναι άνω φράγμα τού E. Άρα $\forall x \in E$, $x \leq S$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή το S είναι το ελάχιστο άνω φράγμα τού E, ο αριθμός $S - \varepsilon$ *δεν* είναι άνω φράγμα του E. Άρα υπάρχει $a \in E$ με $a > S - \varepsilon$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε: (i) $\forall x \in E, \;\; x \leq S$ και (ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in E$ τέτοιο ώστε $a > S - \varepsilon$. Η (i) λέει ότι το S είναι άνω φράγμα τού E. Ας υποθέσουμε ότι το S δεν είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του E. Τότε υπάρχει ένα άνω φράγμα S' τού E με $S' < S$. Θέτουμε $\varepsilon = S - S'$. Λόγω της (ii) $\exists a \in E$ τέτοιο ώστε $a > S - \varepsilon = S'$. Άτοπο διότι το S' είναι άνω φράγμα τού E. Άρα $S = \sup E$. □

Πρόταση 1.1.9 *Για το περίβλημα $\overline{E}$ τού E ισχύει*

$$\sup \overline{E} = \sup E \quad \textit{και} \quad \inf \overline{E} = \inf E.$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την ισότητα για τα άνω πέρατα. Άν το $\overline{E}$ είναι το κενό σύνολο, τότε $\sup \overline{E} = \sup E = -\infty$. Αν το $\overline{E}$ δεν είναι άνω φραγμένο τότε και το E δεν είναι άνω φραγμένο. Άρα $\sup \overline{E} = \sup E = +\infty$. Έστω $S := \sup \overline{E} \in \mathbb{R}$. Τότε γιά κάθε $x \in E \subset \overline{E}$, ισχύει $x \leq S$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $a \in \overline{E}$ με $a > S - \varepsilon$. Επειδή $a \in \overline{E}$, υπαρχει ακολουθία $\{x_n\}$ σημείων τού E με $x_n \to a$. Άρα υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a - x_{n_o}| < a - (S - \varepsilon)$ το όποίο συνεπάγεται ότι $x_{n_o} > a - [a - (S - \varepsilon)] = S - \varepsilon$. Από την Πρόταση 1.1.8 προκύπτει ότι $S = \sup E$. Παρομοίως αποδεικνύεται ότι $\inf \overline{E} = \inf E$. □

Πρόταση 1.1.10 *Αν E είναι ένα μη κενό σύνολο, τότε υπάρχουν ακολουθίες $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ και $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ τέτοιες ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup E \quad \textit{και} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \inf E.$$

Απόδειξη. Πρώτα εξετάζουμε την περίπτωση που το E δεν είναι κάτω φραγμένο. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $b_n \in E$ με $b_n \leq -n$. Άρα $b_n \to -\infty = \inf E$.

Υποθέτουμε τώρα ότι το E είναι κάτω φραγμένο. Έστω $s := \inf E \in \mathbb{R}$. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.1.8(β) για $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ και βρίσκουμε αριθμούς $b_n \in E$ με $b_n < s + \frac{1}{n}$. Επειδή $s = \inf E$ και $b_n \in E$, έχουμε $s \leq b_n$. Άρα

$$s \leq b_n \leq s + \frac{1}{n}, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} b_n = s$.

Η απόδειξη για το $\sup E$ είναι παρόμοια. □

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό υποσύνολο τού $\mathbb{R}$, δηλαδή $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$· το ίδιο ισχύει και για το σύνολο των άρρητων αριθμών $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Θεώρημα 1.1.11 (α) *Αν* $a, b \in \mathbb{R}$ *και* $a < b$, *τότε υπάρχουν* $q \in \mathbb{Q}$ *και* $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *τέτοια ώστε* $q, r \in (a, b)$.
(β) *Για κάθε* $a \in \mathbb{R}$ *υπάρχει ακολουθία* $\{q_n\} \subset \mathbb{Q}$ *τέτοια ώστε* $\lim_{n\to\infty} q_n = a$.
(γ) *Για κάθε* $a \in \mathbb{R}$ *υπάρχει ακολουθία* $\{r_n\} \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ *τέτοια ώστε* $\lim_{n\to\infty} r_n = a$.

Απόδειξη. (α) Εφαρμόζοντας την Πρόταση 1.1.5 για $x = b - a$ και $y = 1$, βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ με $n(b-a) > 1$, δηλαδή $nb - na > 1$. Επειδή οι αριθμοί έχουν διαφορά μεγαλύτερη τού 1, θα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $na < m < nb$, δηλαδή $a < m/n < b$. Άρα για το ρητό αριθμό $q := m/n$ ισχύει $q \in (a, b)$. Για να βρούμε άρρητο στο (a, b) εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.1.5 για $x = (b-a)\sqrt{2}$ και $y = 1$ και εργαζόμαστε όπως παραπάνω.
(β) Εφαρμόζοντας το (α) για $b = a + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε μιά ακολουθία ρητών $\{q_n\}$ με $a < q_n < a + \frac{1}{n}$. Προφανώς $q_n \to a$.
(γ) Η απόδειξη είναι παρόμοια με τού (β). □

Ορισμός 1.1.12 *Έστω* $f : E \to \mathbb{R}$ *μιά συναρτηση. Ορίζουμε το supremum και το infimum της* f *στο* E *με τις ισότητες*

$$\sup_{x\in E} f(x) = \sup\{f(x) : x \in E\} \quad \textit{και} \quad \inf_{x\in E} f(x) = \inf\{f(x) : x \in E\}.$$

Χρησιμοποιούμε επίσης τους συμβολισμούς $\sup_E f$ *και* $\inf_E f$. *Ειδικά για ακολουθίες* $\{a_n\}$ *χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς*

$$\sup_n a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \textit{και} \quad \inf_n a_n := \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Αν η συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ έχει μέγιστο (ελάχιστο), τότε $\max_E f(x) = \sup f(x)$ $(\min_E f(x) = \inf f(x))$. Γιά παράδειγμα, κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα έχεο μέγιστο και ελάχιστο.

Παράδειγμα 1.1.13 Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η f έχει μέγιστο στο 0. Άρα $\sup_{\mathbb{R}} f(x) = \max_{\mathbb{R}} f(x) = f(0) = 1$. Επειδή $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, ισχύει $\inf_E f(x) = 0$. Η f δεν έχει ελάχιστο.

Πρόταση 1.1.14 *Αν* $f : E \to \mathbb{R}$ *είναι μιά συνάρτηση,* $\xi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *ένα σημείο συσσώρευσης τού* E *και αν τό όριο* $\lim_{x\to\xi} f(x)$ *υπάρχει τότε*

$$\inf_E f \le \lim_{x\to\xi} f(x) \le \sup_E f.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $R_f := \{f(x) : x \in E\}$. Ισχύει $\lim_{x\to\xi} f(x) \in \overline{R_f}$. Λόγω της Πρότασης 1.1.9,

$$\inf_E f = \inf R_f = \inf \overline{R_f} \le \lim_{x\to\xi} f(x) \le \sup \overline{R_f} = \sup R_f = \sup_E f.$$

□

Θεώρημα 1.1.15 (α) *Αν* $\{a_n\}$ *είναι μιά αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n$.
(β) *Αν* $\{b_n\}$ *είναι μιά φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε* $\lim_{n\to\infty} b_n = \inf_n a_n$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το (α)· η απόδειξη του (β) είναι παρόμοια.

Υποθέτουμε πρώτα ότι η $\{a_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη. Έστω $M > 0$. Υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_{n_o} > M$. Επειδή η $\{a_n\}$ είναι άυξουσα $a_n > M$ για κάθε $n \geq n_o$. Άρα

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty = \sup_n a_n.$$

Αν η $\{a_n\}$ είναι άνω φραγμένη, τότε $\sup_n a_n = S \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω της Πρότασης 1.1.8, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_{n_o} > S - \varepsilon$. Επειδή η $\{a_n\}$ είναι άυξουσα, ισχύει $S \geq a_n > S-\varepsilon$, $\forall n \geq n_o$, δηλαδή $|a_n - S| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_o$. Άρα $\lim_{n\to\infty} a_n = S$. □

Θεώρημα 1.1.16 *(*Αρχή τού κιβωτισμού*) Αν* $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, *είναι κλειστά διαστήματα με* $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$, *τότε* $\cap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$. *Αν επιπλέον* $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, *τότε η τομή* $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ *περιέχει ακριβώς ένα σημείο.*

Απόδειξη. Ισχύει $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, λόγω και τού Θεωρήματος 1.1.15, υπάρχουν τα όρια $a := \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n \in \mathbb{R}$ και $b := \lim_{n\to\infty} b_n = \inf_n b_n \in \mathbb{R}$, και μάλιστα ισχύει $a \leq b$. Θα δείξουμε ότι $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$. Πράγματι, αν $x \in I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $a_n \leq x \leq b_n$, $\forall n$ και επομένως $a \leq x \leq b$. Αντιστρόφως, αν $x \in [a, b]$, τότε $x \in [a_n, b_n]$, $\forall n$, δηλαδή $x \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Τέλος, αν $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, τότε $a = b$. Άρα $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$. □

1.2 Αριθμήσιμα σύνολα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

Ορισμός 1.2.1 *Δυό σύνολα* A, B *ονομάζονται* ισοδύναμα *αν υπάρχει συνάρτηση* $f : A \to B$ *πού είναι* $1-1$ *και επί. Αν τα* A, B *είναι ισοδύναμα σύνολα, γράφουμε* $A \sim B$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Παράδειγμα 1.2.2 Ισχύει $\mathbb{R} \sim (-\pi/2, \pi/2)$ διότι η συνάρτηση $x \mapsto \tan^{-1} x$ απεικονίζει αμφιμονότιμα το $\mathbb{R}$ επί τού $(-\pi/2, \pi/2)$.

Πρόταση 1.2.3 *Αν* $f : A \to B$ *είναι μιά συνάρτηση, τότε το* $f(A)$ *είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο τού* A.

Απόδειξη. Έστω $y \in f(A)$. Τότε το σύνολο $f^{-1}(\{y\})$ είναι μη κενό. Επιλέγουμε ένα στοιχείο του x και ορίζουμε $g(y) := x$. Έτσι ορίζεται μια $1-1$ συνάρτηση $g : f(A) \to A$. Έστω $A_1 := g(f(A)) \subset A$. Η g είναι $1-1$ συνάρτηση τού $f(A)$ επί τού A_1. Άρα $f(A) \sim A_1$. □

Ορισμός 1.2.4 *Ένα σύνολο A ονομάζεται* πεπερασμένο *αν $A = \varnothing$ ή $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Αλλιώς το A ονομάζεται* άπειρο. *Ένα σύνολο A ονομάζεται* αριθμήσιμο *αν $A \sim \mathbb{N}$. Ένα σύνολο πού δεν είναι ούτε πεπερασμένο ούτε αριθμήσιμο ονομάζεται* υπεραριθμήσιμο. *Αν ένα σύνολο είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο τότε λέμε ότι είναι* το πολύ αριθμήσιμο.

