

Εξετάσεις ΛΟΓΙΣΜΟΥ I, (Νεο πρόγραμμα)  
και  
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ I, (Παλαιο πρόγραμμα)

6 - 9 - 2004

**Ομάδα Α**

**A-1.**(1a) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor  $P_{3,1}(x)$  για την συνάρτηση  $f(x) = \log(x^2 + 1)$ .

(1b) Βρείτε το όριο  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \log(1 - \frac{2}{n})$ .

**A-2.**Εξετάσετε ποιες από τις σειρές συγκλίνουν

$$(2a) \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right), \quad (2b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n} + 2}{\sqrt{n^3 + 1}}, \quad (2c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n}{n^3 + 2^n + 1}.$$

**A-3.**(3a) Διατυπώστε προσεκτικά:

(i) Τον ορισμό του οριακού σημείου (σημείου συσσωρευσης) μιας ακολουθίας  $\{a_n\}$ .

(ii) Το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass.

(3b) Αν για τις ακολουθίες  $\{a_n\}$  και  $\{b_n\}$  έχουμε  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  και τα οριακά σημεία της  $\{b_n\}$  είναι τα  $-1$  και  $1$ , ποια είναι τα οριακά σημεία της ακολουθίας  $c_n = a_n + b_n$ ;

**A-4.**(4a) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{2} x^n.$$

(4b) Βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2} \left[ \frac{3}{x} \right]$  όπου  $[t]$  =ακεραίο μέρος του  $t$ .

**Ομάδα Β**

**B-5.**Αν  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και  $0 < f'(x) < \frac{1}{x^2}$  για κάθε  $x \in (0, \infty)$  δείξτε ότι  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(2x) - f(x)) = 0$ .

**B-6.**Βρείτε για ποια  $\alpha \in (0, \infty)$ , η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$  συγκλίνει.

Απαντήστε σε όλα τα θέματα της ομάδας Α και σε ένα από αυτά της ομάδας Β. Θα γραφете συνολικά 5 θέματα. Τα θέματα είναι ισοδυναμα.

Καλή επιτυχία