

$$(l_p)^* = l_q$$

Θεώρημα Αν $1 < p < \infty$, ο δυικός $(l_p)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον l_q όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Απόδειξη. Θα εργαστούμε στην περίπτωση των πραγματικών χωρων l_p (η περίπτωση μιγαδικών l_p είναι αναλογία). Έστω $F : l_p \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Χρησιμοποιούμε τα στοιχεία

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in l_p, \quad (\text{το } 1 \text{ στην } n\text{-οστή θέση})$$

και κατασκευάζουμε την ακολουθία με ορους $y_k = F(e_k)$, δηλαδή,

$$y = y_F = (F(e_1), F(e_2), F(e_3), \dots).$$

Θετομε

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{|F(e_k)|^q}{F(e_k)}, & \text{αν } F(e_k) \neq 0 \\ 0, & \text{αν } F(e_k) = 0 \end{cases}$$

και θα εχομε

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N |y_k|^q &= \sum_{k=1}^N \gamma_k F(e_k) \\ &= F\left(\sum_{k=1}^N \gamma_k e_k\right) \\ &\leq \|F\| \left(\sum_{k=1}^N |\gamma_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|F\| \left(\sum_{k=1}^N |F(e_k)|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|F\| \left(\sum_{k=1}^N |y_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

αρα

$$\left(\sum_{k=1}^N |y_k|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|F\|, \quad \delta\eta\lambda. \quad \left(\sum_{k=1}^N |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|F\|.$$

Αφήνοντας $N \rightarrow \infty$,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|F\|,$$

αρα $y_F = (y_1, y_2, \dots) \in l_q$ και

$$(1) \quad \|y_F\|_q \leq \|F\|.$$

Εξ άλλου για $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_p$

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{k=1}^m x_k e_k\|_p &= \|(x_1, x_2, \dots) - (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots)\|_p \\ &= \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς } m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

αρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ συγκλίνει και $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = x$. Απο την συνέχεια του F θα έχουμε

$$(2) \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k F(e_k)$$

και

$$\begin{aligned} |F(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k F(e_k) \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| \\ &\stackrel{Holder}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|y_F\|_q \|x\|_p, \end{aligned}$$

επομένως $\|F\| \leq \|y_F\|_q$. Απο την (1) έχουμε ισότητα:

$$(3) \quad \|F\| = \|y_F\|_q.$$

Μέχρι τώρα έχουμε δείξει ότι για κάθε $F \in (l_p)^*$ υπάρχει ακολουθία $y = y_F \in l_q$ με $\|y_F\| = \|F\|$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$T : (l_p)^* \rightarrow l_q, \quad T(F) = y_F,$$

και παρατηρούμε ότι

1. Η T είναι γραμμική. Πραγματι

$$\begin{aligned} T(\lambda F_1 + \mu F_2) &= ((\lambda F_1 + \mu F_2)(e_1), (\lambda F_1 + \mu F_2)(e_2), \dots) \\ &= (\lambda F_1(e_1) + \mu F_2(e_1), \lambda F_1(e_2) + \mu F_2(e_2), \dots) \\ &= (\lambda F_1(e_1), \lambda F_1(e_2), \dots) + (\mu F_2(e_1), \mu F_2(e_2), \dots) \\ &= \lambda(F_1(e_1), F_1(e_2), \dots) + \mu(F_2(e_1), F_2(e_2), \dots) \\ &= \lambda y_{F_1} + \mu y_{F_2} \\ &= \lambda T(F_1) + \mu T(F_2), \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad F_1, F_2 \in (l_p)^*). \end{aligned}$$

2. Η T είναι 1-1. Πράγματι αν $y_F = T(F) = 0$ η μηδενική ακολουθία στον l_q , τότε $F(e_k) = 0$ για $k = 1, 2, \dots$. Επειδή, όπως παρατηρήσαμε παραπάνω, για το τυχόν $x \in l_p$ ισχύει η (2), θα έχουμε $F(x) = 0$ για κάθε $x \in l_p$, δηλ. $F \equiv 0$. Έπεται ότι $\text{Ker}(T) = 0$ και ο T είναι 1-1.

3. Θα δείξουμε ότι η T είναι και επι. Πράγματι αν $y = (y_1, y_2, \dots) \in l_q$ ορίζουμε

$$F = F_y : l_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad (x = (x_1, x_2, \dots) \in l_p).$$

Για $x \in l_p$ η ανισότητα Hölder δίνει

$$|F(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_p \|y\|_q < \infty,$$

δηλ. η F είναι καλά ορισμένη. Είναι επίσης και γραμμική (ελεγξέτε). Η ίδια παραπάνω ανισότητα, $|F(x)| \leq \|x\|_p \|y\|_q$, $x \in l_p$, δείχνει ότι η F είναι και φραγμένη, επομένως η F είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές επί του l_p . Από τον ορισμό της F έχουμε $y_k = T(e_k)$ για κάθε $k = 1, 2, \dots$ άρα $T(F) = y$, και έχουμε δείξει ότι η $T : (l_p)^* \rightarrow l_q$ είναι επί.

Συνοψίζοντας, η απεικόνιση

$$T : (l_p)^* \rightarrow l_q, \quad T(F) = y_F,$$

έχει τις ιδιότητες:

- (α) είναι γραμμική,
- (β) είναι 1-1 και επί,
- (γ) $\|T(F)\| = \|F\|$ για κάθε $F \in (l_p)^*$.

Η T είναι επομένως ένας ισομετρικός ισομορφισμός μεταξύ των χώρων $(l_p)^*$ και l_q .

Με αναλογο τροπο αποδεικνυεται: $(c_0)^* = l_1$ και $(l_1)^* = l_\infty$.