Παράδειγμα 1.2.5 Το $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο. Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ με $f(n) = 2n$ αν $n \geq 1$ και $f(n) = -2n + 1$ αν $n \leq 0$. Η f είναι $1-1$ και επί. Άρα $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1.2.6 Ισχύει $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. Για να αποδείξουμε αυτή την ισοδυναμία χρησιμοποιούμε το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας αριθμών. Κάθε $k \in \mathbb{N}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ώς $k = 2^{m-1}(2n-1)$, όπου m, n κατάλληλοι φυσικοί. Ορίζουμε $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $f(m, n) = 2^{m-1}(2n-1)$. Λόγω της παραπάνω παρατήρησης η f είναι επί. Εύκολα φαίνεται ότι είναι και $1-1$.

Πρόταση 1.2.7 *Αν $A \subset \mathbb{N}$ και A άπειρο, τότε $A \sim \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Το A είναι άπειρο, άρα μη κενό. Έστω $x_1 = \min A$. Το $A \setminus \{x_1\}$ είναι μη κενο. Έστω $x_2 = \min(A \setminus \{x_1\})$. Το $A \setminus \{x_1, x_2\}$ είναι μη κενο. Έστω $x_3 = \min(A \setminus \{x_1, x_2\})$. Συνεχιζοντας επαγωγικά βρίσκουμε $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in A$ με $x_n = \min(A \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\})$. Επειδή το A είναι άπειρο, το σύνολο $\{x_1, x_2, \dots\}$ είναι επίσης άπειρο.

Θα δείξουμε ότι $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Έστω $x \in A \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$. Υπάρχει ένα τουλάχιστον x_k με $x_k > x$ (διότι αν $x_k \leq x$, $\forall k \in \mathbb{N}$, τότε το $\{x_1, x_2, \dots\}$ θα ήταν φραγμένο). Άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_1 < \dots < x_{n-1} < x < x_n$. Άτοπο διότι $x_n = \min A \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Ορίζουμε $f : A \to \mathbb{N}$ με $f(x_k) = k$. Η f είναι προφανώς $1-1$ και επί· άρα $A \sim \mathbb{N}$. □

Παρατήρηση 1.2.8 *Αν A είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο, τότε υπάρχει $f : \mathbb{N} \to A$ που είναι $1-1$ και επί. Θέτουμε $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Μιά τέτοια γραφή τού A ονομάζεται* αρίθμηση *τού A.*

Οι παρακάτω προτάσεις αποδεικνύονται με τη μέθοδο της απόδειξης της Πρότασης 1.2.7. Η αποδείξεις αφήνονται γιά άσκηση.

Πρόταση 1.2.9 *Αν A είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο και $B \subset A$, τότε το B είναι το πολύ αριθμήσιμο.*

Πρόταση 1.2.10 *Κάθε άπειρο σύνολο περιέχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο.*

Πρόταση 1.2.11 *Αν A, B είναι δύο το πολύ αριθμήσιμα σύνολα, τότε το $A \times B$ είναι το πολύ αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Αν $A = \varnothing$ ή $B = \varnothing$ τότε η Πρόταση είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $A \neq \varnothing$ και $B \neq \varnothing$ και γράφουμε

$$A = \{a_1, a_2, \dots\} \quad \text{και} \quad B = \{b_1, b_2, \dots\}.$$

Ορίζουμε $f : A \times B \to \mathbb{N}$ με $f(a_i, b_j) = 2^i 3^j$. Η f είναι $1-1$. Άρα το $A \times B$ είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο τού $\mathbb{N}$. Επομένως το $A \times B$ είναι το πολύ αριθμήσιμο. □

Θεώρημα 1.2.12 *Αν τα σύνολα A_j, $j = 1, 2, \dots$ είναι το πολύ αριθμήσιμα, τότε η ένωσή τους $\cup_{j=1}^{\infty} A_j$ είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω ότι

$$A_j = \{a_{j1}, a_{j2}, \dots\},\ j = 1, 2, \dots$$

Θεωρούμε το σύνολο $X := \{(j, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a_{ji} \in \cup_{j=1}^{\infty} A_j\}$. Ορίζουμε $f : X \to \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ με $f(j, i) = a_{ji}$. Η f είναι συνάρτηση επί. (Η f δεν είναι κατ΄ ανάγκη συνάρτηση $1-1$ διότι τα σύνολα A_j εν γένει δεν είναι ξένα). Από την Πρόταση 1.2.3 το σύνολο $\cup_{j=1}^{\infty} A_j$ είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο του X, άρα και τού $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ το οποίο είναι αριθμήσιμο. Επομένως το $\cup_{j=1}^{\infty} A_j$ είναι το πολύ αριθμήσιμο. □

Παράδειγμα 1.2.13 Αν $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\}$ είναι προφανώς αριθμήσιμο. Όμως

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Λόγω τού Θεωρήματος 1.2.12, το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.

Θεώρημα 1.2.14 *Το διάστημα $(0, 1)$ είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ είναι υπεραριθμήσιμο. Ας υποθέσουμε ότι το $[0, 1]$ είναι αριθμήσιμο. Έστω

$$[0, 1] = \{x_1, x_2, \dots\}$$

μιά αρίθμησή του. Χωρίζουμε το $[0, 1]$ σε τρία κλειστά διαστήματα ίσου μήκους: $[0, 1] = [0, 1/3] \cup [1/3, 2/3] \cup [2/3, 1]$. Έστω I_1 ένα από αυτά τα διαστήματα που δεν περιέχει το x_1. Χωρίζουμε το I_1 σε τρία ισομήκη κλειστά διαστήματα και ονομάζουμε I_2 ένα από αυτά που δεν περιέχει το x_2. Συνεχίζοντας έτσι κατασκευάζουμε μιά φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων $\{I_n\}$. Το μήκος τού I_n είναι $1/3^n \to 0$ όταν $n \to \infty$. Από την αρχή τού κιβωτισμού υπάρχει μοναδικό $x \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Τότε $x = x_m$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Άτοπο, διότι $x_m \notin I_m$. □

Παράδειγμα 1.2.15 Αν $a < b$, το διάστημα (a, b) είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο διότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x - a}{b - a}$$

απεικονίζει αμφιμονότιμα το (a, b) επί τού $(0, 1)$.

Πόρισμα 1.2.16 *Κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που περιέχει ένα διάστημα είναι υπεραριθμίσημο.*

Πρόταση 1.2.17 *Δίνονται δύο ξένα σύνολα A και B. Αν το A είναι το πολύ αριθμήσιμο και το B είναι άπειρο σύνολο, τότε $A \cup B \sim B$.*

Απόδειξη. Λόγω τής Πρότασης 1.2.10, το B περιέχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο B_1. Θέτουμε $B_2 = B \setminus B_1$. Τότε

$$B = B_1 \cup B_2 \quad \text{και} \quad A \cup B = A \cup B_1 \cup B_2.$$

Το σύνολο $A \cup B_1$ είναι αριθμήσιμο (ένωση το πολύ αριθμήσιμου με αριθμήσιμο). Άρα $A \cup B_1 \sim B_1$, δηλαδή υπάρχει $1-1$ και επί συνάρτηση $f : B_1 \to A \cup B_1$. Ορίζουμε $g : B \to A \cup B$ με

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in B_1. \\ x, & x \in B_2. \end{cases}$$

Η g είναι συνάρτηση $1-1$ και επί. Άρα $B \sim A \cup B$. □

1.3 Υπακολουθίες

Ορισμός 1.3.1 *Μιά ακολουθία $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ ονομάζεται υπακολουθία της ακολουθίας $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots$ τέτοιοι ώστε $b_k = a_{n_k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.*

Για παράδειγμα, οι ακολουθίες $\{\frac{1}{n^2}\}$, $\{\frac{1}{n!}\}$ και $\{\frac{1}{2n}\}$ είναι όλες υπακολουθίες της $\{\frac{1}{n}\}$. Η ακολουθία $\{a_1, a_2, a_4, a_8, a_{16}, \ldots\}$ και οι ακολουθίες $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$ είναι υπακολουθίες της $\{a_n\}$.

Θεώρημα 1.3.2 (Bolzano-Weierstrass) *Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό.*

Απόδειξη. Έστω $\{a_n\}$ μιά φραγμένη ακολουθία. Τότε υπάρχουν αριθμοί $m_1, M_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$m_1 \leq a_n \leq M_1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Θέτουμε $I_1 = [m_1, M_1]$. Διαιρούμε το I_1 σε δύο ισομήκη κλειστά διαστήματα

$$\left[m_1, \frac{m_1 + M_1}{2}\right] \quad \text{και} \quad \left[\frac{m_1 + M_1}{2}, M_1\right].$$

Σε ένα τουλάχιστον από αυτά τα δύο διαστήματα υπάρχουν άπειροι όροι της $\{a_n\}$. Ονομάζουμε I_2 αυτό το διάστημα. Διχοτομούμε το I_2 και παρατηρούμε πάλι ότι σε τουλάχιστο ένα από τα υποδιαστήματα πού προκύπτουν υπάρχουν

άπειροι όροι της $\{a_n\}$. Ονομάζουμε I_3 αυτό το υποδιάστημα. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικάσία κατασκευάζουμε μιά ακολουθία διαστημάτων

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_j \supset \ldots$$

και παρατηρούμε ότι η ακολουθία των διαμέτρων τους τείνει στο 0 και ότι το I_j περιέχει άπειρους όρους της $\{a_n\}$.

Από της αρχή του κιβωτισμού (Θεώρημα 1.1.16), υπάρχει μαναδικό $l \in \cap_{j=1}^{\infty} I_j$. Θα δείξουμε ότι μιά υπακολουθία $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ της $\{a_n\}$ συγκλίνει στο l. Αν $k \in \mathbb{N}$, το διάστημα $(l-1/k, l+1/k)$ περιέχει ένα τουλάχιστον από τα διαστήματα $I_1, I_2, \ldots$ (διότι όλα περιέχουν το l και η διάμετρός τους τείνει στο 0). Κάτασκευάζουμε τώρα την $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ επαγωγικά ως εξής:

Έστω $n_1 := \min\{n \geq 1 : a_n \in (l-1, l+1)\}$ και

$$n_k := \min\left\{n \geq n_{k-1}+1 : a_n \in \left(l - \frac{1}{k}, l + \frac{1}{k}\right)\right\}.$$

Τότε $|a_{n_k} - l| < \frac{1}{k}, \ \forall k \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = l.$$

□

1.4 Ακολουθίες Cauchy

Ορισμός 1.4.1 *Μιά ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n\}$ ονομάζεται ακολουθία Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε*

$$\forall m, n \geq n_o, \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Πρόταση 1.4.2 *Κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τον ορισμό για $\varepsilon = 1$ βρίσκουμε n_o τέτοιο ώστε

$$\forall m, n \geq n_o, \quad |a_n - a_m| < 1.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι ειδικότερα

$$\forall n \geq n_o, \quad |a_n - a_{n_o}| < 1,$$

δηλαδή

$$\forall n \geq n_o, \quad |a_n| < 1 + |a_{n_o}|.$$

Θέτουμε $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_o-1}|, 1 + |a_{n_o}|\}$ και παρατηρούμε ότι

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq M.$$

□

Πρόταση 1.4.3 *Αν μιά ακολουθία Cauchy $\{a_n\}$ έχει μιά υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ με $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = l \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = l$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχουν $k_o, k_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε

$$\forall k \geq k_o, \quad |a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$\forall m, n \geq k_1, \quad |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θέτουμε $k_2 = \max\{k_o, k_1\}$. Έστω $k \geq k_2$. Τότε $n_k \geq k \geq k_2 \geq k_o$. Άρα $|a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Επίσης $n_k, k \geq k_2 \geq k_1$. Επομένως $|a_{n_k} - a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Τελικά λοιπόν, αν $k \geq k_2$, τότε

$$|a_k - l| \leq |a_k - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

το οποίο σημαίνει ότι $\lim_{k\to\infty} a_k = l$. □

Θεώρημα 1.4.4 *Μιά ακολουθία συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο $l \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\forall n \geq n_o, \quad |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έστω $m, n \geq n_o$. Τότε

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - l| + |a_m - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα η $\{a_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy.

Αντιστρόφως, έστω $\{a_n\}$ μιά ακολουθία Cauchy. Από την Πρόταση 1.4.2, η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη. Άρα θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (Θεώρημα Bolzano-Weierstrass). Λόγω της Πρότασης 1.4.3 και η ίδια η $\{a_n\}$ είναι συγκλίνουσα. □

1.5 Οριακοί αριθμοί ακολουθίας

Ορισμός 1.5.1 *Λέμε ότι ο αριθμός $x \in \mathbb{R}$ είναι οριακός αριθμός της ακολουθίας $\{a_n\}$ αν υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$ με $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x$.*

Πρόταση 1.5.2 *Ο αριθμός $x \in \mathbb{R}$ είναι οριακός αριθμός της ακολουθίας $\{a_n\}$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχει $n \geq m$ τέτοιο ώστε $|a_n - x| < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο x είναι οριακός αριθμός της $\{a_n\}$, δηλαδή ότι υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ τής $\{a_n\}$ με $a_{n_k} \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$. Υπάρχει $k_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\forall k \geq k_o, \quad |a_{n_k} - x| < \varepsilon.$$

Θέτουμε $k_1 = \max\{m, k_o\}$. Τότε $n_{k_1} \geq k_1 \geq k_o$. Άρα $|a_{n_{k_1}} - x| < \varepsilon$.

Αντιστρόφως: Εφαρμόζοντας την υπόθεση για $\varepsilon = 1$ και $m = 1$, βρίσκουμε $n_1 \geq 1$ με $|a_{n_1} - x| < 1$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την υπόθεση για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και $m = n_1 + 1$ και βρίσκουμε $n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$ τέτοιο ώστε $|a_{n_2} - x| < \frac{1}{2}$. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία βρίσκουμε φυσικούς $n_1 < n_2 < \ldots n_k < \ldots$ τέτοιους ώστε

$$|a_{n_k} - x| < \frac{1}{k}.$$

Έτσι κατασκευάσαμε μιά υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$ γιά την οποία ισχύει $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x$. Άρα ο x είναι οριακός αριθμός της $\{a_n\}$. □

Θεώρημα 1.5.3 *Έστω $\{a_n\}$ μιά φραγμένη ακολουθία. Θεωρούμε το σύνολο K όλων των οριακών αριθμών της $\{a_n\}$. Τό K είναι μη κενό, φραγμένο σύνολο που έχει μέγιστο και ελάχιστο.*

Απόδειξη. Το K είναι μη κενό λόγω του Θεωρήματος Bolzano-Weierstrass. Επειδή η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αν $x \in K$, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$ με $a_{n_k} \to x$. Όμως $-M \leq a_{n_k} \leq M$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Άρα $-M \leq x \leq M$. Επομένως το K είναι φραγμένο σύνολο.

Θέτουμε $\sup K = a \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $a \in K$ με χρήση της Πρότασης 1.5.2. Έστω $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$. Επειδή $a = \sup K$, υπάρχει $x \in K$ τέτοιος ώστε $a - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq a$. Ο x είναι οριακός αριθμός της $\{a_n\}$. Άρα υπάρχει $n \geq m$ με $|a_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$|a_n - a| \leq |a_n - x| + |x - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Λόγω της Πρότασης 1.5.2, αυτό σημαίνει ότι το a είναι οριακό σημείο της $\{a_n\}$, δηλαδή $a \in K$. Επομένως $a = \max K$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\inf K = \min K$. □

Ορισμός 1.5.4 (α) *Έστω $\{a_n\}$ μιά φραγμένη ακολουθία. Ο μεγαλύτερος οριακός αριθμός της $\{a_n\}$ ονομάζεται ανώτερο όριο της $\{a_n\}$ και συμβολίζεται με $\limsup a_n$.*
(β) *Έστω $\{a_n\}$ μιά φραγμένη ακολουθία. Ο μικρότερος οριακός αριθμός της $\{a_n\}$ ονομάζεται κατώτερο όριο της $\{a_n\}$ και συμβολίζεται με $\liminf a_n$.*
(γ) *Έστω $\{a_n\}$ μιά ακολουθία πού δεν είναι άνω φραγμένη. Θέτουμε $\limsup a_n = +\infty$.*
(δ) *Έστω $\{a_n\}$ μιά ακολουθία πού δεν είναι κάτω φραγμένη. Θέτουμε $\liminf a_n = -\infty$.*

Σχετική με τον παραπάνω ορισμό είναι η Άσκηση 1.6.34.

Παράδειγμα 1.5.5 Η ακολουθία

$$a_n = 2(-1)^n + \frac{1}{2^n}$$

είναι φραγμένη και έχει δύο οριακούς αριθμούς: το 2 και το -2 διότι ισχύει $a_{2n} \to 2$ και $a_{2n-1} \to -2$. Άρα η ακολουθία αυτή έχει δύο οριακούς αριθμούς το 2 και το -2. Επομένως

$$\limsup a_n = 2, \qquad \liminf a_n = -2.$$

Παράδειγμα 1.5.6 Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο. Έστω $\{q_1, q_2, \dots\}$ μια αρίθμησή του. Θεωρούμε την ακολουθία $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ η οποία δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω φραγμένη. Άρα

$$\limsup q_n = +\infty, \qquad \liminf q_n = -\infty.$$

Θεώρημα 1.5.7 *Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία και έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε*
(i) *$x \le \limsup a_n$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$ είναι άπειρο.*
(ii) *$x \ge \limsup a_n$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : x + \varepsilon < a_n\}$ είναι πεπερασμένο.*
(iii) *$x \ge \liminf a_n$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x + \varepsilon\}$ είναι άπειρο.*
(iv) *$x \le \liminf a_n$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x - \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο το (i). Η απόδειξη των (ii), (iii) και (iv) είναι ανάλογη. Γιά την απόδειξη τού (i) υπόθέτουμε πρώτα ότι $x \le \limsup a_n$ και παίρνουμε τυχαίο $\varepsilon > 0$. Υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ με $a_{n_k} \to \limsup a_n$. Άρα υπάρχει $k_o \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $k \ge k_o$,

$$a_{n_k} > \limsup a_n - \varepsilon \ge x - \varepsilon.$$

Έπεται ότι το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$ είναι άπειρο.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$ είναι άπειρο. Έστω ότι $x > \limsup a_n$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση για $\varepsilon = \frac{1}{2}(x - \limsup a_n)$, συμπεραίνουμε ότι άπειροι όροι της ακολουθίας (άρα και όλοι οι όροι μιάς υπακολουθίας) είναι μεγαλύτεροι από $x - \varepsilon$. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass, υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$ με $a_{n_k} \to y \ge x - \varepsilon$. Τότε ο y είναι οριακός αριθμός της $\{a_n\}$ και

$$y \ge x - \varepsilon = x - \frac{1}{2}(x - \limsup a_n) = \frac{1}{2}(x + \limsup a_n) > \limsup a_n.$$

Άτοπο.

Έτσι το (i) αποδείχτηκε. □

Θεώρημα 1.5.8 *Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία.*
(i) *Θέτουμε* $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. *Τότε* $\limsup a_n = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.
(ii) *Θέτουμε* $c_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$. *Τότε* $\liminf a_n = \sup\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Απόδειξη. Η $\{b_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία. Άρα $b_n \to \inf b_n := b$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\limsup a_n = b$.

Υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$ με $a_{n_k} \to \limsup a_n$. Όμως $a_{n_k} \leq b_{n_k}$ και $b_{n_k} \to b$. Άρα

$$\limsup a_n = \lim a_{n_k} \leq \lim b_{n_k} = b.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα θα εφαρμόσουμε το (i) τού Θεωρήματος 1.5.7. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $b_n \to b$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$b_n > b - \varepsilon, \quad \forall n \geq n_o. \tag{1.3}$$

Ειδικότερα

$$b_{n_o} = \sup\{a_k : k \geq n_o\} > b - \varepsilon.$$

Άρα υπάρχει $k_1 \geq n_o$ τέτοιο ώστε $a_{k_1} > b - \varepsilon$. Εφαρμόζουμε τώρα την (1.3) για $n = k_1 + 1$ και παίρνουμε

$$b_{k_1+1} = \sup\{a_k : k \geq k_1 + 1\} > b - \varepsilon.$$

Άρα υπάρχει $k_2 \geq k_1 + 1$ τέτοιο ώστε $a_{k_2} > b - \varepsilon$. Συνεχίζοντας έτσι κατασκευάζουμε υπακολουθία $\{a_{k_j}\}$ της $\{a_k\}$ με $a_{k_j} > b - \varepsilon$. Άρα το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n > b - \varepsilon\}$ είναι άπειρο. Από το (i) τού Θεωρήματος 1.5.7, $\limsup a_n \geq b$. Έτσι το (i) αποδείχτηκε. Το (ii) αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. □

1.6 Ασκήσεις

sup και inf

1.6.1 Έστω E ένα φραγμένο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$ με δύο τουλάχιστον σημεία. Δείξτε ότι:
(α) $-\infty < \inf E < \sup E < +\infty$.
(β) Αν το A είναι μη κενό υποσύνολο τού E, δείξτε ότι

$$\inf E \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup E.$$

1.6.2 Αν το $\lim_{n\to\infty} a_n$ υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός), δείξτε ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φραγμένη και ισχύει $\inf_n a_n \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \sup a_n$.

1.6.3 Δείξτε ότι αν $\lim a_n = l \in \mathbb{R}$, τότε το σύνολο $\{l, a_1, a_2, \dots\}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο.

1.6.4 Δίνονται δύο μη κενά, άνω φραγμένα σύνολα A και B. Ορίζουμε $A+B := \{x+y : x \in A,\ y \in B\}$ και $A \cdot B := \{xy : x \in A,\ y \in B\}$. Δείξτε ότι

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B.$$

Αν επιπλέον $A, B \subset \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ τότε

$$\sup(A \cdot B) = (\sup A) \cdot (\sup B).$$

1.6.5 Γιά $A, B \subset \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \quad \text{και} \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

1.6.6 Για $E \subset \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$, ορίζομε $tE := \{tx : x \in E\}$. Δείξτε ότι:
(α) Αν $t \geq 0$, τότε $\sup(tE) = t \sup E$ και $\inf(tE) = t \inf E$.
(β) Αν $t < 0$, τότε $\sup(tE) = t \inf E$ και $\inf(tE) = t \sup E$.

1.6.7 Αν f, g είναι δυό πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο E, δείξτε ότι

$$\inf_E(f+g) \geq \inf_E f + \inf_E g \quad \text{και} \quad \sup_E(f+g) \leq \sup_E f + \sup_E g.$$

1.6.8 Αν S και T είναι δυό υποσύνολα τού $\mathbb{R}$ και $s \leq t$ για κάθε $s \in S$ και $t \in T$, δείξτε ότι $\sup S \leq \inf T$.

1.6.9 Βρείτε το άνω και το κάτω πέρας των παρακάτω συνόλων.
(α) $A = \{2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r} : p, q, r \in \mathbb{N}\}$.
(β) $B = \{x : 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$.
(γ) $C = \{x : (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0\}$.

1.6.10 Αν $I_n = [a_n, b_n],\ n \in \mathbb{N}$, είναι κλειστά διαστήματα με $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ και $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, τότε από την Αρχή τού Κιβωτισμού υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$. Θεωρούμε μιά ακολουθία $\{x_n\}$ με $x_n \in I_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

1.6.11 Δείξτε ότι η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

1.6.12 Αποδείξτε τις Προτάσεις 1.2.9 και 1.2.10.

1.6.13 Δείξτε ότι ένα σύνολο είναι άπειρο αν και μόνο αν είναι ισοδύναμο με ένα γνήσιο υποσύνολό του.

1.6.14 Δείξτε ότι το διάστημα $(0,1)$ είναι ισοδύναμο με το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$.

1.6.15 Δείξτε ότι κάθε σύνολο ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων είναι αριθμήσιμο.

1.6.16 Δείξτε ότι το σύνολο των κύκλων στο επίπεδο με ρητή ακτίνα και κέντρα πού έχουν ρητές συντεταγμένες είναι αριθμήσιμο.

1.6.17 Δείξτε ότι το σύνολο των πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές είναι αριθμήσιμο.

1.6.18 Ένας αριθμός ονομάζεται *αλγεβρικός* αν είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές. Δείξτε ότι το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

1.6.19 Δείξτε ότι κάθε διάστημα περιέχει άρρητους αριθμούς και μάλιστα το σύνολο των άρρητων σε κάθε διάστημα είναι υπεραριθμήσιμο.

1.6.20 Δείξτε ότι αν το A είναι υπεραριθμήσιμο και το B είναι το πολύ αριθμήσιμο υποσύνολο τού A, τότε $A \setminus B \sim A$.

1.6.21* (Θεώρημα τού Cantor). Το *δυναμοσύνολο* $\mathcal{P}(A)$ ενός συνόλου A είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων τού A. Δείξτε ότι κανένα σύνολο δεν είναι ισοδύναμο με το δυναμοσύνολό του.

Ακολουθίες

1.6.22 Βρείτε το ανώτερο και το κατώτερο όριο των παρακάτω ακολουθιών:
(α) $\{2(-1)^n + \frac{1}{n!}\}$, (β) $\{3 + \frac{(-1)^n}{n}\}$.

1.6.23 Δίνονται δύο ακολουθίες $\{s_n\}$ και $\{t_n\}$ και ένας φυσικός N. Αν $s_n \le t_n$ για κάθε $n \ge N$, δείξτε ότι

$$\liminf s_n \le \liminf t_n \quad \text{και} \quad \limsup s_n \le \limsup t_n.$$

1.6.24 Δείξτε ότι αν μιά φραγμένη ακολουθία έχει μοναδικό οριακό αριθμό $l \in \mathbb{R}$, τότε $a_n \to l$.

1.6.25 Δείξτε ότι αν μιά ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο $l \in \mathbb{R}$, τότε κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο l.

1.6.26 Έστω $\{a_n\}$ μιά ακολουθία. Δείξτε ότι $a_n \to l$ αν και μόνο αν οι υπακολουθίες $\{a_{2k}\}$ και $\{a_{2k-1}\}$ συγκλίνουν στο $l \in \mathbb{R}$.

1.6.27 Αν $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ είναι δύο φραγμένες ακολουθίες, δείξτε ότι

$$\begin{aligned} \liminf a_n + \liminf b_n &\le \liminf(a_n + b_n) \le \liminf a_n + \limsup b_n \\ &\le \limsup(a_n + b_n) \le \limsup a_n + \limsup b_n. \end{aligned}$$

1.6.28 Αν $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ είναι δύο φραγμένες ακολουθίες με θετικούς όρους, δείξτε ότι

$$\begin{aligned} \liminf a_n \cdot \liminf b_n &\le \liminf(a_n b_n) \le \liminf a_n \cdot \limsup b_n \\ &\le \limsup(a_n b_n) \le \limsup a_n \cdot \limsup b_n. \end{aligned}$$

1.6.29 Δίνονται δύο φραγμένες ακολουθίες $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Αν η $\{a_n\}$ συγκλίνει, δείξτε ότι

$$\limsup(a_n + b_n) = \lim a_n + \limsup b_n$$

και

$$\liminf(a_n + b_n) = \lim a_n + \liminf b_n.$$

1.6.30 Έστω $\{a_n\}$ μιά φραγμένη ακολουθία. Δείξτε ότι

$$\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$$

και

$$\liminf(-a_n) = -\limsup a_n.$$

1.6.31 Έστω $\{a_n\}$ μιά ακολουθία με $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

1.6.32 Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία και έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\limsup a_n = x$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, άπειροι όροι της ακολουθίας είναι μεγαλύτεροι από $x - \varepsilon$ και πεπερασμένου πλήθους όροι είναι μεγαλύτεροι από $x + \varepsilon$. Διατυπώστε και αποδείξτε ανάλογη πρόταση για το κατώτερο όριο.

1.6.33 (α) Δείξτε ότι αν μιά ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη, τότε έχει υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$.
(β) Δείξτε ότι αν μιά ακολουθία δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε έχει υπακολουθία που τείνει στο $-\infty$.

1.6.34 Έστω $\{a_n\}$ μιά ακολουθία. Τα $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$ έχουν οριστεί στις ακόλουθες περιπτώσεις:
1. Όταν η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη.
2. Όταν η $\{a_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη.
3. Όταν η $\{a_n\}$ δεν είναι κάτω φραγμένη.
Εξετάστε αν και πώς μπορούν να οριστούν τα $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$:
4. Όταν η $\{a_n\}$ είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη.
5. Όταν η $\{a_n\}$ είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη.
Βρείτε παραδείγματα ακολουθιών για τις παραπάνω πέντε περιπτώσεις.

1.6.35 Διατυπώστε και αποδείξτε ένα θεώρημα ανάλογο τού Θεωρήματος 1.5.7 για μη φραγμένες ακολουθίες.

1.6.36 Διατυπώστε και αποδείξτε ένα θεώρημα ανάλογο τού Θεωρήματος 1.5.8 για μη φραγμένες ακολουθίες.

1.6.37 Δείξτε ότι μιά ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει (σε αριθμό ή στα $\pm\infty$) αν και μόνο αν $\limsup a_n = \liminf a_n$.

1.6.38 Σωστό ή Λάθος;
(α) Αν $\{a_n\}$ είναι μιά αύξουσα ακολουθία, τότε κάθε υπακολουθία της είναι αύξουσα.
(β) Υπάρχει ακολουθία που έχει άπειρους στο πλήθος οριακούς αριθμούς.
(γ) Αν η $\{b_n\}$ είναι υπακολουθία της $\{a_n\}$ και η $\{c_n\}$ είναι υπακολουθία της $\{b_n\}$, τότε η $\{c_n\}$ είναι υπακολουθία της $\{a_n\}$.

1.6.39 Δίνεται μιά ακολουθία $\{a_n\}$. Ορίζουμε την ακολουθία $\{b_n\}$ θέτοντας

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

(α) Δείξτε ότι αν $a_n \to a$, τότε $b_n \to a$.
(β) Σωστό ή Λάθος; Αν $b_n \to a$, τότε $a_n \to a$.
(γ) Δείξτε ότι αν $b_n \to a$ και η $\{a_n\}$ είναι αύξουσα, τότε $a_n \to a$.

1.6.40* Δείξτε ότι κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μία μονότονη υπακολουθία.

1.6.41* Δίνεται μιά ακολουθία $\{a_n\}$ που έχει την ιδιότητα $a_{n+1} - a_n \to 0$. Υποθέτουμε ότι η $\{a_n\}$ έχει δύο οριακούς αριθμούς a, b με $a < b$. Δείξτε ότι κάθε αριθμός του διαστήματος $[a, b]$ είναι οριακός αριθμός της $\{a_n\}$.

1.6.42* Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία και έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν κάθε συγκλίνουσα υπακολουθία τής $\{a_n\}$ συγκλίνει στο x, τότε $a_n \to x$.

Κεφάλαιο 2

Σειρές πραγματικών αριθμών

2.1 Σύγκλιση σειρών

Ορισμός 2.1.1 *Έστω $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ μιά ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε την ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ με*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Η ακολουθία $\{s_n\}$ ονομάζεται ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Αν $s_n \to s \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στον αριθμό s και γράφουμε

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Αν $s_n \to +\infty$ ή $s_n \to -\infty$, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \quad \text{ή} \quad -\infty.$$

Πολλές φορές ασχολούμαστε και με σειρές της μορφής $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$, όπου $N \in \mathbb{Z}$. Τότε για $n \geq N$, ορίζουμε $s_n = s_N + s_{N+1} + \cdots + a_n$. Λέμε ότι η σειρά συγκλίνει αν η s_n συγκλίνει.

Εφαρμόζοντας το κριτήριο Cauchy (Θεώρημα 1.4.4) στην ακολουθία $\{s_n\}$ προκύπτει άμεσα το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.2 *Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε*

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} a_k\Big| < \varepsilon, \quad \forall m \geq n \geq n_o.$$

Αν $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, τότε η ακολουθία $\{s_n\}$ των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα. Επομένως από το Θεώρημα 1.1.15 προκύπτει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.3 *Υποθέτουμε ότι $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\{s_n\}$ είναι φραγμένη.*

Παράδειγμα 2.1.4 (Η γεωμετρική σειρά) Γιά $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$· δηλαδή $a_n = x^n,\ n = 0, 1, \ldots$. Ισχύει

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n}(x^k - x^{k+1}) = 1 - x^{n+1}.$$

Άρα

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, & x \neq 1, \\ n+1, & x = 1. \end{cases}$$

Αν $x = 1$, τότε $s_n = n + 1 \to +\infty$. Αν $x = -1$, τότε $s_n \to +\infty$. Αν $x = -1$, η $\{s_n\}$ δεν συγκλίνει και μάλιστα ισχύει $\limsup s_n = 1$ και $\liminf s_n = 0$. Αν $x < -1$, τότε η $\{s_n\}$ δε συγκλίνει και μάλιστα ισχύει $\limsup s_n = +\infty$ και $\liminf s_n = -\infty$.

Η πιό ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν $-1 < x < 1$. Τότε $s_n \to \frac{1}{1-x}$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$$

Ορισμός 2.1.5 *Λέμε ότι μιά σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.*

2.2 Κριτήρια σύγκλισης σειρών

Θεώρημα 2.2.1 (Κριτήριο συμπύκνωσης τού Caychy) *Υποθέτουμε ότι $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$$

συγκλίνει.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ t_k &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k}. \end{aligned}$$

Γιά $n < 2^k$,

$$\begin{aligned} s_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} \\ &= t_k. \end{aligned}$$

Άρα

$$s_n \leq t_k, \quad \text{γιά} \quad n < 2^k. \tag{2.1}$$

Από την άλλη μεριά, αν $n > 2^k$,

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} \\ &= \frac{1}{2}t_k. \end{aligned}$$

Άρα

$$t_k \leq 2s_n, \quad \text{γιά} \quad n > 2^k. \tag{2.2}$$

Αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει, τότε η ακολουθία $\{t_k\}$ είναι φραγμένη. Λόγω της ανισότητας (2.1) και η ακολουθία $\{s_n\}$ είναι τότε φραγμένη. Όμως η $\{s_n\}$ είναι αύξουσα, αφού $a_n \geq 0$. Άρα η $\{s_n\}$ είναι συγκλίνουσα, δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αντιστρόφως, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε η $\{s_n\}$ είναι φραγμένη. Λόγω της (2.2) και η $\{t_k\}$ είναι φραγμένη, άρα και συγκλίνουσα. Επομένως η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα 2.2.2 Για $p \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Αν $p \leq 0$, η σειρά προφανώς αποκλίνει στο $+\infty$. Αν $p > 0$, το κριτήριο συμπύκνωσης τού Caychy μπορεί να εφαρμοστεί. Κοιτούμε λοιπόν τη σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(p-1)k}}.$$

Αν $2^{p-1} > 1$, η σειρά αυτή είναι συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά, ενώ αν $2^{p-1} \leq 1$, η σειρά αποκλίνει. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

Παράδειγμα 2.2.3 Για $p \in \mathbb{R}$, μελετούμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}.$$

Επειδή ο λογάριθμος είναι αύξουσα συνάρτηση, η ακολουθία $\{\frac{1}{n(\log n)^p}\}$ είναι φθίνουσα και το κριτήριο συμπύκνωσης τού Caychy μπορεί να εφαρμοστεί. Έτσι οδηγούμαστε στη σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k(\log 2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\log 2)^p} = \frac{1}{(\log 2)^p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}.$$

Από το Παράδειγμα 2.2.2 προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^p}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p>1$.

Θεώρημα 2.2.4 (Κριτήριο σύγκρισης) *Δίνονται οι σειρές* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *με* $b_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
(α) *Αν υπάρχουν* $M>0$ *και* $n_o \in \mathbb{N}$ *τέτοια ώστε για κάθε* $n \geq n_o$, $|a_n| \leq Mb_n$ *και αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *συγκλίνει, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει απολύτως.*
(β) *Αν υπάρχουν* $\delta>0$ *και* $n_o \in \mathbb{N}$ *τέτοια ώστε* $0 \leq \delta a_n \leq b_n, \forall n \geq n_o$ *και αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα

$$q_n = \sum_{k=n_o}^{n} a_k, \quad s_n = \sum_{k=n_o}^{n} |a_k|, \quad t_n = \sum_{k=n_o}^{n} b_k, \ \ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_o.$$

(α) Από την υπόθεση ισχύει $s_n \leq Mt_n, \quad \forall n \geq n_o$. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η ακολουθία $\{t_n\}$ είναι φραγμένη. Άρα και η $\{s_n\}$ είναι φραγμένη. Η $\{s_n\}$ είναι και αύξουσα· άρα συγκλίνει. Επομένως η σειρά $\sum_{n=n_o}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει. Προφανώς και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει , το οποίο σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.
(β) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, τότε η $\{q_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη. Από την υπόθεση $0 \leq \delta a_n \leq b_n, \forall n \geq n_o$· άρα και η $\{t_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη, άρα ούτε και συγκλίνουσα. □

Παράδειγμα 2.2.5 Οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{k^2} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{k^2}$$

συγκλίνουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διότι

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \qquad \text{και} \qquad \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \ \ x \in \mathbb{R},$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Σε πολλές περιπτώσεις είναι δύσκολο να ελέγξουμε αν η υπόθεση τού κριτηρίου σύγκρισης ισχύει. Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορεί να φανεί χρήσιμο το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.6 (Κριτήριο οριακής σύγκρισης) *Δίνονται δυό ακολουθίες* $\{a_n\}$ *και* $\{b_n\}$ *θετικών αριθμών.*
(α) *Αν*

$$\limsup \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R},$$

και αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *συγκλίνει, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*
(β) *Αν*

$$\liminf \frac{a_n}{b_n} > 0,$$

και αν $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, *τότε* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Απόδειξη. (α) Εφόσον $\limsup \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}$, μπορούμε να βρούμε $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\limsup \frac{a_n}{b_n} < M$. Τότε (βλ. Θεώρημα 1.5.7) υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{a_n}{b_n} < M, \quad \forall n \geq n_o.$$

Από το κριτήριο σύγκρισης, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
(β) Εφόσον $\liminf \frac{a_n}{b_n} > 0$, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $0 < \delta < \liminf \frac{a_n}{b_n}$. Τότε (βλ. Θεώρημα 1.5.7) υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{a_n}{b_n} > \delta, \quad \forall n \geq n_o.$$

Από το κριτήριο σύγκρισης, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. □

Παράδειγμα 2.2.7 Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2n^2-5}$$

συγκλίνει. Πράγματι, εφαρμόζουμε το κριτήριο οριακής σύγκρισης με

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2n^2-5} \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Επειδή

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty,$$

η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 2.2.8 Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2n-5}$$

αποκλίνει. Αυτό προκύπτει από την εφαρμογή τού κριτηρίου οριακής σύγκρισης με

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2n-5} \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Θεώρημα 2.2.9 (Κριτήριο τής ρίζας) *Δίνεται η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
(α) *Αν* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *η σειρά συγκλίνει απολύτως.*
(β) *Αν* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *η σειρά αποκλίνει.*

Απόδειξη. (α) Αν $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, μπορούμε να διαλέξουμε b τέτοιο ώστε $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < b < 1$. Από το Θεώρημα 1.5.7, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sqrt[n]{|a_n|} < b, \quad \forall n \geq N.$$

Άρα $|a_n| < b^n, \quad \forall n \geq N$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$ συγκλίνει. Από το κριτήριο σύγκρισης και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
(β) Αν $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, τότε $|a_n| > 1$ γιά άπειρα n. Άρα η ακολουθία $\{a_n\}$ δε συγκλίνει στο 0. Επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. □

Θεώρημα 2.2.10 (Κριτήριο τού λόγου) *Δίνεται η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
(α) *Αν*

$$\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

η σειρά συγκλίνει απολύτως.
(β) *Αν*

$$\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1,$$

η σειρά αποκλίνει.

Απόδειξη. Από την Άσκηση 1.6.31 έχουμε

$$\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \liminf \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Έτσι το κριτήριο τού λόγου είναι άμεση συνέπεια τού κριτηρίου της ρίζας. □

Παράδειγμα 2.2.11 Για τη σειρά

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0, \\
\liminf \sqrt[n]{a_n} &= \lim \sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\
\limsup \sqrt[n]{a_n} &= \lim \sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty,
\end{aligned}$$

Το κριτήριο τού λόγου δεν μπορεί να εφαρμοστεί, ενώ από το κριτήριο της ρίζας συμπεραίνουμε ότι η σειρά συγκλίνει.

Παρατήρηση 2.2.12 *Το κριτήριο τού λόγου είναι συχνά πιό εύχρηστο, πιό εύκολο στην εφαρμογή του. Όμως το κριτήριο της ρίζας είναι ισχυρότερο: όποτε το κριτήριο τού λόγου δίνει σύγκλιση και το κριτήριο της ρίζας δίνει σύγκλιση· όποτε το κριτήριο της ρίζας δεν οδηγεί σε συμπέρασμα, ούτε το κριτήριο τού λόγου οδηγεί σε συμπέρασμα (βλ. απόδειξη τού κριτηρίου τού λόγου). Τέλος, υπάρχουν περιπτώσεις που το κριτήριο του λόγου δεν οδηγεί σε συμπέρασμα , ενώ το κριτήριο της ρίζας δίνει σύγκλιση· βλ. Παράδειγμα 2.2.11.*

Θεώρημα 2.2.13 (Κριτήριο γιά εναλλάσσουσες σειρές) *Υποθέτουμε ότι* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$ *και ότι* $\lim a_n = 0$. *Τότε η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

συγκλίνει. Επιπλέον, αν s_n *είναι τα μερικά αθροίσματα της σειράς και* s *το άθροισμά της, τότε*

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} s_{2n+2} - s_{2n} &= a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0, \\ s_{2n+1} - s_{2n-1} &= a_{2n+1} - a_{2n} \leq 0, \end{aligned}$$

δηλαδή η ακολουθία $\{s_{2n}\}$ είναι αύξουσα ενώ η ακολουθία $\{s_{2n-1}\}$ είναι φθίνουσα.

Επίσης, γιά $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{2n} \\ &= a_1 - [(a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}] \\ &\leq a_1, \end{aligned}$$

δηλαδή η $\{s_{2n}\}$ είναι άνω φραγμένη. Θέτουμε $s := \lim s_{2n}$. Τότε

$$\lim s_{2n+1} = \lim(s_{2n} + a_{2n+1}) = s + 0 = s.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n} = s.$$

Από την Άσκηση 1.6.26 προκύπτει ότι η $\{s_n\}$ είναι συκλίνουσα και $\lim s_n = s$. Επιπλέον, επειδή η $\{s_{2n}\}$ είναι αύξουσα και η $\{s_{2n-1}\}$ είναι φθίνουσα, θα έχουμε

$$s_{2n} \leq s \leq s_{2n+1} \leq s_{2n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Αποδεικνύουμε, τέλος, την ανισότητα $|s - s_n| \leq a_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$. Στεθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$.
Περίπτωση 1: $n =$άρτιος$= 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Τότε η (2.3) δίνει

$$|s - s_n| = |s - s_{2k}| \leq |s_{2k+1} - s_{2k}| = a_{2k+1} = a_{n+1}.$$

Περίπτωση 2: n =περιττός= $2k-1$, $k \in \mathbb{N}$. Τότε η (2.3) δίνει

$$|s - s_n| = |s - s_{2k-1}| \leq |s_{2k-1} - s_{2k}| = a_{2k} = a_{n+1}.$$

□

Θεώρημα 2.2.14 (Κριτήριο τού ολοκληρώματος) *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [m, \infty) \to [0, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα. Τότε η σειρά $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_m^{\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Θέτουμε

$$S(x) := \int_m^x f, \qquad x \in [m, \infty)$$

και

$$s_n = \sum_{k=m}^{n} f(k), \qquad n \geq m.$$

Επειδή η f είναι φθίνουσα, θα έχουμε για κάθε $k \geq m$

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k).$$

Προσθέτοντας τις πρώτες ανισότητες από $k = m$ έως $k = n-1$ προκύπτει

$$s_n - f(m) \leq \int_m^n f = S(n), \;\; n \geq m.$$

Προσθέτοντας τις δεύτερες ανισότητες από $k = m$ έως $k = n$ προκύπτει

$$S(n+1) = \int_m^{n+1} f \leq s_n, \;\; n \geq m.$$

Άρα $S(n+1) \leq s_n \leq S(n) + f(m), \;\; \forall n \geq m$. Από τις ανισότητες αυτές έπεται ότι η ακολουθία $\{s_n\}$ είναι άνω φραγμένη αν και μόνο αν η συνάρτηση S είναι άνω φραγμένη. Επειδή

$$\int_m^{\infty} f = \lim_{x \to \infty} S(x),$$

συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_m^{\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα 2.2.15 Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x^p}, x \in [1, \infty)$$

στο κριτήριο τού ολοκληρώματος εύκολα βρίσκουμε ότι η η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει και από το κριτήριο συμπύκνωσης τού Cauchy (βλ. Παράδειγμα 2.2.2).

Παράδειγμα 2.2.16 Θέτουμε

$$f(x) = \frac{1}{x \log x (\log\log x)^p}, \quad x \in [3, \infty),$$

όπου p πραγματική παράμετρος. Επειδή ο λογάριθμος είναι αύξουσα συνάρτηση, η f είναι αυστηρά φθίνουσα και θετική για $x \geq 3 > e$. Κάνοντας την αντικατάσταση $u = \log\log x$, βρίσκουμε ότι

$$\int_3^n f(x)\, dx = \int_{\log\log 3}^{\log\log n} \frac{1}{u^p}\, du.$$

Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_3^\infty f$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$. Από το κριτήριο τού ολοκληρώματος συμπεραίνουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log\log n)^p}$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

2.3 Αναδιατάξεις σειρών

Ορισμός 2.3.1 *Δίνεται μιά ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^\infty$. Μιά ακολουθία $\{a'_n\}_{n=1}^\infty$ ονομάζεται αναδιάταξη τής $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ αν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $\mathbb{N} \ni n \mapsto k(n) \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε*

$$a'_n = a_{k(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αν η $\{a'_n\}_{n=1}^\infty$ είναι αναδιάταξη τής $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty a'_n$ ονομάζεται αναδιάταξη της σειράς $\sum_{n=1}^\infty a_n$

Παράδειγμα 2.3.2 Η ακολουθία

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \dots$$

και η ακολουθία

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{7}, \dots$$

είναι και οι δύο αναδιατάξεις της ακολουθίας $\{\frac{1}{n}\}$.

Παράδειγμα 2.3.3 Θεωρούμε την εναλλάσσουσα αρμονική σειρά

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \dots$$

Όπως είναι γνωστό (βλ. Θεώρημα 2.2.13), η σειρά αυτή συγκλίνει αλλά δε συγκλίνει απόλυτα· επίσης για το άθροισμά της s ισχύει $0 < s < 1$.

Θεωρούμε και την αναδιάταξη

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}--+\dots \tag{2.4}$$

πού προκύπτει με την διαδοχική άθροιση ενός θετικού όρου και δύο αρνητικών. Συμβολίζουμε με s_n και με s'_n τα μερικά αθροίσματα της αρχικής σειράς και της αναδιάταξής της, αντίστοίχως. Ισχύει

$$\begin{aligned} s'_{3n} &= (1-\frac{1}{2})-\frac{1}{4}+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})-\frac{1}{8}+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2})-\frac{1}{4n} \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2}s_{2n}. \end{aligned}$$

Άρα $\lim s'_{3n}=\frac{1}{2}\lim s_{2n}=\frac{1}{2}s$.
Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\lim s'_{3n-1}=\lim s'_{3n-2}=\lim s'_{3n}=\frac{1}{2}s.$$

Συνεπώς (γιατί;) η σειρά (2.4) συγκλίνει και μάλιστα το άθροισμά της είναι $\frac{1}{2}s\neq s$.

Το παραπάνω παράδειγμα δείχνει ότι η αναδιάταξη μιάς σειράς μπορεί να έχει άθροισμα διαφορετικό από αυτό της αρχικής σειράς. Το φαινόμενο αυτόόπως δείχνουν τα ακόλουθα θεωρήματα-είναι χαρακτηριστικό των σειρών που συγκλίνουν αλλά δεν συγκλίνουν απολύτως.

Θεώρημα 2.3.4 *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε όλες οι αναδιατάξεις της συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό.*

Απόδειξη. Έστω s_n τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ και έστω $\sum_{n=1}^{\infty}a_{k(n)}$ μιά αναδιάταξή της με μερικά αθροίσματα s'_n.
Από το κριτήριο τού Cauchy υπάρχει $n_o\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για $m\geq n\geq n_o$,

$$\sum_{k=n}^{m}|a_k|<\varepsilon. \tag{2.5}$$

Διαλέγουμε $p\in\mathbb{N}$ αρκούντως μεγάλο ώστε οι φυσικοί $1,2,\dots,n_o$ να περιέχονται όλοι στο σύνολο

$$\{k(1),k(2),\dots,k(p)\}.$$

Εξετάζουμε τώρα τη διαφορά $|s'_n - s_n|$ για $n \geq p$. Οι αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_{n_o}$ απλοποιούνται κι έτσι, λόγω της (2.5), προκύπτει

$$\begin{aligned} |s'_n - s_n| &= |a_{k(1)} + \cdots + a_{k(n)} - (a_1 + \cdots + a_n)| \\ &\leq |a_{n_o+1}| + |a_{n_o+2}| + \cdots \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει $p \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για $n \geq p$, ισχύει $|s_n - s'_n| < \varepsilon$, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s'_n) = 0.$$

Εφόσον η $\{s_n\}$ συγκλίνει, και η $\{s'_n\}$ θα συγκλίνει και μάλιστα στο ίδιο όριο. □

Θεώρημα 2.3.5 (Riemann) *Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μιά σειρά πού συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως. Αν $-\infty \leq s \leq t \leq +\infty$, τότε υπάρχει αναδιάταξή της $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ με μερικά αθροίσματα s'_n τέτοια ώστε*

$$\liminf s'_n = s, \qquad \limsup s'_n = t.$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στα βιβλία [;], [;], [;].

2.4 Παραστάσεις αριθμών

Πρόταση 2.4.1 *Έστω $p \in \mathbb{N}$ με $p \geq 2$. Αν για τους όρους της ακολουθίας $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ ισχύει $0 \leq k_n \leq p-1$, τότε η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{p^n}$$

συγκλίνει προς έναν αριθμό πού ανήκει στο διάστημα $[0,1]$.

Απόδειξη. Επειδή ο γενικός όρος της σειράς είναι μη αρνητικός, αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμός 1 είναι άνω φράγμα της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων. Πράγματι

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{k_n}{p^n} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{p-1}{p^n} \leq (p-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = 1.$$

□

Πρόταση 2.4.2 *Έστω $p \in \mathbb{N}$ με $p \geq 2$ και έστω $x \in (0,1]$. Υπάρχει ακολουθία ακεραίων αριθμών $\{k_n\}$ τέτοια ώστε:*
(α) $0 \leq k_n \leq p-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
(β)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{p^n},$$

(γ) *$k_n \neq 0$ για άπειρα n.*

Απόδειξη. Κατασκευάζουμε την ακολουθία $\{k_n\}$ επαγωγικά: Έστω k_1 ο μεγαλύτερος ακέραιος με $k_1/p < x$. Τότε $0 \leq k_1 \leq p-1$ και $k_1/p < x \leq (k_1+1)/p$. Έστω k_2 ο μεγαλύτερος ακέραιος με

$$\frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} < x.$$

Τότε ισχύει $0 \leq k_2 \leq p-1$ και

$$\frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} < x \leq \frac{k_1}{p} + \frac{k_2+1}{p^2}.$$

Συνεχίζοντας έτσι προκύπτει μια ακολουθία ακεραίων $\{k_n\}$ τέτοια ώστε $0 \leq k_n \leq p-1$ και

$$\frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} + \ldots \frac{k_n}{p^n} < x \leq \frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} + \cdots + \frac{k_n+1}{p^n}. \tag{2.6}$$

Παίρνοντας τώρα όρια για $n \to \infty$ προκύπτει ότι

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{p^n}. \tag{2.7}$$

Η (2.6) δίνει

$$0 < x - \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{p^j} \leq \frac{1}{p^n}. \tag{2.8}$$

Αν υπήρχε $j_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $k_j = 0,\ \forall j \geq j_o$, τότε η (2.8) θα ερχόταν σε αντίθεση με την (2.7). Άρα υπάρχουν άπειρα n για τα οποία $k_n \neq 0$. □

Για έναν αριθμό $x \in (0,1]$, αν ιχύει

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{p^n}$$

με $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $0 \leq k_n \leq p-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, η παραπάνω σειρά ονομάζεται p-αδική παράσταση τού x. Συνήθως γράφουμε $x = 0.k_1k_2k_3\ldots$ (βάση p) ή $x = 0._pk_1k_2k_3\ldots$. Αν $k_n = 0$ από ένα δείκτη και πέρα, τότε η παράσταση λέγεται τερματιζόμενη. Η Πρόταση 2.4.2 εγγυάται για κάθε $x \in (0,1]$ την ύπαρξη μιάς μη τερματιζόμενης παράστασης τού x. Η p-αδική παράσταση ενός $x \in (0,1)$ δεν είναι πάντα μοναδική. Για παράδειγμα, ισχύει

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{4}{10} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n},$$

δηλαδή $1/2 = 0.5000\cdots = 0.4999\ldots$ (βάση 10). Θα αποδείξουμε ότι η μη τερματιζόμενη παράσταση ενός αριθμού είναι μοναδική. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.4.3 *Αν $x = 0.k_1k_2\ldots$ είναι μιά μη τερματιζόμενη p-αδική παράσταση ενός αριθμού $x \in (0,1)$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει*

$$\frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} + \ldots \frac{k_n}{p^n} < x \leq \frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} + \cdots + \frac{k_n+1}{p^n}. \tag{2.9}$$

Απόδειξη. Ισχύει

$$\begin{aligned}
(2.9) &\iff 0.k_1k_2\ldots k_n < x \leq 0.k_1k_2\ldots(k_n+1) \\
&\iff 0 < x - 0.k_1k_2\ldots k_n \leq 0.0\ldots1 \\
&\iff 0 < 0.0\ldots0k_{n+1}\cdots \leq 0.0\ldots1 \quad (\text{βάση} \quad p) \\
&\iff 0 < \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{k_j}{p^j} \leq \frac{1}{p^n}.
\end{aligned}$$

Οι τελευταίες ανισότητες ισχύουν και άρα το λήμμα αποδείχθηκε. □

Πρόταση 2.4.4 *Έστω $p \in \mathbb{N}$ με $p \geq 2$. Κάθε $x \in (0,1]$ έχει μοναδική μη τερματιζόμενη p-αδική παράσταση.*

Απόδειξη. Η Πρόταση 2.4.2 λέει ότι κάθε $x \in (0,1)$ έχει μιά μη τερματιζόμενη p-αδική παράσταση. Έστω ότι το x έχει δύο μη τερματοζόμενες p-αδικές παραστάσεις: $x = 0.a_1a_2\ldots = 0.b_1b_2\ldots$. Έστω m ο πρώτος δείκτης για τον οποίο $a_m \neq b_m$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_m > b_m$. Από το Λήμμα 2.4.3 προκύπτει

$$\frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \ldots \frac{a_m}{p^m} < x \leq \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_m+1}{p^m}. \tag{2.10}$$

και

$$\frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} + \ldots \frac{b_m}{p^m} < x \leq \frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} + \cdots + \frac{b_m+1}{p^m}. \tag{2.11}$$

Από τις παραπάνω ανισότητες και από τις ισότητες $a_j = b_j,\ j = 1,2,\ldots m-1$ παίρνουμε τις ανισότητες

$$0 < x - y - \frac{a_m}{p^m} \leq \frac{1}{p^m}$$

και

$$0 < x - y - \frac{b_m}{p^m} \leq \frac{1}{p^m},$$

όπου

$$y = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{a_j}{p^j} = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{b_j}{p^j}.$$

Άρα

$$0 < \frac{a_m - b_m}{p^m} \leq \frac{1}{p^m}.$$

και επομένως $a_m = b_m + 1$. Αντικαθιστώντας $a_m = b_m + 1$ στις (2.10) και (2.11) καταλήγουμε σε άτοπο. □

Πρόταση 2.4.5 *Έστω $p \in \mathbb{N}$ με $p \geq 2$ και έστω $x \in (0,1)$. Ο x έχει τερματιζόμενη p-αδική παράσταση αν και μόνο αν είναι της μορφής $x = \frac{m}{p^n}$, όπου $m, n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Αν το x έχει τερματιζόμενη παράσταση τότε

$$x = \frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} + \dots \frac{k_N}{p^N},$$

δηλαδή $x = \frac{m}{p^N}$ με $m = k_1 p^{N-1} + \cdots + k_{N-1} p + a_N \in \mathbb{N}$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $x = \frac{m}{p^n}$. Από τον αλγόριθμο τού Ευκλείδη $m = k_1 p^{N-1} + \cdots + k_{N-1} p + a_N \in \mathbb{N}$ για κατάλληλους ακεραίους k_j, $j = 1, 2, \dots, N$. Άρα

$$x = \frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} + \dots \frac{k_N}{p^N},$$

δηλαδή $x = 0.k_1 \dots k_N$ (βάση p). □

Μπορεί να αποδειχθεί επιπλεόν (βλ. Άσκηση 2.6.17) ότι οι αριθμοί της μορφής $x = \frac{m}{p^n}$ έχουν μοναδική τερματιζόμενη p-αδική παράσταση.

Παράδειγμα 2.4.6 Χρησιμοποιώντας τις δεκαδικές παραστάσεις αριθμών μπορούμε να δώσουμε μιά δεύτερη απόδειξη τού Θεωρήματος 1.2.14 (το διάστημα $(0,1)$ είναι υπεραριθμήσιμο).

Απόδειξη: Το $(0,1)$ δεν είναι πεπερασμένο σύνολο αφού περιέχει όλους τους αριθμούς της μορφής $\frac{1}{n}$, $n = 2, 3, \dots$. Ας υποθέσουμε ότι το $(0,1)$ είναι αριθμήσιμο. Έστω

$$(0,1) = \{a_1, a_2, \dots\}$$

μιά αρίθμησή του. Έστω

$$a_j = 0.a_{j1} a_{j2} a_{j3} \dots$$

η μη τερματιζόμενη δεκαδική παράσταση του a_j, $j = 1, 2, \dots$. Θεωρούμε τον αριθμό $b \in (0,1)$ με μη τερματιζόμενη δεκαδική παράσταση

$$b = 0.b_1 b_2 \dots,$$

όπου $b_k = 3$ αν $a_{kk} \neq 3$ και $b_k = 5$ αν $a_{kk} = 3$. Τότε $b \neq a_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$ διότι οι b και a_j διαφέρουν στο k-στο δεκαδικό ψηφίο· εδώ χρησιμοποιείται η μοναδικότητα της μη τερματιζόμενης δεκαδικής παράστασης (Πρόταση 2.4.4). Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο. Άρα το $(0,1)$ είναι υπεραριθμήσιμο. □

2.5 Το σύνολο και η συνάρτηση τού Cantor

Έστω $I_0 = [0,1]$. Αφαιρούμε από το I_0 το διάστημα $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ και θέτουμε

$$I_1 = I_0 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Αφαιρούμε από τα διαστήματα $[0, \frac{1}{3}]$ και $[\frac{2}{3}, 1]$ το μεσαίο τους ανοικτό διάστημα και προκύπτει το σύνολο

$$I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία προκύπτει μιά ακολουθία κλειστών συνόλων I_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ τέτοια ώστε
(α) $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$.
(β) Το I_n είναι ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων μήκους $\frac{1}{3^n}$ το καθένα.

Θέτουμε

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Ορισμός 2.5.1 *Το σύνολο C ονομάζεται (τριαδικό) σύνολο τού Cantor.*

Θέτουμε $J_n = I_{n-1} \setminus I_n$, $n = 1, 2, \ldots$, δηλαδή το J_n είναι το σύνολο πού αφαιρούμε από το I_{n-1} ώστε να προκύψει το I_n. Το J_n είναι ένωση 2^{n-1} ξένων ανά δύο, ανοικτών μεσαίων διαστημάτων. Καθένα από αυτά έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$. Έτσι ισχύει

$$[0, 1] \setminus I_n = J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_n.$$

Παρατήρηση 2.5.2 1. Το C είναι κλειστό σύνολο ως τομή κλειστών συνόλων.
2. Το C δεν είναι το κενό σύνολο διότι $0 \in C$ και $1 \in C$. Μάλιστα το C είναι άπειρο σύνολο. Πραγματικά τα άκρα των διαστημάτων I_n ουδέποτε αφαιρούνται κατά την κατασκευή τού C. Δηλαδή τα σημεία

$$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \ldots$$

ανήκουν όλα στο C. Ονομάζουμε αυτά τα σημεία *ακραία σημεία τού C*.
(γ) Τα ακραία σημεία τού C είναι σημεία της μορφής $\frac{m}{3^n}$, όπου $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Παρατηρούμε ότι, αν εξαιρέσουμε το 0 και το 1, αυτά είναι σημεία που έχουν δύο τριαδικές παραστάσεις.

Θεώρημα 2.5.3 *Το σύνολο $[0, 1] \setminus C$ είναι ένωση αριθμησίμου πλήθους, ξένων ανά δύο, ανοικτών διαστημάτων συνολικού μήκους 1.*

Απόδειξη. Όπως είδαμε παραπάνω $[0, 1] \setminus I_n = J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_n$. Άρα

$$\begin{aligned} [0, 1] \setminus C &= [0, 1] \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} ([0, 1] \setminus I_n) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n. \end{aligned}$$

Τα J_n είναι ξένα ανά δύο ανοικτά σύνολα. Κάθε J_n είναι ένωση 2^{n-1} ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων μήκους $\frac{1}{3^n}$ το καθένα. Άρα το $[0,1]\setminus C$ είναι ένωση αριθμησίμου πλήθους, ξένων ανά δύο, ανοικτών διαστημάτων. Το συνολικό μήκος των διαστημάτων αυτών είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

□

Μελετούμε τώρα τις τριαδικές (με βάση 3 δηλαδή) παραστάσεις των στοιχείων τού C. Βρίσκουμε πρώτα τις τριαδικές παραστάσεις των ακραίων σημείων τού $I_1 = [0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$.

$$\begin{aligned} 0 &= 0.{}_3000\ldots \\ \frac{1}{3} &= 0.{}_31 = 0.{}_30222\ldots \\ \frac{2}{3} &= 0.{}_32 = 0.{}_31222\ldots \\ 1 &= 1.{}_300\cdots = 0.{}_3222\ldots \end{aligned}$$

Άρα τα ακραία σημεία τού I_1 έχουν μία τουλάχιστον τριαδική παράσταση με ψηφία μόνο 0 και 2 (και όχι 1).

Έστω $x \in (0,\frac{1}{3})$ και $x = 0.{}_3a_1a_2\ldots$ μιά τριαδική παράσταση τού x. Αν $a_1 = 1$, τότε $x = 0.{}_31a_2a_3\cdots \geq 0.{}_31 = \frac{1}{3}$. Άτοπο. Αν $a_1 = 2$, τότε $x = 0.{}_32a_2a_3\cdots > 0.{}_31 = \frac{1}{3}$. Άτοπο. Άρα $a_1 = 0$. Αντιστρόφως: αν $a_1 = 0$, τότε

$$0 \leq x = 0.{}_30a_2a_3\cdots \leq 0.{}_30222\cdots = \frac{1}{3},$$

δηλαδή $x \in [0,\frac{1}{3}]$.

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι $x \in [\frac{2}{3},1]$ αν και μόνο αν για μιά τριαδική παράσταση του x ισχύει $a_1 = 2$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $x \in I_1$ αν και μόνο αν για μιά τριαδική παράσταση του x ισχύει $a_1 = 0$ ή $a_1 = 2$.

Εργαζόμαστε ανάλογα και για το δεύτερο ψηφίο a_2 και βρίσκουμε ότι $x \in I_2$ αν και μόνο αν $a_j = 0$ ή $a_j = 2$ για $j = 1,2$. Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι γενικότερα ισχύει $x \in I_n$ αν και μόνο αν $a_j = 0$ ή $a_j = 2$ για $j = 1,2,\ldots,n$. Καταλήγουμε επομένως στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.4 *Ένας αριθμός $x \in [0,1]$ ανήκει στο σύνολο C αν και μόνο αν $x = 0.{}_3a_1a_2\ldots$ με $a_k \in \{0,2\},\ k \in \mathbb{N}$.*

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα αυτόν τον χαρακτηρισμό των σημείων του C για να αποδείξουμε ότι το σύνολο τού Cantor είναι υπεραριθμήσιμο.

Θεώρημα 2.5.5 *Το C είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : C \to [0,1]$ ως εξής: Έστω $x \in C$. Το x έχει μιά τριαδική παράσταση $x = 0.{}_3k_1k_2\ldots$ με $k_j \in \{0,2\},\ j = 1,2,\ldots$. Ορίζουμε

$$f(x) = f(0.{}_3k_1k_2\ldots) = 0.{}_2\frac{k_1}{2}\frac{k_2}{2}\ldots$$

Η f απεικονίζει το C επί τού $[0,1]$. Άρα (βλ. Πρόταση 1.2.3) το $[0,1]$ είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο τού C. Επομένως το C είναι υπεραριθμήσιμο. □

Η συνάρτηση f στην παραπάνω απόδειξη δεν είναι $1-1$. Για παράδειγμα, ισχύει

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = f(0.{}_30222\ldots) = 0.{}_20111\cdots = 0.{}_21.$$

και

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = f(0.{}_32) = 0.{}_21.$$

Γενικότερα η f παίρνει την ίδια τιμή στα άκρα κάθε μεσαίου ανοικτού διαστήματος που αφαιρείται κατά την κατασκευή τού C. Πράγματι, είναι εύκολο να δεί κανείς ότι αυτά τα αφαιρούμενα διαστήματα είναι της μορφής

$$(0.{}_3a_1a_2\ldots a_m1, 0.{}_3a_1a_2\ldots a_m2)$$

όπου $a_j \in \{0,2\},\ j = 1,2,\ldots,m$. Επομένως

$$\begin{aligned} f(0.{}_3a_1a_2\ldots a_m1) &= f(0.{}_3a_1a_2\ldots a_m0222\ldots) = 0.{}_2\frac{a_1}{2}\ldots\frac{a_m}{2}0111\ldots \\ &= 0.{}_2\frac{a_1}{2}\ldots\frac{a_m}{2}1 \\ &= f(0.{}_3a_1a_2\ldots a_m2). \end{aligned}$$

Επεκτείνουμε τώρα την f στο $[0,1]$: Έστω $x \in [0,1]\setminus C$. Τότε το x ανήκει σε ένα από τα αφαιρούμενα μεσαία διαστήματα (a,b). Όπως είδαμε $f(a) = f(b)$. Θέτουμε $f(x) := f(a) = f(b)$.

Ορισμός 2.5.6 *Η συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$ που ορίστηκε παραπάνω ονομάζεται συνάρτηση τού Cantor.*

Είναι προφανές ότι η συνάρτηση τού Cantor είναι αύξουσα. Στις ασκήσεις αυτού του κεφαλαίου αλλά και στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε πολλές ακόμα ιδιότητες τού συνόλου και της συνάρτησης τού Cantor.

2.6 Ασκήσεις

2.6.1 Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim a_n = 0$.

2.6.2 Βρείτε το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

2.6.3 Δίνονται δύο συγκλίνουσες σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ και ένας αριθμός $c \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ συγκλίνουν και μάλιστα

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

2.6.4 Δείξτε ότι αν μιά σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.

2.6.5 Μιά σειρά έχει μερικά αθροίσματα s_n. Δείξτε ότι η σύγκλιση της $\{s_n\}$ συνεπάγεται τη σύγκλιση της $\{|s_n|\}$. Ισχύει το αντίστροφο;

2.6.6* (Abel) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty}$ μιά σειρά θετικών όρων η οποία αποκλίνει. Έστω s_n τα μερικά της αθροίσματα. Δείξτε ότι
(α) Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$$

αποκλίνει.
(β) Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$$

συγκλίνει.

Κριτήρια σύγκλισης

2.6.7 Βρείτε για ποιές τιμές τού x συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές αρχίζοντας με τα κριτήρια τού λόγου και της ρίζας.
(α) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$, (β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$, (γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n$.

2.6.8 Εξετάστε τη σύγκλιση ή την απόκλιση των σειρών
(α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$, (β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n^2}{(n+2)!}$, (γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n}$.

2.6.9 Βρείτε δύο ακολουθίες θετικών αριθμών $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ τέτοιες ώστε

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \limsup \sqrt[n]{b_n} = 1$$

και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ενώ η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.

2.6.10 Βρείτε δύο ακολουθίες θετικών αριθμών $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ τέτοιες ώστε

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$$

και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ενώ η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.

2.6.11 Εξετάστε τη σύγκλιση της σειράς

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \dots$$

με τα κριτήρια τού λόγου και της ρίζας.

2.6.12 Δείξτε ότι αν $a_n > 0$ γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

συγκλίνουν.

2.6.13

2.6.14 Θεωρούμε την ακολουθία

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

(α) Δείξτε ότι $t_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(β) Δείξτε ότι $t_n - t_{n+1} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(γ) Δείξτε ότι η ακολουθία $\{t_n\}$ συγκλίνει. (Το όριό της συμβολίζεται με γ και ονομάζεται *σταθερά τού Euler*).

2.6.15 (συνέχεια της Άσκησης 2.6.14). Έστω h_n τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ και έστω s_n τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
(α) Δείξτε ότι $s_{2n} = h_{2n} - h_n$.
(β) Δείξτε ότι $h_n - \log n \to \gamma$.
(γ) Δείξτε ότι $s_{2n} \to \log 2$.
(δ) Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2.$$

Αναδιατάξεις σειρών

2.6.16 Δείξτε ότι αν μιά σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε κάθε αναδιάταξή της συγκλίνει απολύτως.

Παραστάσεις αριθμών

2.6.17* Έστω $p \in \mathbb{N}$ με $p \geq 2$ και έστω $x \in (0,1)$. Ο αριθμός x έχει ακριβώς δύο p-αδικές παραστάσεις αν και μόνο άν ο x είναι της μορφής $x = \frac{m}{p^n}$, όπου $m, n \in \mathbb{N}$.

2.6.18 Έστω $x \in (0,1)$. Δείξτε ότι το x έχει τερματιζόμενη δεκαδική παράσταση αν και μόνο αν υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ τέτοια ώστε ο αριθμός $2^m 5^n x$ να είναι ακέραιος.

2.6.19 Μιά μη τερματιζόμενη p-αδική παράσταση $x = 0.k_1 k_2 \ldots$ ονομάζεται περιοδική με περίοδο q αν υπάρχουν $q, k \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $k_{n+q} = k_n$ για κάθε $n > k$. Έστω $x \in (0,1)$. Δείξτε ότι η p-αδική παράσταση (ή οι p-αδικές παραστάσεις) τού x είναι περιοδικές αν και μόνο αν $x \in \mathbb{Q}$.

2.6.20 Δείξτε ότι το σύνολο των αριθμών τού $(0,1)$ των οποίων η δεκαδική παράσταση (ή οι δεκαδικές παραστάσεις, αν έχει δύο τέτοιες) δεν περιέχει 7άρια και 3άρια είναι υπεραριθμήσιμο.

Το σύνολο και η συνάρτηση τού Cantor

2.6.21 Εξετάστε αν ο αριθμός $\frac{1}{4}$ ανήκει στο C. Είναι ακραίο σημείο τού C;

2.6.22 Βρείτε το εσωτερικό, το περίβλημα και το σύνορο τού C (στην τοπολογία τού $\mathbb{R}$).

2.6.23 (α) Δείξτε ότι το σύνολο C τού Cantor δεν περιέχει κανένα διάστημα.
(β) Δείξτε ότι το C είναι πουθενά πυκνό. (Ένα σύνολο ονομάζεται πουθενά πυκνό αν $(\overline{C})^o = \varnothing$).

2.6.24 Δείξτε ότι για κάθε $x \in C \setminus \{0\}$ υπάρχει μιά γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{x_n\} \subset C$ με $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

2.6.25 Δείξτε ότι για το σύνολο C' των σημείων συσσώρευσης τού C ισχύει $C' = C$ (δηλαδή το C είναι *τέλειο* σύνολο).

2.6.26 Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση τού Cantor και την Άσκηση 1.6.20 γιά να δείξετε ότι $C \sim [0,1]$.

2.6.27 Μελετήστε τη συνέχεια της χαρακτηριστικής συνάρτησης χ_C τού C.

2.6.28 Έστω C_1 το σύνολο των ακραίων σημείων τού C. Δείξτε ότι η συνάρτηση τού Cantor είναι γνησίως αύξουσα στο $C \setminus C_1$.

2.6.29 Δείξτε ότι για τη συνάρτηση f τού Cantor ισχύει

$$f(x) = \sup\{f(y) : y \in C, y \leq x\}, \quad x \in [0,1].$$

2.6.30 Έστω $0 < \alpha < 1$. Κατασκευάζουμε ένα σύνολο C_α τύπου Cantor ως εξής: Στο πρώτο βήμα αφαιρούμε από το $[0,1]$ ένα 'μεσαίο' ανοικτό διάστημα μήκους $(1-\alpha)\,3^{-1}$. Στο n βήμα αφαιρούμε 2^{n-1} ανοικτά διαστήματα μήκους $(1-\alpha)\,3^{-n}$. Δείξτε ότι το C_α είναι ένα τέλειο, υπεραριθμήσιμο, σύνολο που δεν περιέχει κάνένα διάστημα.